TABLE

DES

ARTICLES CONTENUS DANS CE VOLUME.

TABLE DES MATIÈRES
DU
BULLETIN SCIENTIFIQUE.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

St. PETERSBOURG.

VIme SÉRIE.

SCIENCES MATHEMATIQUES, PHYSIQUES ET NATURELLES.

TOME I.

THÉORÈMES

sur la différentiation des produits, dont les facteurs sont les termes consécutifs d'une série quelconque

Par

EDOUARD COLLINS.

(Lu à l'Académie le 29. Mars 1826.)

1. Soit $f(x, n)$ le terme général d'une série, donné en fonction d'une variable quelconque x et de l'indice n: je désigne par $P[f(x, n)]$ le produit des premiers n termes de cette série, de sorte qu'on ait

$$P[f(x, n)] = f(x, 1) \times f(x, 2) \times f(x, 3) \times \ldots\ldots \times f(x, n);$$

et c'est de la différentiation des expressions de cette forme que je vais m'occuper dans ce qui suit.

2. En supposant $X = P[f(x,n)]$, on aura $\log. X = S[\log. f(x,n)]$; donc

$$\frac{dX}{dx} = X' = X \times S\left[\frac{f'(x,n)}{f(x,n)}\right] = X \,.\, Y$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = X'' = XY' + X'Y = X(Y' + Y^2) = X \,.\, Y^{(2)}$$

$$\frac{d^3 X}{dx^3} = X''' = X\left(Y^{(2)\prime} + YY^{(2)}\right) = X \,.\, Y^{(3)}$$

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = X^{\mathrm{IV}} = X\left(Y^{(3)\prime} + YY^{(3)}\right) = X \,.\, Y^{(4)}$$

et, généralement, en désignant par μ un nombre m d'accents,

$$\frac{d^m X}{d x^m} = X^\mu = X\left(Y^{(m-1)'} + Y Y^{(m-1)}\right) = X \cdot Y^{(m)},$$

formule, dans laquelle, lorsqu'elle devra être particularisée pour les cas $\mu = m = o$ et $\mu = m = 1$, il faudra substituer respectivement X, 1 et Y à X°, $Y^{(0)}$ et $Y^{(1)}$.

3. On a par ce qui précède:

$$Y^{(m)} = Y^{(m-1)'} + Y Y^{(m-1)} \text{ et}$$
$$Y^{(m-1)} = Y^{(m-2)'} + Y Y^{(m-2)}$$

donc :

$$Y^{(m-1)'} = Y^{(m-2)''} + Y' Y^{(m-2)} + Y Y^{(m-2)'}$$

et substituant :

$$Y^{(m)} = Y^{(m-2)''} + Y' Y^{(m-2)} + 2 Y Y^{(m-2)'} + Y^2 Y^{(m-2)},$$

d'où l'on tire, à cause de $Y' + Y^2 = Y^{(2)}$,

$$Y^{(m)} = Y^{(m-2)''} + 2 Y^{(1)} Y^{(m-2)'} + Y^{(2)} Y^{(m-2)} \ldots. (\alpha)$$

Mais $Y^{(m-2)} = Y^{(m-3)'} + Y Y^{(m-3)}$

$$Y^{(m-2)'} = Y^{(m-3)''} + Y' Y^{(m-3)} + Y Y^{(m-3)'}$$
$$Y^{(m-2)''} = Y^{(m-3)'''} + 2 Y' Y^{(m-3)'} + Y'' Y^{(m-3)} + Y Y^{(m-3)''}$$

donc, en mettant ces valeurs dans l'équation (α) :

$$\begin{aligned} Y^{(m)} = Y^{(m-3)'''} &+ Y Y^{(m-3)''} + 2 Y' Y^{(m-3)'} + Y'' Y^{(m-3)} \\ &+ 2 Y Y^{(m-3)''} + 2 Y^2 Y^{(m-3)'} + 2 Y Y' Y^{(m-3)} \\ &+ Y^{(2)} Y^{(m-3)'} + Y Y^{(2)} Y^{(m-3)} \end{aligned}$$

$$= Y^{(m-3)'''} + 3 Y^{(1)} Y^{(m-3)''} + 3 Y^{(2)} Y^{(m-3)'} + Y^{(3)} Y^{(m-3)} \quad (\beta)$$

à cause de $Y' + Y^2 = Y^{(2)}$, $Y'' + 2 Y Y' = Y^{(2)'}$ et $Y^{(2)'} + Y Y^{(2)} = Y^{(3)}$..

En continuant de cette manière et appliquant le mode usité de démonstration, par lequel on prouve la généralité d'une relation établie d'abord pour un nombre quelconque déterminé k, en faisant voir qu'elle doit également valoir pour le nombre suivant $k+1$, enfin, en désignant par n_k le coéfficient du $(k+1)$ième terme de la $n$ième puissance du binome, on parvient à cette équation:

Théorème I.

$$Y^{(m)} = Y^{(m-k)^{\varkappa}} + k_1 Y^{(1)} Y^{(m-k)^{\varkappa-1}} + k_2 Y^{(2)} Y^{(m-k)^{\varkappa-2}} + \dots$$
$$\dots + k_{k-1} Y^{(k-1)} Y^{(m-k)'} + k_k Y^{(k)} Y^{(m-k)}$$

d'ou l'on tire, en faisant $k = m-1$ et partant $\varkappa = \mu - 1$, cette autre relation:

Théorème II.

$$Y^{(m)} = Y^{\mu-1} + (m-1)_1 Y^{(1)} Y^{\mu-2} + (m-1)_2 Y^{(2)} Y^{\mu-3} + \dots$$
$$\dots + (m-1)_{m-2} Y^{(m-2)} Y' + (m-1)_{m-1} Y^{(m-1)} Y$$

4. Le théorème, que nous venons d'établir, fournit les valeurs suivantes:

$$Y^{(m-1)} = Y^{\mu-2} + (m-2)_1 Y^{(1)} Y^{\mu-3} + \dots + (m-2)_{m-2} Y^{(m-2)} Y$$
$$Y^{(m-2)} = Y^{\mu-3} + (m-3)_1 Y^{(1)} Y^{\mu-4} + \dots + (m-3)_{m-3} Y^{(m-3)} Y$$

etc.

qui, substituées l'une après l'autre dans celle que donne le théorème pour $Y^{(m)}$ même, conduisent, après les réductions convenables, successivement à ces équations :

$$Y^{(m)} = \left\{ Y^{\mu-1} + (m-1)_{m-1} Y Y^{\mu-2} \right\} + \left\{ (m-1)_1 Y^{\mu-2} + \right.$$
$$\left. (m-1)_{m-1} (m-2)_1 Y Y^{\mu-3} \right\} Y^{(1)} + \dots\dots\dots$$
$$+ \left\{ (m-1)_{m-2} Y' + (m-1)_{m-1} (m-2)_{m-2} Y Y \right\} Y^{(m-2)}$$

$$Y^{(m)} = \Big\{ Y^{\mu-1} + (m-1)_{m-1} YY^{\mu-2} + \big[(m-1)_{m-2} Y' + (m-1)_{m-1} (m-2)_{m-2} YY\big] Y^{\mu-3} \Big\}$$

$$+ \Big\{(m-1)_1 Y^{\mu-2} + (m-1)_{m-1} (m-2)_1 YY^{\mu-3} + (m-3)_1 \big[(m-1)_{m-2} Y' + (m-1)_{m-1} (m-2)_{m-2} YY\big] Y^{\mu-4} \Big\} Y^{(1)}$$

$+ \ldots\ldots$

$$+ \Big\{(m-1)_{m-3} Y'' + (m-1)_{m-1} (m-2)_{m-3} YY' + (m-3)_{m-3} \big[(m-1)_{m-2} Y' + (m-1)_{m-1} (m-2)_{m-2} YY\big] Y \Big\} Y^{(m-3)}$$

En poursuivant ces substitutions on parvient enfin à éliminer les quantités $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$ etc. et c'est alors qu'on s'apperçoit d'un mode de recurrence concernant les coéfficiens des quotiens différentiels $Y^{\mu-1}$, $Y^{\mu-2}$, $Y^{\mu-3}$ etc. et qui peut être exprimé de la manière suivante:

Théorème III.

$$Y^{(m)} = Y^{\mu-1} + (m-1)_{m-1} \overset{1}{A} YY^{\mu-2} + \big[(m-1)_{m-2} \overset{1}{A} Y' + (m-2)_{m-2} \overset{2}{A} Y\big] Y^{\mu-3}$$

$$+ \big[(m-1)_{m-3} \overset{1}{A} Y'' + (m-2)_{m-3} \overset{2}{A} Y' + (m-3)_{m-3} \overset{3}{A} Y\big] Y^{\mu-4} + \ldots +$$

$$\big[(m-1)_2 \overset{1}{A} Y^{\mu-3} + (m-2)_2 \overset{2}{A} Y^{\mu-4} + \ldots + 2_2 \overset{m-2}{A} Y\big] Y' +$$

$$\big[(m-1)_1 \overset{1}{A} Y^{\mu-2} + (m-2)_1 \overset{2}{A} Y^{\mu-3} + \ldots + 1_1 \overset{m-1}{A} Y\big] Y$$

en désignant par $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ etc. les coéfficiens des termes qui précèdent immédiatement l'introduction de ces signes, de sorte qu'on a:

$$\overset{1}{A} = 1$$

$$\overset{2}{A} = (m-1)_{m-1}\overset{1}{A}$$

$$\overset{3}{A} = (m-1)_{m-2}\overset{1}{A}Y' + (m-2)_{m-2}\overset{2}{A}Y$$

et ainsi de suite.

5. Pour atteindre le but, que nous nous sommes proposés, il s'agit encore de trouver la loi de dépendance qui doit exister entre les quantités Y, Y', Y'', ... et la fonction $f\,(x,\ n)$ ou ses dérivées. Faisons pour cet effet

$$f\,(x,\ n) = \varphi$$

$$\text{et } \frac{f'\,(x,\ n)}{f\,(x,\ n)} = \frac{\varphi'}{\varphi} = \Phi \text{ ou } \Phi^{(1)}$$

et nous aurons en vertu du No. 2:

$$Y\ = S\,\Phi$$
$$Y'\ = S\,\Phi'$$
$$Y''\ = S\,\Phi''$$
etc.

Mais, l'équation $\frac{\varphi'}{\varphi} = \Phi$ fournissant celles-ci:

$$\varphi' = \varphi\,\Phi^{(1)}$$
$$\varphi'' = \varphi\,(\Phi^{(1)'} + \Phi\Phi^{(1)}) = \varphi\Phi^{(2)}$$
$$\varphi''' = \varphi\,(\Phi^{(2)'} + \Phi\Phi^{(2)}) = \varphi\Phi^{(3)}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\varphi^{\mu} = \varphi\,(\Phi^{(m-1)'} + \Phi\Phi^{(m-1)}) = \varphi\Phi^{(m)}$$

il est évident, qu'en suivant une marche tout-à-fait analogue à celle qui nous a conduit aux Théor. I et II., nous obtiendrons pareillement:

$$\Phi^{(m)} = \Phi^{\mu-1} + (m-1)_1 \Phi^{(1)} \Phi^{\mu-2} + (m-1)_2 \Phi^{(2)} \Phi^{\mu-3} + \dots$$
$$\dots + (m-1)_{m-3} \Phi^{(m-1)} \Phi$$

Or, en tirant de cette équation:

$$\Phi^{\mu-1} = \Phi^{(m)} - (m-1)_1 \Phi^{(1)} \Phi^{\mu-2} - (m-1)_2 \Phi^{(2)} \Phi^{\mu-3} - \dots -$$
$$(m-1)_{m-1} \Phi^{(m-1)} \Phi$$

ou bien:

$$\Phi^{\mu} = \Phi^{(m+1)} - m_1 \Phi^{(1)} \Phi^{\mu-1} - m_2 \Phi^{(2)} \Phi^{\mu-2} - \dots - m_m \Phi^{(m)} \Phi$$

des substitutions successives, semblables à celles du No. 4, nous mèneront à cette relation:

$$\Phi^{\mu} = \Phi^{(m+1)} - m_1 \overset{1}{A} \Phi^{(1)} \Phi^{(m)} + \left[(m-1)_1 \overset{2}{A} \Phi^{(1)} - m_2 \overset{1}{A} \Phi^{(2)}\right] \Phi^{(m-1)} -$$
$$- \left[(m-2)_1 \overset{3}{A} \Phi^{(1)} - (m-1)_2 \overset{2}{A} \Phi^{(2)} + m_3 \overset{1}{A} \Phi^{(3)}\right] \Phi^{(m-2)} + \dots$$

où les signes $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \overset{3}{A}, \dots$ doivent être pris dans le sens énoncé ci-dessus, No. 4. Donc, en remplaçant les expressions $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$, $\Phi^{(3)}$ etc. par celles-ci: $\frac{\varphi'}{\varphi}, \frac{\varphi''}{\varphi}, \frac{\varphi'''}{\varphi}$, qui leur sont égales, nous aurons enfin:

Théorème IV.

$$\Phi^{\mu} = \frac{\varphi^{\mu+1}}{\varphi} - m_1 \overset{1}{A} \varphi' \cdot \frac{\varphi^{\mu}}{\varphi^2} + \left[(m-1)_1 \overset{2}{A} \varphi' - m_2 \overset{1}{A} \varphi\varphi''\right] \frac{\varphi^{\mu-1}}{\varphi^3}$$
$$- \left[(m-2)_1 \overset{3}{A} \varphi' - (m-1)_2 \overset{2}{A} \varphi\varphi'' + m_3 \overset{1}{A} \varphi^2 \varphi'''\right] \frac{\varphi^{\mu-2}}{\varphi^4} + \dots$$
$$\pm \left[1_1 \overset{m}{A} \varphi' - 2_2 \overset{m-1}{A} \varphi\varphi'' + 3_3 \overset{m-2}{A} \varphi^2 \varphi''' - \dots \mp m_m \overset{1}{A} \varphi^{m-1} \varphi^{\mu}\right] \frac{\varphi'}{\varphi^{m+1}}$$

où, des deux signes du dernier terme, le supérieur doit être pris lorsque m est un nombre pair, et l'autre dans le cas que m est impair.

6. Un regard jeté sur les théorèmes que nous venons d'exposer, nous apprend que, pour trouver le quotient différentiel, d'un degré quelconque m, du produit $P\ [f\ (x, n)]$, il faut

1° déterminer, par la voie du calcul différentiel, les $m+1$ fonctions dérivées φ', φ', ... $\varphi^{\mu+1}$;

2° trouver par-là, au-moyen du Théor. IV., les m valeurs Φ, Φ', Φ'', ... $\Phi^{\mu-1}$, pour en former

3° les m sommes Y, Y', Y'', ... $Y^{\mu-1}$ (No. 5.), qui, combinées suivant le Théor. III., fourniront

4° la valeur de $Y^{(m)}$, d'ou l'on tirera aisément

5° à l'aide du No. 2., $X^{\mu} = \frac{d^m X}{d X^m} = X Y^{(m)} = P\left[f(x, n)\right] \cdot Y^{(m)}$

7. J'observe finalement, que ce n'est qu'au-moyen du *Calcul des Agrégats combinatoires*, inventé par *H. A. Rothe* *), qu'on peut exprimer par des formules closes la relation immédiate entre le quotient différentiel $\frac{d^m X}{d x^m}$ et la fonction $f\ (x, n)$ et ses dérivées. Il ne me parait point superflu de consigner ici, pour ceux qui entendent le symbolisme de ce calcul, les résultats que m'a fait obtenir cet important instrument analytique.

Soit
$$X = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}{P}\ [f\ (x, \mathfrak{a}+1)]$$

on aura, en faisant
$$\frac{X'}{X} = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}{S}\left[\frac{f'\ (x, \mathfrak{a}+1)}{f\ (x, \mathfrak{a}+1)}\right] = Y,$$

$$\frac{X^{\mu}}{X} = Y^{(m)}$$ (voyez No. 2.), et $f\ (x, \mathfrak{a}+1) = \varphi$ (No. 5.),

*) *Theorie der combinatorischen Integrale; erfunden und dargestellt von H. A. Rothe. Erlangen* 1820.

a) $\frac{d^m (\varphi' : \varphi)}{d\, x^m} =$

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{b}} m^{\mathfrak{b}|-1} \cdot \frac{\varphi^{\mu-\beta+1}}{\varphi^{\mathfrak{b}+1}} S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\ldots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}})!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\ldots\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}!} \varphi^{\mathfrak{a}} \left(\frac{\varphi'}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}} \left(\frac{\varphi''}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}} \cdots \left(\frac{\varphi^{\beta}}{\mathfrak{b}!}\right)^{\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}\right]\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \ldots + \mathfrak{b}\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}$$

$$\mathfrak{a} + \overset{1}{\mathfrak{a}} + \ldots + \overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}$$

b) $Y^{i} = S\left[\frac{d^m (\varphi' : \varphi)}{d\, x^m}\right]$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = n$$

c) $\frac{d^m X}{d\, x^m} =$

$$X \times S\left[\frac{m!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\,\overset{2}{\mathfrak{a}}!\ldots\overset{m}{\mathfrak{a}}!} \left(\frac{Y'}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}} \left(\frac{Y''}{2!}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}} \cdots\cdots \left(\frac{Y^{\mu}}{m!}\right)^{\overset{m}{\mathfrak{a}}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \ldots\ldots + m\overset{m}{\mathfrak{a}} = m$$

en indiquant toujours, comme ci-dessus, par les lettres grecques μ et β les nombres d'accents correspondans aux quantités m et $\mathfrak{b}$, et nous servant en-outre d'une notation introduite par KRAMP pour désigner des produits tels que $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ et $m\,(m-1)\,(m-2) \ldots (m-k)$.

MÉMOIRE

sur

les sels communs du Gouvernement d'Irkoutsk.

Par

GERMAIN HESS.

(Lu à l'Académie le 6. Mai 1829.)

Le gouvernement d'Irkoutsk, qui comprend une si vaste étendue de pays, produit tout le sel qu'on y consomme. Les salines auxquelles on travaille à cet objet sont (sans parler du lac Borsa, où le sel se dépose sur la surface par une évaporation spontanée), les salines de Selenguinsk, celles d'Irkoutsk et celles d'Oustkoute, où l'on retire le sel par l'évaporation des sources d'eau salée qu'on y trouve, et enfin les salines d'Okhotsk, où on se sert de l'eau de mer.

Les sels qu'on retire de ses diverses salines n'ont jamais été jusqu'à présent, l'objet d'un examen approfondi, quoique l'expérience ait suffisamment démontré la nécessité d'une telle recherche. On avait généralement fait la remarque que tous ces sels devenaient très facilement humides dès qu'on les exposait au contact de l'air. De plus, des visitations réitérées dans les magasins décelaient fort souvent des déficits considérables, qui surpassaient de beaucoup la perte que le Gouvernement autorise, par cause de la déliquescence des sels, et qui est de 15 poudes sur mille.

Il s'agissait donc de savoir, avant tout, si ces déficits provenaient véritablement par suite de la déliquescence; si cette déliquescence étoit une propriété de

*

ces sels, et ces déficits enfin une suite inévitable de cette propriété. Telles étaient les questions que m'adressa en 1826, Son Excellence Monsieur DE ZEIDLER, gouverneur civil à Irkoutsk. Je me bornai alors à prouver que tout le sel qu'on retire des diverses salines dont il est question ici, contenait une quantité plus ou moins grande de sels hétérogènes, qui étaient cause de la déliquescence, et que la manière dont on entassait ce sel dans les magasins, pouvait aussi considérablement influer sur la quantité du déficit. Je me persuadai pourtant bientôt après, que cette matière devait être plus amplement traitée et je communique ici les résultats de mes expériences.

I.

Du sel produit par les Salines d'Okhotsk.

Il arriva, en 1827, que le poisson qu'on avait salé à Okhotsk, et qui dans cette contrée est une des nourritures la plus usitée, se corrompait en fort peu de temps. C'est à cela qu'on attribuait généralement des maladies qui étaient devenues très fréquentes; et comme le sel dont on se sert maintenant dans cette contrée, est le produit d'une évaporation consommée en deux jours, au lieu que ci-devant, on en employait trois pour retirer la même quantité de sel, c'est là-dessus qu'on rejetait toute la cause du mal. On me demanda mon avis sur ce sujet, en me remettant trois échantillons de sels, dont l'un était retiré des magasins provenant d'une évaporation qui avoit duré deux jours, l'autre préparé exprès par évaporation de la même durée; le dernier enfin, produit d'une évaporation qui avoit duré trois jours et qui avait été effectuée par une autre personne que les deux précédents. Tous ces échantillons furent bien séchés, afin que l'humidité n'entrat pas en compte de l'analyse qui fut faite absolument de la même manière et sur une quantité égale. Les réactifs indiquaient dans la dissolution de ces sels, la présence de l'acide sulfurique, de l'alumine, de la chaux et de la magnésie, sans faire mention des parties constituantes du sel culinaire proprement dit. L'alumine fut précipitée par l'ammoniaque caustique.

Le liquide filtré fut saturé d'acide oxalique, qui précipitait la chaux. La magnésie fut retirée en traitant la solution par le sous-carbonate de potasse.

Dans tous ces procédés, j'ai strictement suivi les préceptes de M. Berzélius.

La quantité de l'acide sulfurique fut déterminée en traitant par le chlorure de Beryte une solution préparée exprès pour ce but.

Quant au calcul, j'ai considéré l'acide sulfurique comme réuni à l'oxide de Sodium et les terres comme des chlorures, en admettant les tables de M. Berzélius pour base.

A.

Le sel, du magasin d'Okhotsk, pris en 1827, comme produit d'une évaporation de deux jours, contenait sur 1000

Sulfate de Soude . . .	136, 0	224 sels hétérogènes
Chlorure d'alumine . .	62, 0	
Chlorure de chaux . .	9, 4	
Chlorure de magnésie .	16, 6	
Sel commun	776, 0	
	1000,	

ce qui indique que ce sel contient près d'un quart de substances hétérogènes.

B.

Le sel d'Okhotsk, résultant d'une évaporation de deux jours, pour servir d'épreuve, contenait:

Sulfate de soude . . .	75, 5	139, 8.
Chlorure de magnésie . .	19, 5	
Chlorure d'alumine . . .	36, 0	
Chlorure de chaux , .	8, 8	
Sel commun	860, 2	
	1000, 0	

Ce sel contient donc environ la huitième partie de substances hétérogènes.

C.

Le sel d'Okhotsk, provenant d'une évaporation prolongée pendant trois jours pour servir d'épreuve, contenait:

Sulfate de soude . . .	116, 4	209, 1.
Chlorure d'alumine . .	77, 8	
Chlorure de chaux . .	6, 6	
Chlorure de magnésie . .	8, 3	
Sel commun	790, 9	
	1000, 0	

Ce qui fait un cinquième pour les sels hétérogènes.

Il faut remarquer ici, que ce sel qui d'après ses qualités chimiques est beaucoup moins pur que le précédent, a été généralement considéré comme le plus pur et notifié comme tel dans les actes officiels, vu qu'on n'en jugeait que d'après l'extérieur. Comme on a mis plus de temps à son évaporation qu'à celle du précédent, il résulte que ce sel aurait certainement dû être meilleur que le précédent, et que sa détériorité n'a pu provenir que d'une manière de procéder vicieuse au temps de l'évaporation.

Comme il n'y a point de source d'eau salée à Okhotsk, on s'y sert, comme je l'ai déja dit, uniquement de l'eau de mer, pour la préparation du sel, qu'on concentre préalablement au moyen du froid, en laissant géler la majeure partie de l'eau. C'est ce qui explique la proportion des sels hétérogènes qui se trouvent dans le sel d'Okhotsk et qui est semblable à celle qu'on retrouve partout dans l'eau de mer, qui, d'après l'analyse qu'en a donné le Docteur Marcet, contient sur 1000 parties:

Sel commun	26, 60
Sulfate de soude	4, 66
Chlorure de chaux	1, 23
Chlorure de magnésie	5, 15

Wollaston, qui s'est aussi occupé de l'analyse de l'eau de mer, y a découvert des sels à base de potasse, quoiqu'en très petite quantité. Outre cela d'autres chimistes y ont encore découvert des traces de iode et de brome, mais personne encore n'a fait mention d'un sel à base d'alumine qui se trouve en si grande quantité dans l'eau du golfe d'Okhotsk. Il en résulte que cette eau est moins susceptible de donner un bon sel, que l'eau de toute autre mer sous ce rapport.

II.

Du sel produit par les salines d'Oustkout, sur la rive gauche du Léna.

Après avoir évaporé une petite quantité d'eau d'une des sources principales d'eau salée d'Oustkout, j'ai analysé le sel que j'avais obtenu, et qui devait donc contenir toute la quantité des sels hétérogènes au sel culinaire, qui se trouvent en dissolution dans cette eau. Il consistait en :

Chlorure d'alumine	11, 69
Chlorure de chaux	38, 45
Chlorure de magnésie	35, 71
Sulfate de soude	125, 74
Sulfate de chaux	25, 00
Sel commun	763, 41
	1000, 00

Mais en supposant que le gyps ne se forme en plus grande partie qu'à mesure de l'évaporation, que la solution ne contienne donc la chaux que comme chlorure et l'acide sulfurique en combinaison avec l'oxide de Sodium, il résulte la composition suivante :

Sel commun	748, 41	
Chlorure d'alumine . .	11, 69	
Chlorure de chaux . .	52, 15	251, 52.
Chlorure de magnésie . .	35, 71	
Sulfate de soude . . .	152, 00	
	1000, 00	

J'ai choisi ensuite le meilleur sel qu'on retire de ces salines; et voulant savoir la quantité d'humidité qu'il pouvait encore contenir après avoir passé plusieurs semaines dans l'air de la chambre; je l'ai analysé sans le sécher préalablement. 1000 parties contenaient:

Eau	87, 0	
Chlorure d'alumine . . .	7, 7	
Chlorure de chaux . . .	11, 0	147, 7.
Chlorure de magnésie . .	23, 8	
Sulfate de soude	21, 2	
Sel commun	849, 3	
	1000, 0	

Mille parties de ce sel bien sec contiennent:

Chlorure d'alumine . . .	8, 4	
Chlorure de chaux . . .	12, 0	69, 6.
Chlorure de magnésie . .	26, 0	
Sulfate de Soude . . .	32, 2	
Sel commun	930, 4	
	1000, 0	

III.

Du sel produit par les salines d'Irkoutsk, qui se trouvent au bord de l'Angara.

J'ai choisi pour cette analyse le meilleur sel qu'on ait retiré de cette saline pendant l'année 1826. Il consistait en:

Chlorure d'alumine . . .	26, 0	85. 1.
Chlorure de chaux . . .	11, 0	
Chlorure de magnésie . .	20, 5	
Sulfate de soude . . .	27, 6	
Sel commun	914, 9	
	1000, 0	

Par l'action de la chaleur, il se forme peu à peu au fond du bassin dont on se sert pour l'évaporation, une croute de sel fort dure et qui atteint au bout de 20 jours une épaisseur d'environ un pouce et demi: le sel a une cassure blanche et rayée comme celle du chlorure d'ammonium. Si on en sépare la petite couche de gyps qui le couvre, il se dissout dans l'eau sans laisser aucun résidu, et il contient si peu de sels hétérogènes qu'à peine on peut en découvrir des traces au moyen des réactifs. Ce sel surpasse de beaucoup en pureté, même les sels gemmes. On ne s'en est pas servi jusqu'à présent, parce qu'on ne connaissait pas sa nature.

IV.

Du sel produit par les salines de Selenguinsk.

Mille parties de ce sel consistaient en:

Chlorure d'alumine . .	65, 0	252, 9.
Chlorure de chaux	14, 4	
Chlorure de magnésie . .	35, 5	
Sulfate de soude	138, 0	
Sel commun	747, 1	
	1000, 0	

V.

Conclusion.

Les analyses que je viens de citer suffisent pour prouver la nature pernicieuse des sels du gouvernement d'Irkoutsk. L'expérience a prouvé qu'ils contenaient tous quatre et jusqu'à dix pour cent de sels déliquescents, ce qui leur confère cette même propriété.

Comme on n'est jamais trop sûr lorsqu'il faut tirer une conclusion générale, surtout quand il s'agit d'un but pratique, j'ai tâché de vérifier les résultats de l'analyse par la synthèse. Je me suis servi pour cet effet de sel culinaire complètement pur, que j'ai été obligé de préparer exprès. J'y ajoutai un, deux et jusqu'à cinq pour cent de sels déliquescents. Des expériences répétées prouvèrent ce qui suit.

1° Le sel qui contient un pour cent de sels déliquescents devient humide quand il est exposé au contact libre de l'air (NB. dans un lieu où l'air a le même degré d'humidité que dans les magasins).

2° Plus un sel contient de ces parties hétérogènes et plus il attire d'humidité et peut perdre de son poids par suite de ces déliquescences. Il faut remarquer que cette perte n'augmente pas en proportion de la quantité des sels déliquescents mais bien plus encore.

3° Plus le sel est exposé au contact libre de l'air, et plus aussi il peut perdre par déliquescence, ce qui va si loin, qu'un sel qui contient huit pour cent de chlorure de chaux, et qui se trouve en contact libre avec un air humide, se liquéfie presque tout à fait.

4° Plus le vaisseau dans lequel le sel est contenu se trouve haut et étroit, de façon que le sel n'ait pas de contact avec l'air, et moins il s'en liquéfie.

De ces deux dernières remarques, qui sont inséparables l'une de l'autre, il faut extraire les régles suivantes.

1° Plus un magasin de sel est plein et moins la perte par déliquescence doit être forte, en comparaison de la quantité du sel.

2° Les cases des magasins doivent être hautes et étroites et il ne faut pas en entamer plusieurs à la fois.

3° Dans un magasin presque vide, où il n'y a plus qu'un reste de sel, qui par conséquent est exposé à un grand contact d'air, la déliquescence peut aller jusqu'à faire écouler tout le sel.

VI.

Une des questions pratiques les plus importantes et qui se présente d'elle-même, c'est de savoir quelle est la perte du sel, qui devrait être autorisée dans les magasins, en vertu de la déliquescence des sels? Ce que je viens de dire plus haut prouve qu'il n'est pas possible d'assigner cette quantité au juste. Mais aussi je crois pouvoir conclure qu'il serait juste de la fixer au moins au poids des substances déliquescentes que contient chaque espèce de sel. Ainsi donc la perte autorisée dans les magasins devrait comporter sur mille poudes

Pour le sel d'Okhotsk	55	poudes.
Pour le sel d'Oustkout	46	—
Pour le sel d'Irkoutsk	52	—
Pour le sel de Selenguinsk . . .	115	—

Tant que ces quantités n'étaient point déterminées, on ne pouvait faire autrement que de soumettre les sels de la Sibérie au réglement général. Maintenant il me paraît indispensable, ou de faire pour ces contrées une exception à la règle, ou d'améliorer les sels au point de pouvoir être soumis à l'ordre établi. En effet, peut-on exiger qu'un sel dont la déliquescence est de 55 poudes sur mille, ne perde que 15 poudes par cette déliquescence? Qui croira, après ce que je viens de dire, que celui qui est chargé de la surveillance d'un magasin, et qui ne peut conformément à la loi, indiquer chaque année plus de 15 poudes de perte sur mille, puisse se soustraire à la responsabilité autrement que par des moyens illicites, comme de faux poids et des falsifications? Voici quelques ex-

*

périences qui prouveront suffisamment que la perte que j'ai admise pour les différents sels s'accorde complètement avec l'expérience. Le fermier des salines d'Oustkout avait entassé dans ses magasins, 45,000 poudes de sel, qui n'avait point encore été reçu par le gouvernement. Lorsqu'il voulut remettre ce sel il trouva un déficit de 3,500 poudes, ce qui fait 87 poudes sur mille. Il n'y avait pas de sel qui fut resté plus de 4 ans dans ses magasins et celui-là même se trouvait en fort petite quantité.

Dans les magasins des salines d'Irkoutsk, on trouva depuis l'année 1824 jusqu'en 1826, dans l'espace de deux ans, sur 36,415 poudes, une perte de 2,648 poudes, ce qui fait 72½ sur mille. Le sel de l'année 1825 essuya une perte de 1422½ poudes sur 25,424½, ce qui fait 56 poudes sur mille, dans l'espace d'une année. Ces exemples prouvent que la perte des sels, par la déliquescence dans les magasins, égale au bout d'une année, celle que j'ai admise d'après les résultats de mes analyses, et qu'elle la surpasse après ce terme.

VII.

Je ne détaillerai point ici les enquêtes qui ont eu lieu et le nombre des affaires qui s'accumulent dans la chambre des finances, par suite du peu de perte que la loi autorise dans les magasins. Je ne parlerai pas non plus de l'influence pernicieuse que cette cause exerce sur le moral des employés subalternes; mais je m'arrète involontairement aux suites funestes que la constitution mentionnée des sel du gouvernement d'Irkoutsk paraît avoir sur les habitants.

Nous savons que le chlorure de Baryum est un remède fort actif dans les maladies du systême lymphatique, mais que l'emploi outré ou trop prolongé de ce remède, a toujours des suites fâcheuses; qu'il affaiblit le système lymphatique de même que l'organe de la peau, et qu'il peut contribuer par là aux maladies cutanées et au scorbut. Or, en médecine, on remplace quelquefois, le chlorure de Baryum par celui de chaux; et quoique l'action des chlorures du magnésium et de l'alumine ne soit pas encore constatée, il ne nous manque pas de rai-

sons pour conclure de leur action analogue, mais probablement plus nuisible. En admettant donc, que les chlorures de chaux, d'alumine et de magnésie agissent d'une manière analogue au chlorure de Baryte, et prenant pour base de calcul 1° que les sels du gouvernement d'Irkoutsk ne contiennent en général que cinq pour cent de ces substances, quoique l'analyse en ait presque constamment indiqué une quantité plus considérable; 2° que la quantité de sel que chaque individu consomme pendant une année soit de 20 ℔ ce qui est la quantité que le gouvernement dispense, il s'en suit: que chaque individu consomme par jour un peu plus de 18 grains du poids de Nuremberg de ces substances hétérogènes, ce qui certainement paraîtra aux yeux de chaque médecin, une dose beaucoup trop forte pour ne pas devenir nuisible à la longue! Ajoutons encore que les maladies les plus fréquentes dans ces contrées, comme le scorbut, les maladies cutanées et la lèpre norvégienne, se trouvent presque exclusivement parmi les habitants d'origine russe, qui son habitués à l'usage du sel, et qu'on ne les voit presque pas parmi les indigènes, comme les Mongols et les Toungouses qui ne s'en servent point. Peut-on, après tout cela, ne pas soupçonner que ce soient les substances dont j'ai fait mention, qui sont en grande partie cause de ces maladies? Je crois au moins qu'il ne serait pas facile de découvrir une autre raison aussi générale et aussi évidente.

On voit donc au premier abord qu'en admettant une perte par déliquescence aussi grande que je l'ai indiquée, on ne remédierait qu'à une partie du mal, et que ce serait simplement un acte de justice envers les employés attachés à cette partie; mais le sel n'en deviendrait pas plus salubre. C'est donc la conservation de la santé publique qui, plus que toute autre raison, nous force à chercher des moyens d'améliorer la qualité des sels du gouvernement d'Irkoutsk: En effet ne serait-ce pas une contradiction d'employer de grandes sommes pour des établissements de santé, et de ne pas faire en même temps des efforts pour détourner les causes des maladies?

VIII.

Passons maintenant aux moyens d'améliorer ces sels. Ces moyens sont de deux genres, les uns dépendent du mode de l'évaporation, un autre moyen est une décomposition chimique.

Il serait fort à désirer qu'on commençat à améliorer les sels de tout le gouvernement d'Irkoutsk par les moyens que nous offre l'évaporation. Les effets d'une cristallisation lente sont trop connus pour que je m'étende sur ce sujet; je me borne à remarquer qu'une chose essentielle serait de ne point laisser les bassins d'évaporation en contact immédiat avec les flammes, et que, soit qu'on les réchauffat par les vapeurs d'eau bouillante, soit qu'on les fît reposer sur des poëles en briques, l'égalité de la chaleur, de même que l'étendue sur laquelle se produira l'évaporation, seront les points principaux sur lesquels on devra fixer son attention. Mais je m'abstiens de tout détail à ce sujet. Persuadé par l'expérience, que le corps des mines a déjà formé un fort grand nombre d'officiers d'un mérite très dinstingué, je regarderais comme déplacé de ma part de vouloir leur donner des conseils.

Le moyen d'amélioration qui dépend d'une décomposition chimique, serait, après avoir purifié l'eau salée, autant que possible, par les voies usitées, de la traiter par une solution de carbonate de potasse, préparée avec les cendres qui proviennent de la combustion du bois de chauffage. Le but de cette opération est de rendre le sel complètement salubre, car il ne contiendrait alors que du chlorure de potasse, au lieu de toutes les terres dont j'ai fait mention. Je passe sur tous les détails de cette opération en grand, ils dépasseraient de beaucoup les bornes que je me suis prescrites.

IX.

Il ne me reste plus qu'une question à approfondir. Nous avons déjà dit ci-dessus que les propriétés extérieures des sels ne suffisaient pas pour décider leurs qualités. Le gouvernemeut n'a pourtant point d'autre critère, quand il s'agit de

décider de la qualité du sel qu'il reçoit dans ses magasins et qu'il va mettre en circulation. Il s'agit donc de trouver un moyen simple et facile pour déterminer la qualité des sels qu'on retire des salines. Je propose pour cet effet l'emploi d'un aréomètre, gradué d'après un principe particulier, et qui indiquerait la quantité des sels hétérogènes contenus dans le sel qu'on retire des salines. Il y a déjà nombre d'année que M. PARROT a eu l'idée d'employer l'aréomètre pour un but semblable, et il a bien voulu me communiquer la manière dont il avait proposé de s'en servir. Le but étant de découvrir les falsifications, M. PARROT enjoint de dissoudre une quantité déterminée de sel, dans une quantitité déterminée d'eau froide. Les matières falsifiantes étant ordinairement insolubles, le décroissement du poids spécifique de la solution qui en est la suite inévitable, indiqué par l'aréomètre fera juger de la quantité véritable du sel qui se trouvait en dissolution.

Mon but étant d'indiquer par l'aréomètre, non la quantité totale des sels en dissolution, mais la quantité du sel commun et celle des sels hétérogènes, j'ai dû choisir un autre principe, pour la division de l'échelle. J'admets donc pour base une solution complètement saturée de sel commun, et comme une telle solution a la propriété de pouvoir dissoudre encore une assez grande quantité de sels déliquescents il s'en suit que leur présence doit lui communiquer un plus grand poids spécifique, que dans le cas où le sel aurait été pur.

La différence des deux procédés consiste donc en ce que M. PARROT se sert du poids spécifique absolu de la solution, tandis que mon but exige que je me serve des poids spécifiques relatifs des diverses solutions.

Les essais que j'ai fait, m'ont prouvé qu'on pouvait par ce moyen découvrir jusqu'à un pour cent de sels hétérogènes et même une moindre quantité. Mais il faut bien remarquer que pour que, l'expérience soit juste et réponde au but qu'on se propose, il est essentiel de se servir précisément de la quantité d'eau et de sel indiquée pour chaque aréomètre; puisque c'est là-dessus que repose la division de son échelle. Il est tout aussi essentiel d'observer la température pour

laquelle l'instrument est gradué. Ci-devant je me suis toujours servi d'une solution bouillante, mais M. PARROT m'ayant fait observer que l'instrument serait d'un usage beaucoup plus commode, si on employait une solution préparée à la température ordinaire de la chambre, je ne manquerai pas de déterminer, par des expériences, le degré de sensibilité dont l'instrument sera encore susceptible, si la solution n'est point bouillante. La graduation complète d'un aréomètre, d'après le principe que je viens de détailler, exige un grand nombre d'expériences, répétées pour chaque saline en particulier, vu la composition des sels qu'on en retire.

Je m'occuperai avec plaisir de ce travail pénible dès que j'aurai la persuasion, qu'on voudra mettre ma proposition à profit pour le bien général.

DESCRIPTION
D'UN
NOUVEAU PANTOGRAPHE.

PAR

GEORGE-FRÉDÉRIC PARROT.

(Lu à l'Académie le 14. Mars 1827.)

L'idée du pantographe, même dans sa première simplicité, est si ingénieuse et l'emploi de cet instrument est si facile et expéditif dans la réduction des figures à de petites dimensions, que l'on est souvent tenté d'en faire usage pour la réduction des plans et la confection des cartes géographiques. Mais le reproche de défaut d'exactitude, qu'on a jusqu'à présent fait de droit à cet instrument, s'y oppose partout où une grande exactitude est de rigueur. En outre les réductions à faire se trouvent resserrées dans des bornes étroites, qui rarement s'étendent jusqu'au rapport 10 : 1 et l'on se trouve forcé de réitérer l'opération lorsqu'on veut dépasser ce rapport.

La société économique de Livonie, travaillant à une carte de cette province qui doit égaler au moins ce qu'on a de plus parfait en ce genre, se trouva embarassée pour la copie des plans à insérer dans le réseau trigonométrique fourni par l'Astronome de Dorpat. Elle avait fixé le rapport de réduction à $\frac{1}{35}$ qu'aucun pantographe usité ne pouvait atteindre, et moins encore peut-être le degré de perfection et d'exactitude qu'elle désirait obtenir. D'un autre côté cette société désirait employer le pantographe préférablement à toute autre méthode de réduction, non seulement à raison de la célérité du travail, mais surtout parce

que toutes les autres méthodes exigent de la part du dessinateur une attention toujours soutenue, si l'on veut éviter qu'il ne se glisse quantité de fautes partielles.

La société économique chargea l'auteur de cette description, en qualité de son membre honoraire, d'aviser aux moyens non seulement de donner au pantographe toute l'exactitude désirable dans les réductions, mais aussi la faculté d'exécuter les réductions dans le rapport nécessaire de 35 à 1, afin d'épargner le tems et les frais d'une double réduction et surtout de ne pas doubler les fautes, qui, malgré tous les soins du dessinateur, ne sont jamais parfaitement nulles. Il en résulta l'instrument dont la description est l'objet de ce mémoire et qui, à l'examen qui en fut fait par la société, subit les épreuves suivantes:

1) On décrivit avec un compas à verge (*Stangen-Zirkel*) un très grand cercle et on le copia, de même que son centre, dans le rapport de 35 : 1. Non seulement on trouva que le rayon du petit cercle étoit rigoureusement $\frac{1}{35}$ de celui du grand, mais que tous les rayons du petit cercle étaient parfaitement égaux.

2) On décrivit avec l'instrument plusieurs diamètres dans le même cercle, qui se coupèrent tous exactement au centre.

3) On traça une ligne droite et la copia avec le pantographe. Puis on appliqua la règle à la courte ligne sans pouvoir observer aucun défaut de congruence.

4) On fit la réduction de la limite commune de deux terres, deux fois; la première en plaçant le pantographe sur l'une des deux terres et la seconde en le plaçant sur l'autre. Ces deux dessins, tracés en sens opposé sur du papier transparent et placés l'un sur l'autre contre la fenêtre, offrirent une congruence parfaite.

L'étendue de la sphère de réduction de ce nouvel instrument va au-delà de ce que l'auteur même avoit espéré; elle s'étend du rapport 7 à 2 jusqu'au rapport 300 à 1. Or comme la fixation des rapports sur l'instrument se fait

sur deux échelles dont l'une offre 3800 divisions de 0,06316 ou près de $\frac{1}{16}$ de ligne de Paris et l'autre plus de 1600 de ces divisions, il est clair que l'on peut exécuter un nombre immense de rapports entre les extrêmes $\frac{2}{7}$ et $\frac{1}{367}$.

L'auteur n'a pas hâté la publication de ce pantographe, croyant utile de s'assurer que l'instrument ne perd pas sensiblement de son mérite par le tems. Depuis 5 ans il sert à la confection de la carte de Livonie, dont plus de la moitié est achevée, et M. M. les professeurs Struve et Engelhardt, qui surveillent le travail du dessinateur, out toujours trouvé le pantographe fidèle aux engagements qu'il avait contractés par les premières épreuves.

Les défauts d'exactitude dans les pantographes ont plus d'une source. La première se trouve dans les divisions des échelles, qui de règle sont faites par des procédés non exacts et ne supportent pas l'épreuve du vernier. Le cabinet de physique de Dorpat possédant une machine à diviser la ligne droite d'une grande perfection, ce défaut a dû disparaître dans le nouveau pantographe.

La seconde source de défaut d'exactitude se trouve dans les charnières, qui souvent ont un double défaut, celui de vaciller (l'axe ne remplissant pas toujours exactement son trou) et celui d'opposer un frottement considérable des faces des deux règles conjuguées. L'un et l'autre de ces défauts a été évité en faisant tourner les bouts des règles sur un pivot mince, de 7 lignes de hauteur, qui ne touche ses appuis que par ses bouts et tient les règles à une distance verticale de 2 lignes l'une de l'autre.

La troisième source d'inexactitude se trouve dans le crayon par deux causes, la manière de le placer et l'excentricité de la pointe qui a toujours lieu lorsqu'on taille avec le canif et peut aller jusqu'à $\frac{1}{2}$ ligne et produire par conséquent des erreurs d'une ligne dans le plan réduit, faute très considérable si le plan est dessiné sur une petite échelle. Dans l'usage du nouveau pantographe ce défaut n'existe nullement, le dessinateur ne taillant pas son crayon avec le canif, mais avec une lime douce sur un tour, où on le place avec le tuyau de métal où il est fixé à demeure.

Quant à l'étendue des limites des rapports de réduction, l'auteur l'a obtenue en combinant ensemble deux pantographes. Qu'on s'imagine un pantographe fixé par exemple au rapport $\frac{1}{7}$ et un second au rapport $\frac{1}{5}$, il est clair que, si l'on place le style du second là où se trouve le crayon du premier, le crayon du second pantographe dessinera la figure réduite à $\frac{1}{35}$. Dans l'instrument exécuté à Dorpat sous les yeux de l'auteur, le premier pantographe réduit jusqu'à $\frac{1}{20}$ et le second jusqu'a $\frac{1}{15}$; ce qui fait $\frac{1}{300}$ pour le plus grand rapport de réduction.

Qu'il soit permis de présenter quelques considérations théoriques très simples avant d'en venir à la description de l'instrument.

La première idée du pantographe consistait dans la jonction de quatre règles d'égale longueur, de sorte que leurs milieux, joints à charnière, formaient un parallélogramme. Ces règles étaient munies de plusieurs trous à égale distance l'un de l'autre pour changer les rapports. On abandonna bientôt comme inutiles les moitiés extérieures de deux de ces règles et l'instrument prit la forme indiquée par la Fig. I, où a est le style qui parcourt le dessin à réduire, f le point fixe autour duquel se tourne l'instrument entier, et c non seulement le point de jonction des règles cd et ch, mais aussi le point qui porte le crayon. Les lignes fd et fb étant au rapport de 1 à 2, de même que cd et ab, le point c décrira une figure réduite dans le rapport 2 à 1; et si l'on change le rapport de fd à fb de manière quelconque, ayant toujours soin que $cdbh$ soit un parallélogramme, on aura des réductions dans tous ces rapports.

Les défauts de ces premiers modes de construction étant faciles à découvrir, on en évita le principal en ne plaçant plus le crayon à une jointure comme c, mais sur un autre point d'une des règles, préférant la nécessité qui en résultait de faire varier le point fixe. On substitua en outre des échelles à petites divisions aux trous percés à égales distances. C'est apparemment en Angleterre qu'on a exécuté primitivement ces amendements.

La construction admise pour notre instrument est représentée par la fig. I., où *h*, *b*, *d*, *c* sont des charnières invariables, *e* le point fixe de l'instrument, *a* le style qu'on promène sur le dessin à copier.

On sait que, moyennant le parallélisme des règles, les points *a*, *c*, *f* sont toujours en ligne droite. Si on tire la droite *ea*, le point *g* d'intersection avec la règle *cd* sera le point où le crayon doit être placé, et les trois points *e*, *g*, *a* seront toujours en ligne droite, quelque position et figure que l'on donne au parallélogramme *cdbh*, ou quelque part que se trouve le style *a*. Car le rapport des lignes *ed* et *gd* étant constant pour un dessin entier, le triangle *egd* sera toujours semblable au triangle *eab*.

Si donc l'on considère le point fixe *e* comme un centre de mouvement et chaque chemin infiniment petit du style *a* comme un arc de cercle décrit avec le rayon *ae*, il est clair que le point *g* décrira des arcs semblables et dans le rapport $eg:ea$. Mais comme l'on a toujours $eg:ea = gd:ab$, la figure sera réduite dans le rapport de *gd* à *ab*.

Soit le rapport de réduction demandé $\frac{1}{m}$, on prendra sur la règle *df* une longueur telle que $ed:eb = 1:m$, ce qui donne $ed = \frac{db}{m-1}$, et le problème consiste à déterminer la position *g* du crayon sur la régle *cd*. La déterminer graphiquement, en appliquant une règle aux points *a* et *e*, ne fournirait pas l'éxactitude nécessaire. Un calcul très simple nous fournira la longueur *gd*. Car on a $ed:eb = gd:ab$ ou $1:m = gd:ab$; ainsi $gd = \frac{ab}{m}$. Or dans cette construction l'on a toujours $ab = 2db$; on trouve donc *gd* en divisant la longueur doublée *db* par le coéfficient *m* de la réduction requise.

Description.

La Fig. II. représente l'ensemble du pantographe, dessiné à un quart de sa grandeur naturelle. En *A* est le *premier pantographe simple* avec les détails

d'exécution. Les lignes ponctuées, parallèles aux règles, représentent l'instrument théorique. En *B* est le *second pantographe simple*, sans les détails et représenté uniquement par des lignes droites sous les quelles on doit s'imaginer un instrument en tout semblable au premier, mais plus petit. *C* est le centre de mouvement, que l'on fixe au moyen de la masse de plomb *DD* et de la tringle triangulaire *E*. Le style se trouve en *F* et le crayon (si l'on employait ce pantographe seul) serait en *G*. Mais au lieu du crayon l'on y place le bout de l'autre pantographe *B* qui porterait le style si ce pantographe agissait seul. Pour ce dernier le point fixe est en *H*, fourni par la masse de plomb *KK* et la tringle triangulaire *L*; le crayon est en *I*. Le point *F* marchant sur le plan à réduire, doit donc faire décrire au crayon en *I* une figure semblable et dans les rapport $\frac{1}{mn}$, si $\frac{1}{m}$ est le rapport de *CM* à *CN* et $\frac{1}{n}$ celui de *HO* à *HP*.

Cinq *pieds à roulettes* portent tout l'instrument à ses points cardinaux. On les voit en partie aux points *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et la Fig. III. représente un de ces pieds en grandeur naturelle. Les parties *a*, *bb* et l'axe *c* sont d'une seule pièce, que l'on visse à demeure par la partie *a* à la règle. La partie *gedf* est également d'une seule pièce. Son bont *g* sert de collet à l'axe *c*, qui porte sur la branche *df* terminée en fourchette pour recevoir la roulette *hh* d'ivoire, renflée près de l'axe pour diminuer le moment du frottement à ce point. De même il est diminué aux points *g* et *p* de l'axe du pied par la grande longueur de la branche *df*. On voit à côté de cette figure la tête de l'axe *c* avec son col *oo*, dans lequel entre sans frottement le bout poli *n* de la vis *m*, dont la tête *i* se voit à sa place près de *g* dans l'autre figure. Ce bout *n* force le support *gedf* avec sa poulie de suivre les règles lorsqu'on les soulève.

Les *charnières* se trouvent représentées en grandeur naturelle dans la fig. IV. Soient *ab* et *cd* les bouts de deux règles qu'on veut unir à charnière. On applique à l'une des deux, *ab*, les pièces recourbées *fhik* et *lmnk* à vis, qui

saisissent l'axe *ge* à ses extrémités. Cet axe est fixé à vis en position perpendiculaire au bout *c* de la règle *cd*; sa pointe supérieure *g* entre dans une cavité conique (plus large que la pointe) pratiquée au bout *k* de la pièce *fhik*. Sa partie inférieure a une pareille cavité qui reçoit la pointe de la vis *p* pratiquée au bout *k* de la pièce *lnmk*. Il est clair que cette nouvelle espèce de charnière ne permet aucun frottement des surfaces des règles l'une sur l'autre. qu'elle réduit au minimum le moment de frottement du pivot, et qu'elle procure l'avantage d'avoir les quatre règles du même pantographe dans un même plan horizontal.

Ici l'artiste doit mettre le plus grand soin à son travail, pour fixer avec une grande exactitude les axes ou pivots et leurs points d'appui, la justesse des copies réduites dépendant totalement de cette exactitude. Il commencera par la branche *cd* qui porte les deux axes à ses bouts, fixera la distance de l'un à l'autre au moyen du compas à pieds, formera les écrous à ces points de distance et y vissera les axes. Puis il vérifiera les distances des parties supérieures et inférieures des axes. S'il ne les trouve pas égales, ce qui aura lieu lorsque l'une des deux ou l'une et l'autre ne sont pas perpendiculaires à la surface de la règle, il les corrigera comme il sera dit tout-à-l'heure. On peut supposer que le cas arrive que les distances supérieure et inférieure soient égales sans que les axes soient pour cela perpendiculaires à cette surface, mais seulement parallèles entre elles. On s'en assurera aisément en faisant faire à l'une des axes un tour dans son écrou et en vérifiant la distance à $\frac{1}{4}$, à $\frac{1}{2}$ et à $\frac{3}{4}$ de révolution. Si la distance se trouve la même à ces épreuves, alors cet axe est perpendiculaire *). Sinon, il faut corriger, ce qui se fait par quelques coups de poinçon frappés à droite ou à ganche de l'axe sur la règle, méthode dont se servent les faiseurs de balances pour placer le couteau précisément au milieu

*) Elle ne peut être rigoureusement la même; mais en prenant le pas de la vis à $\frac{1}{4}$ de ligne, la faute n'est pas $\frac{1}{2000}$ de pouce, erreur insensible à l'oeil nu.

du fléau; elle s'applique à toutes les corrections de ce genre. Si la distance des points supérieurs et inférieurs des axes est trop forte ou trop faible, alors on fera agir le poinçon à la face supérieure et inférieure de la règle et sur le même côté de l'axe.

Les supports *fhik* et *lnmk* se placeront avec la même exactitude si l'on fait les trous des vis *r* et *s* dans les branches *fh* et *ln* un peu allongés, de sorte que ces branches, et par là les supports entiers, puissent au besoin se mouvoir tant soit peu à coulisse le long de la règle et ensuite être fixés à demeure. Les vis *p* étant placées dans le support inférieur, on vérifie leur distance et position comme celle des axes et l'on exécute les corrections en faisant glisser le support. En retournant la règle on vérifiera de la même manière la distance et la position du sommet des cônes creux du support *fhik*.

On ne doit pas se lasser de ces vérifications et rectifications, quelque fastidieuses qu'elles puissent paraître, jusqu'à ce que l'on ait atteint le plus haut degré de justesse dans la fixation des droites *FO*, *ON*, *MN*, *MP*, *PO* de la II. Fig. pour le premier et le second pantographe, qui doivent toutes être égales entre elles; car si cette égalité a lieu pour les quatre dernières, l'on est sûr qu'elles forment un parallélogramme parfait.

Les *divisions* sur les règles *QR* et *MP* se font avec une machine à diviser telle que celle de Dorpat, qui a déja été citée, et ont toute l'exactitude désirée. Le problème principal est de fixer le point de zéro sur les règles elles mêmes; il doit correspondre aux pointes de l'axe *M*. Pour transporter en effet ce point *M* sur les règles, l'artiste se fera une équerre aussi juste que possible, dont l'angle droit ait parfaitement 90 degrés. L'une des deux catèthes est élevée au-dessus de l'autre, de sorte que lorsque l'inférieure est couchée sur la règle, par ex: *MP*, le bord inférieur de l'autre branche atteigne la pointe de l'axe de la charnière. Avant d'appliquer cette équerre, on placera les deux règles du pantographe à angles droits, position qui, au moyen du coup d'oeil de l'artiste, aidera à placer l'équerre avec toute la rigueur requise. Pour l'autre règle *QR*,

l'on aura soin, avant de percer les trous dans les supports, d'appliquer sur les centres de ces trous une autre règle, au moyen de laquelle on tire sur les supports des droites qui règleront l'emplacement de l'équerre qui, dans tous les cas, marque le zéro des divisions.

Chaque pantographe simple a trois *curseurs*, dont deux, *G* et *C* portent des verniers qui partagent l'unité de division en 10 parties égales. Sous les dimensions énoncées plus haut il est facile d'évaluer au coup-d'oeil la moitié de ces dixièmes, et l'on sera sûr de ne pas se tromper de $\frac{1}{32}$ de ligne. Le dessin indique suffisamment la construction des curseurs; le troisième *F* a, au lieu d'un vernier, une seule ligne droite qui doit congruer avec une ligne tirée sur la règle, telle que, lorsque la congruence a lieu, la pointe du style placé en *G* tombe exactement vis-à-vis du numero 380, ou le dernier trait de la division de l'échelle, qui au reste n'a nullement besoin d'être exécutée, ce dernier point seul étant suffisant.

Les masses de plomb avec leur tringle de laiton n'ont pas besoin d'explication. Les surfaces inférieures sont couvertes de drap et le reste enduit de vernis.

La branche *GP* et tout le petit pantographe se trouvent tant soit peu au dessus du grand. Les pieds de celui-là sont donc un peu plus hauts. Cela procure l'avantage de placer une planchette sous le crayon en *I*, sur la quelle se dessine le plan réduit.

Le porte-crayon est représenté de grandeur naturelle à la Fig. V. *AB* est un cylindre creux de laiton poli à l'intérieur et muni d'un rebord *K*. La partie *AB* sa place à demeure et à frottement dans le trou du coursier *G* ou dans celui qui est supposé en *I* (fig. II.) au petit pantographe. Dans ce tuyau s'en trouve un autre *CD* parfaitement alaisé dans le premier, mais sans aucun espace superflu, de sorte qu'il ne puisse vaciller, sans toutes fois exiger des efforts pour se mouvoir sur sa longueur. Ce tuyau *CD* est muni à sa partie supérieure d'un cône creux *G* avec le collet *Y*. A sa partie inférieure il est fendu sur la lon-

gueur *ae* pour recevoir le crayon, qui doit y entrer de force et de manière à ne pas broncher.

Entre le cylindre creux et le collet *Y* du cône *G* se trouve un double ressort spiral *EF* autour du tuyau, fixé par sa partie supérieure au collet du cône et par sa partie inférieure à une virole *H*, qui embrasse le tuyau et peut être fixée à diverses hauteurs au moyen de la vis d'arrêt *I*. La force des ressorts est telle qu'elle porte aisément la charge du crayon, de son tuyau et du cône vide. S'ils étaient un peu trop faibles, on les renforcerait en fixant la virole *H* un peu plus haut par sa vis d'arrêt.

En cet état la pointe du crayon ne touche pas le papier sur lequel elle doit dessiner. Pour l'y forcer on met dans le cône un poids de plomb proportionné à la dureté du crayon. On peut le renforcer par des rondelles de plomb qu'on lui ajoute; ce n'est qu'alors que le crayon fait son office. Mais comme souvent il faut le suspendre, afin de passer avec le style à d'autres points, sans qu'il y ait continuité entre eux et le dernier point dessiné, on soulève le poids, et alors les ressorts font remonter le crayon qui cessera de dessiner tant qu'il ne sera pas de nouveau pressé de haut en bas par les poids.

Pour opérer ce soulèvement le poids a une branche à laquelle on attache un fil de soie *dcba*, qui, en passant sur les poulies *U*, *U*, *N*, s'étend jusqu'au style de la longue règle du grand pantographe. *abcdeI* offre ce fil dans sa position naturelle, le crayon étant en activité. Si cette activité doit être suspendue, la main du dessinateur qui toujours est près de *F* (fig. II.) le tire et par là le poids, et le crayon remonte en même tems.

Les deux poulies supérieures sont dans une fourchette *ST*, qui ne permet pas au fil de sortir des gorges. Elle fait partie du levier *SQ*, dont le point d'appui *Q* est placé à charnière au haut du montant *OP*. Ce montant forme une seule pièce avec le bras à fourchette qui porte la poulie *N*. Ce montant tient par le petit bras *X* à la virole *A* qui embrasse le cylindre creux et par *O* à la virole inférieure *L*, qui repose sur le rebord *K*, la virole supérieure ne reposant que

sur le montant *PO* par le petit bras *X*. Ce mécanisme fait que le montant et tout ce qu'il porte peut se tourner très aisément autour du cylindre *AB*; ce qui s'effectue chaque fois qu'on tire le fil de soie pour enlever le poids du cône, lorsque le bras *OM* n'est pas précisément dirigé sur la ligne qui mène au style.

Le ressort *WV*, fixé au montant *PO* et au bras *OM*, presse le levier qui porte les poulies contre le prolongement *PR* du montant *OP*, et donne une position solide au levier.

Pour *tailler le crayon* on retire le tuyau *CD*, dans lequel il est fixé à demeure, hors du cylindre *AB*, avec le ressort et le cône ou entonnoir *G*. Pour cet effet on baisse préalablement le levier *QST* qui porte les poulies et enlève les poids; alors rien ne s'oppose à ce qu'on ne retire le tout pour placer le tuyau qui porte le crayon sur le tour. Si l'on considère les viroles *A* et *L* comme les poupées d'un tour et un cylindre creux comme *BA* placé et mobile dans ces viroles et armé d'une poulie sur son milieu, alors on aura l'idée du tour nécessaire. Au moyen d'un archet appliqué à la poulie, on fera tourner le tuyau qui porte le crayon et le crayon lui-même sur son axe dans le cône creux et l'ouvrier pourra appliquer aisément une lime douce au crayon pour tailler la pointe, qui se trouvera par là parfaitement dans son axe et par conséquent à sa vraie place.

Après cette description de notre pantographe il ne sera pas inutile d'évaluer les fautes auxquelles il peut être sujet. Il a été fait plus haut l'énumération de plusieurs défauts d'exactitude accidentels, qui peuvent affecter un pantographe, et prouvé que le pantographe qui vient d'être décrit n'y est pas assujetti. Il ne nous reste que les fautes qui peuvent résulter de la nécessité de négliger une fraction de partie de l'échelle lorsqu'on place les curseurs pour obtenir les proportions demandées. Voyons jusqu'où ces fautes peuvent aller.

On a vu plus haut que la longueur du côté du parallélogramme du grand pantographe est partagée par l'échelle et le vernier en 3800 parties égales et qu'on peut encore estimer avec sûreté une demie partie. C'est donc comme si l'on avait

7600 parties sur la longueur du côté du parallélogramme. Le petit, qui en nature n'a que $8\frac{1}{2}$ pouces sur la longueur du parallélogramme (dans le dessin il en a 10) en contiendra 3230. La plus grande faute qu'on a à craindre, si le dessinateur est attentif, est la négligence d'une de ces parties. Nous avons donc à chercher quelle erreur cela peut entraîner pour les extrêmes de réduction dans chaque pantographe et dans les deux pantographes réunis.

Ces extrêmes sont pour le grand pantographe les rapports $\frac{2}{7}$ et $\frac{1}{20}$ et pour le petit $\frac{2}{7}$ et $\frac{1}{13}$. Pour le premier rapport de réduction le nombre des parties contenues dans la longueur CM (fig. II.) sera de 3040 et pour le second rapport ce sera 400. Si donc on se trompe d'une partie ($\frac{1}{32}$ de ligne) dans la position du point C, la faute sera de $\frac{1}{3040}$ et $\frac{1}{400}$ du diamètre de la figure réduite ou $\frac{1}{3040} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{10640}$ et $\frac{1}{400} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{8000}$ de celui de la figure donnée. Sur le petit pantographe l'on aura pour OH, sous le rapport $\frac{2}{7}$, 1292 parties et sous le rapport $\frac{1}{13}$, 215 parties. Si donc l'on se trompe ici également d'une partie dans la position du point H, la faute sera de $\frac{1}{1292}$ et $\frac{1}{215}$ du diamètre de la figure réduite, ou $\frac{1}{1292} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{4522}$ et $\frac{1}{215} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{3223}$ de la figure donnée.

En supposant que les deux fautes s'additionnent dans l'emploi du double pantographe, la faute résultante, pour le rapport $\frac{2}{7}$ sera $\frac{1}{3040} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{1292} = \frac{1}{1132}$ de la figure réduite; et pour le rapport $\frac{1}{20}$ ce sera $\frac{1}{400 \cdot 13} + \frac{1}{215} = \frac{1}{208}$ de la figure réduite. Cette faute revient pour les deux cas à $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$ et à $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{13}$ ou à $\frac{1}{13923}$ et $\frac{1}{62400}$ du diamètre de la figure donnée, le premier cas étant le rapport de réduction $\frac{4}{49}$ et le second le rapport $\frac{1}{300}$.

Telles sont les fautes possibles aux extrêmes de réduction que comporte le pantographe double. Entre ces extrêmes les fautes seront proportionnées aux rapports de réduction. Quant aux erreurs qui peuvent provenir de la position du curseur G, elles seront plus petites que les précédentes, la ligne MG étant toujours plus grande que CM.

En s'en tenant aux fautes qui viennent d'être déterminées, l'on peut dire qu'un terrain de 15925 pieds ou 2654 toises de longueur, réduit par notre instrument

du plan donné à un plan dont la longueur ne sera que $\frac{4}{45}$ sera dessiné juste à un pied près. De même un terrain de 62400 pieds ou de plus de 10000 toises d'étendue dessiné sous une réduction de $\frac{1}{300}$ sera également juste à 1 pied près. Pour la carte de la Livonie, dont le rapport de réduction est $\frac{1}{33}$, la plus grande faute sera de 1 pied sur 25000 pieds. Si donc l'on suppose un terrain de 25000 pieds de longueur dessiné sur un plan de 3 pieds de longueur, la faute ne dépassera pas $\frac{1}{38}$ de ligne, erreur qu'on peut regarder comme nulle, puisqu'elle est moindre que la grosseur d'un trait de crayon ou de plume.

Si l'on ajoute à cette grande exactitude la facilité et la célérité avec laquelle on fait ces réductions, on jugera que le pantographe, construit comme cette description l'indique, est préférable à tous égards aux autres méthodes de réduction.

Enfin l'on pourrait faire la question s'il est plus avantageux de se servir du pantographe double, lorsqu'on peut atteindre le rapport demandé de réduction avec l'un des deux pantographes simples. Ce rapport étant par ex: $\frac{1}{18}$ on peut l'exécuter avec le grand pantographe simple, ou avec les deux, en le composant des rapports $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$. De quel côté sera la moindre faute ?

Soit a le nombre des parties égales qui font la longueur du côté du parallélogramme du grand pantographe, b le même nombre pour le petit pantographe. Soit le rapport de réduction pour celui-là $= \frac{1}{m}$ et pour celui-ci $= \frac{1}{n}$. Faisons de plus $MC = x$ et $HO = x_1$. On aura $x = \frac{a}{m-1}$ et $x_1 = \frac{b}{n-1}$. Les erreurs seront donc $\frac{m-1}{a}$ et $\frac{n-1}{b}$ du diamètre de la figure réduite et par conséquent $\frac{m-1}{a} \cdot \frac{1}{m} = \frac{m-1}{am}$, de même $\frac{n-1}{b} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n-1}{bn}$ de la figure donnée.

Pour les deux pantographes réunis l'on aura pour erreur $\frac{m-1}{am} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{bn}$ et le rapport de réduction est $\frac{1}{mn}$. Si l'on exécute ce même rapport avec le premier pantographe seul, on aura $mn = m$, et l'erreur qui a été ex-

primée par $\frac{m-1}{am}$ deviendra $=\frac{mn-1}{amn}$. L'erreur des deux pantographes est, comme on vient de la voir $=\frac{m-1}{amn}+\frac{n-1}{bn}$; et il s'agit de savoir si elle est plus grande ou plus petite que $\frac{mn-1}{amn}$. La première des deux peut s'exprimer par $\frac{m-1}{amn}+\frac{nm-m}{bnm}$. Si l'on suppose $b=a$, alors on a $\frac{m-1}{amn}+\frac{nm-m}{amn}=\frac{mn-1}{amn}$. Ainsi, si les deux pantographes sont égaux, l'on ne gagne ni ne perd en exactitude. Mais si b est plus petit que a, alors $\frac{m-1}{amn}+\frac{nm-m}{bnm}$ est évidemment plus grand que lorsque $b=a$. Ainsi l'erreur est moindre si l'on se sert du pantographe simple, lorsque cela est possible. Cette considération a motivé la grandeur plus qu'ordinaire de notre premier pantographe, afin d'avoir une latitude considérable dans le choix des rapports de réduction.

NOTE
SUR UNE INTÉGRALE
QUI SE RENCONTRE
DANS LE CALCUL DE L'ATTRACTION DES SPHÉROÏDES.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu à l'Académie le 2. Juillet 1828.)

I. Concevons un sphéroïde terminé par une surface quelconque, et prenons dans l'espace un point à volonté. Désignons par M ce point, par a, b, c, ses coordonnées, par x, y, z, les coordonnées variables de chaque molécule du sphéroïde. Toutes ces coordonnées sont rapportées, à trois axes rectangulaires qui ce coupent en un point.

Supposons que l'on ait concentré, au point M, une masse égale à l'unité, et cherchons l'attraction du sphéroïde sur cette masse; pour cela concevons une molécule m dans l'intérieur du sphéroïde et apellons ρ la densité et ω le volume de cette molécule.

L'attraction de la molécule m sur le point M sera proportionnelle à

$$\frac{\rho\,\omega}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

et elle sera égale à

$$\frac{k\,\rho\,\omega}{(x-a)^2+(y-b^2+(z-c)^2}$$

en désignant par k l'attraction qu'exercerait sur M une molécule distante de l'unité de ce point et ayant l'unité de masse.

L'attraction de la molécule m, sur la masse M, décomposée suivant les axes coordonnées donnera

$$\frac{k\,(x-a)\,\rho\omega}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{k\,(y-b)\,\rho\,\omega}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{k\,(z-c)\,\rho\omega}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

et l'attraction du sphéroïde entier, décomposé suivant les mêmes axes sera

$$(1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{k\,(x-a)\,\rho\,\omega}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \displaystyle\int \frac{k\,(y-b)\,\rho\,\omega}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \displaystyle\int \frac{k\,(z-c)\,\rho\,\omega}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Or on peut deduire ces trois intégrales de la somme

$$\int \frac{k\,\rho\,\omega}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

en la différentiant relativement aux quantités a, b, c; de sorte qu'en supposant

$$U=\int \frac{k\,\rho\,\omega}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

la première des intégrales (1) sera exprimée par $\frac{dV}{da}$, la seconde par $\frac{dV}{db}$ et la troisième par $\frac{dV}{dc}$; cette remarque est due à LAGRANGE. LAPLACE a ensuite observé que la fonction. V vérifiait l'équation

$$(2)\qquad \frac{d^2U}{da^2}+\frac{d^2U}{db^2}+\frac{d^2U}{dc^2}=0$$

depuis on a reconnu que la remarque de LAPLACE ne s'appliquait qu'au cas où le point se trouverait au dehors du sphéroïde; dans le cas contraire, c'est-à-dire

lorsque le point est placé au dedans ou à la surface du sphéroïde, elle cesse d'avoir lieu, et doit être dans le cas où le point se trouve au dedans du sphéroïde remplacée par

(3) $$\frac{d^2 U}{d a^2} + \frac{d^2 U}{d b^2} + \frac{d^2 U}{d c^2} = -4 k \pi \varrho_0 .$$

et par

(4) $$\frac{d^2 U}{d a^2} + \frac{d^2 U}{d b^2} + \frac{d^2 U}{d c^2} = -2 k \pi \varrho_0$$

si le point M se trouve sur la surface du sphéroïde.

La quantité ϱ_0 désigne ce que devient ϱ lorsque on y met a, b, c, respectivement à la place de x, y, z, et par conséquent elle désigne la densité du sphéroïde au point M; quant à la quantité 2π elle représente la circonférence dont le rayon est égal à l'unité.

C'est M. Poisson qui a trouvé les équations (3) et (4), de mon côté j'ai trouvé l'équation (3) sans connaître la remarque de M. Poisson que j'ai vue depuis dans le Bulletin des sciences, quand à lé'quation (4) j'ignore, encore maintenant comment l'illustre géomètre que je viens de citer y est parvenu.

Quoique il puisse paraître que la question relativement à l'équation différentielle à laquelle la quantité V doit satisfaire, soit entièrement épuisée, cependant il n'en est pas ainsi; car il existe sur la surface du sphéroïde, certain $\int$ points et certaines courbes pour lesquelles l'équation (4) n'a pas lieu.

L'objet de cette note est, d'indiquer comment l'on doit remplacer l'équation (4) lorsqu'elle cesse de subsister.

II. Nous allons d'abord établir quelques théorèmes relativement à la différentiation sous le signe $\int$. Pour cela considérons l'intégrale triple

(5) $$\int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} \mathrm{f} \cdot (x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

dans laquelle $f\cdot(x, y, z,)$ est une fonction de x, y, z; Z et z_0 sont deux fonctions finies et continues de x et de y; Y et y_0 deux fonctions finies et continues de x, et enfin X et x_0 sont deux quantités constantes.

Cela posé, désignons par V l'intégrale (5), en sorte que l'on ait

$$V = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} f\cdot(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Si l'on voulait différentier la fonction V, par rapport à une quantité a, qui serait renfermée dans $f\cdot(x, y, z)$ et qui ne varierait pas avec x, y, z, il suffirait, en admettant que ni Z et z_0 ni Y et y_0 ne renferment pas la quantité a, de différentier par rapport à cette quantité la fonction $f\cdot(x, y, z,)$ sous le signe $\int$. Ce procédé, que l'on doit à LEIBNITZ, suppose que la quantité a tombe hors des limites x_0 et X, ou que, a étant renfermé entre les limites x_0 et X, la fonction $f\cdot(x, y, z)$ reste finie et continue pour toutes les valeurs de z et de y renfermées entre les limites des intégrations par rapport à ces quantités, et pour la valeur $x = a$. Mais si la fonction $f\cdot(x, y, z)$ devenait infinie, pour $x = a$ et pour une ou plusieurs valeurs de y et de z renfermées entre les limites des intégrations, le théorème de LEIBNITZ pourrait se trouver en défaut.

Supposons que la fonction $f\cdot(x, y, z)$ devienne infinie, lorsque on y fait à la fois ou successivement $z = c$, $y = b$, $x = a$, et que les quantités a, b, c satisfassent aux inégalités

$x_0 < a < X$

$y_0 < b < Y$ dans le voisinage de $x = a$

$z_0 < c < Z$ dans le voisinage de $x = a$, $y = b$;

dans ce cas, pour avoir la valeur de $\frac{dV}{da}$, il ne serait pas toujours permis de différentier simplement sous le signe $\int$ par rapport à la quantité a, car la différentielle $\frac{dV}{da}$ pourrait dépendre de la définition qu'on aura donnée à l'intégrale

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \mathrm{f}\cdot(x,y,z)\, dz\, dy\, dx.$$

Nous définirons cette intégrale en disant qu'elle est égale à la limite vers laquelle converge l'expression

$$\int_{x_0}^{a-\varepsilon}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \mathrm{f}\cdot(x,y,z)\, dz\, dy\, dx + \int_{a+\varepsilon}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \mathrm{f}\cdot(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

à mesure que la quantité ε converge vers zéro. On aura alors

$$V = \int_{x_0}^{a-\varepsilon}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \mathrm{f}\cdot(x,y,z)\, dz\, dy\, dx + \int_{a-\varepsilon}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \mathrm{f}\cdot(x,y,z)\, dz\, dy\, dx\,.$$

on doit faire $\varepsilon = o$ après les intégrations.

En différentiant la formule qui précède, par rapport à la quantité a, on trouvera

$$\frac{dV}{da} = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \frac{d\cdot\mathrm{f}\cdot(x,y,z)}{da}\, dz dy dx - \int_{y'_0}^{Y'}\int_{z'_0}^{Z'} [\mathrm{f}\cdot(a+\varepsilon, y, z) - \mathrm{f}\cdot(a-\varepsilon, y, z)]\, dz\, dy.$$

y'_0, Y', z'_0, Z' sont respectivement les valeurs de y_0, Y, z_0, Z pour $x = a$.

Supposons

$$\Delta = \int_{y'_0}^{Y'}\int_{z'_0}^{Z'} [\mathrm{f}\cdot(a+\varepsilon, y, z) - \mathrm{f}\cdot(a-\varepsilon, y, z)]\, dz\, dy,$$

on aura

$$(6) \qquad \frac{dV}{da} = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \frac{d\cdot\mathrm{f}\cdot(x,y,z)}{da}\, dz\, dy\, dx - \Delta\,.$$

Pour trouver la quantité Δ, il suffit d'intégrer, par rapport à z, entre les limites très rapprochées de c et, par rapport à y, entre les limites très rapprochées de b. Nous avons fait voir ailleurs que ces limites sont le plus souvent

$c - \varepsilon^n$, $c + \varepsilon^n$ relativement à z, et $b - \varepsilon^n$, $b + \varepsilon^n$ relativement à y; n étant une quantité inférieure à $\frac{1}{3}$; cela posé, on aura

$$\Delta = \int_{b-\varepsilon^n}^{b+\varepsilon^n} \int_{c-\varepsilon^n}^{c+\varepsilon^n} [\mathrm{f}\cdot(a+\varepsilon, y, z) - \mathrm{f}\cdot(a-\varepsilon, y, z)]\, dz\, dy$$

Supposons $y = b + \varepsilon y$ $z = c + \varepsilon z$, nous aurons

$$\Delta = \int_{-\varepsilon^{n-1}}^{+\varepsilon^{n-1}} \int_{-\varepsilon^{n-1}}^{+\varepsilon^{n-1}} [\mathrm{f}\cdot(a+\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z) - \mathrm{f}\cdot(a-\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z)]\, \varepsilon^2\, dz\, dy$$

où l'on doit faire $\varepsilon = o$ après l'intégration.

La dernière expression de Δ revient à la suivante

$$(7)\quad \Delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathrm{f}\cdot(a+\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z) - \mathrm{f}\cdot(a-\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z)]\, \varepsilon^2 dz\, dy,$$

dans laquelle on peut négliger, avant l'intégration, tout ce qui disparaît avec ε; car εy et εz restent infiniment petits entre les limites de l'intégration.

Appliquons ce résultat à la première des intégrales (1), savoir à l'intégrale

$$\int \frac{k\ (x-a)\ \rho\omega}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

dans laquelle le signe $\int$ indique la somme relativement à toutes les molécules du sphéroïde.

Or, en désignant, pour plus de commodité, ρ par $F\,(x, y, z)$, et supposant que le sphéroïde soit terminé par deux plans perpendiculaires à l'axe des x, deux surfaces cylindriques perpendiculaires au plan des xy et deux surfaces courbes; dont les équations soient respectivement

$$x = x_0,\ x = X,\ y = y_0,\ y = Y,\ z = z_0,\ z = Z.$$

La somme précédente peut s'exprimer au moyen de l'intégrale triple

$$\int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} \frac{k\ (x-a)\ F\,(x, y, z)\ dz\, dy\, dx}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{dU}{da}.$$

Pour avoir la différentielle $\frac{d^2 U}{d a^2}$, il n'y a qu' à faire dans l'équation (6)

$$f\cdot(x, y, z) = \frac{k\ (x-a)\ F(x\ .\ y, z)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

et déterminer Δ par l'équation (7); laquelle nous donne

$$\frac{d^2U}{d a^2} = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \left\{ \frac{3\ (x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} kF(x,y,z) dz dy dx - \Delta$$

$$\Delta = k \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(a+\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z) + F(a-\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z)}{(1+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz dy.$$

Or, puisque la densité $F(x, y, z)$ du sphéroïde est une fonction finie et continue, on pourra négliger ε, εy, εz respectivement vis-à-vis a, b, c et l'on aura

$$\Delta = 2kF(a, b, c) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz\, dy}{(1+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Supposons $z = \nu \cos. p$, $y = \nu \sin. p$ nous aurons

$$\Delta = 2k\ F(a, b, c) \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{\nu\, d\nu\, dp}{(1+\nu^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et en exécutant les intégrations indiquées,

$$\Delta = 4k\pi F(a, b, c) = 4k\pi \varrho_0;$$

ϱ_0 désignant la densité au point M.

Donc enfin

$$\frac{d^2U}{d a^2} = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \left\{ \frac{3\ (x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} k\varrho dz dy dx - 4k\pi\varrho_0,$$

on trouvera aussi

$$\frac{d^2U}{d b^2} = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \left\{ \frac{3\ (y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} k\varrho\, dz\, dy\, dx,$$

$$\frac{d^2U}{d c^2} = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \left\{ \frac{3\ (z-c)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} k\varrho\, dz\, dy\, dx.$$

En ajoutant les trois dernières équations ensemble on aura

$$\frac{d^2 U}{d\,a^2}+\frac{d^2 U}{d\,b^2}+\frac{d^2 U}{d\,c^2}=-4\,k\,\pi\,\rho_0\,;$$

c'est l'équation (3) de l'article précédent. M. POISSON l'avait trouvée avant moi.

III. Supposons maintenant que les quantités a, b, c satisfassent aux inégalités

$x_0 < a = X$

$y_0 < b < Y$ dans le voisinage de $x=a$

$z_0 < c < Z$ dans le voisinage de $x=a$, $y=b$,

dans ce cas, pour déterminer la différentielle $\frac{dV}{da}$, on partira de l'équation

$$V=\int_{x_0}^{a-\varepsilon}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} \text{f}\cdot(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

ε étant une quantité infiniment petite. En différentiant l'équation qui précède par rapport à la quantité a, on trouvera

$$(8)\quad \frac{dV}{da}=\int_{x_0}^{a-\varepsilon}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\frac{d\,\text{f}\cdot(x,y,z)}{d\,a}\,dz\,dy\,dx+\int_{y'_0}^{Y'}\int_{z'_0}^{Z'}\text{f}\cdot(a-\varepsilon,\, y,\, z)\,dz\,dy\,.$$

Si l'on avait supposé que les quantités a, b, c satisfissent aux inégalités

$x_0 = a < X$

$y_0 < b < Y$ dans le voisinage de $x=a$

$z_0 < c < Z$ dans le voisinage de $x=a$, $y=b$

on aurait trouvé

$$(9)\quad \frac{dV}{da}=\int_{a-\varepsilon}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\frac{d\,\text{f}\cdot(x,y,z)}{d\,a}\,dz\,dy\,dx-\int_{y'_0}^{Y'}\int_{z'_0}^{Z'}\text{f}\cdot(a+\varepsilon,\, y,\, z)\,dz\,dy\,.$$

Supposons comme dans l'article précédent

$$\text{f}\cdot(x, y, z)=\frac{k\,(x-a)\,F\,(x, y, z)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}\,,$$

l'équation (8) donnera

$$\frac{d^2V}{d\,a^2}=\int_{x_0}^{a-\varepsilon}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\frac{d\cdot\frac{k\,(x-a)\,F\,(x,\, y,\, z)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}}{d\,a}\,dz\,dy\,dx-k\int_{y'_0}^{Y'}\int_{z'_0}^{Z'}\frac{\varepsilon\,F\,(a-\varepsilon,\, y,\, z)\,dz\,dy}{[\varepsilon^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Quoique, par hypothèse, y'_0 et Y' diffèrent sensiblement de b, et z'_0 et Z' diffèrent sensiblement de c; mais à cause de la quantité infiniment petite ε, qui

multiplie la fonction sous le signe $\int$, on peut se contenter d'intégrer entre les limites trés rapprochées de c par rapport à z, et entre les limites trés rapprochées de b par rapport à y, de cette manière on peut remplacer la dernière intégrale de l'expression $\frac{d^2 U}{d a^2}$ par la suivante

$$k \int_{b-\varepsilon^n}^{b+\varepsilon^n} \int_{c-\varepsilon^n}^{c+\varepsilon^n} \frac{\varepsilon F(a-\varepsilon, y, z) \, dz \, dy}{[\varepsilon^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

n étant inférieur à $\frac{1}{3}$.

Or nous avons trouvé cette intégrale dans l'article précédent, sa valeur est $2k\pi\rho_0$, on aura donc

$$\frac{d^2U}{da^2} = \int_{x_0}^{a-\varepsilon} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} d \cdot \frac{k(x-a) F(x, y, z)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} dz dy dx - 2k\pi\rho_0;$$

on trouvera la même valeur de $\frac{d^2 V}{d a^2}$ en partant de l'équation (9), en sorte qu'on aura dans le cas $x_0 = a$, comme dans le cas $X = a$

$$\frac{d^2 U}{da^2} + \frac{d^2 U}{d b^2} + \frac{d^2 U}{d c^2} = -2k\pi\rho_0.$$

Cette équation subsisterait également dans le cas où le point M se trouverait sur une des surfaces cylindriques

$$y = y_0, \quad y = Y,$$

ou sur une des surfaces courbes

$$z = z_0, \quad z = Z.$$

IV. Supposons que le point M se trouve sur la surface cylindrique $y = Y$, c'est-à-dire qu'on ait

$x_0 < a < X$

$y_0 < b = Y$ dans le voisinage de $x = a$; l'équation $b = Y$ a lieu pour $x = a$

$z_0 < c < Z$ dans le voisinage de $x = a$, $y = b$,

comme la quantité Y est une fonction de x nous la représenterons par $\varphi(x)$, et nous aurons

$$V = \int_{x_0}^{a-\varepsilon} \int_{y_0}^{\varphi(x)} \int_{z_0}^{Z} \mathrm{f}\cdot(x, y, z)\, dz\, dy\, dx + \int_{a+\varepsilon}^{X} \int_{y_0}^{\varphi(x)} \int_{z_0}^{Z} \mathrm{f}\cdot(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$\varphi(a) = b$$

en différentiant V par rapport à la quantité a, on aura

$$(10) \qquad \frac{dV}{da} = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} \frac{d\,.\,\mathrm{f}\,.\,(x, y, z)}{da}\, dz\, dy\, dx - \Delta$$

$$\Delta = \int_{y'_0}^{\varphi(a+\varepsilon)} \int_{z'_0}^{Z'} \mathrm{f}\cdot(a+\varepsilon, y, z)\, dz\, dy - \int_{y'_0}^{\varphi(a-\varepsilon)} \int_{z'_0}^{Z'} \mathrm{f}\cdot(a-\varepsilon, y, z)\, dz\, dy\,.$$

y'_0, z'_0, Z' désignent, comme plus haut, ce que deviennent y_0, z_0, Z quand on y met a à la place de x. On peut donner à la quantité Δ la forme suivante

$$\Delta = \int_{y'_0}^{b} \int_{z'_0}^{Z'} [\mathrm{f}\cdot(a+\varepsilon, y, z) - \mathrm{f}\cdot(a-\varepsilon, y, z)]\, dz\, dy$$

$$+ \int_{b}^{\varphi(a+\varepsilon)} \int_{z'_0}^{Z'} \mathrm{f}\cdot(a+\varepsilon, y, z)\, dz\, dy - \int_{b}^{\varphi(a-\varepsilon)} \int_{z'_0}^{Z'} \mathrm{f}\cdot(a-\varepsilon, y, z)\, dz\, dy$$

dans la première intégrale de cette expression de la quantité Δ, on peut mettre $b-\varepsilon^n$, $c-\varepsilon^n$, $c+\varepsilon^n$ respectivement à la place de y'_0, z'_0, Z', et parsuite réduire cette intégrale à

$$\int_{-\infty}^{o} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathrm{f}\cdot(a+\varepsilon,\ b+\varepsilon y,\ c+\varepsilon z) - \mathrm{f}\cdot(a-\varepsilon,\ b+\varepsilon y,\ c+\varepsilon z)]\ \varepsilon^2 dz\, dy$$

quant à la seconde intégrale, on la réduira d'abord à

$$\int_{o}^{\frac{\varphi(a+\varepsilon)-\varphi(a)}{\varepsilon}} \int_{-\frac{b-z'_0}{\varepsilon}}^{\frac{Z'-b}{\varepsilon}} (\mathrm{f}\cdot a+\varepsilon,\ b+\varepsilon y,\ c+\varepsilon z)\ \varepsilon^2 dz\, dy$$

$$+ \int_{o}^{\frac{\varphi(a)-\varphi(a-\varepsilon)}{\varepsilon}} \int_{-\frac{b-z'_0}{\varepsilon}}^{\frac{Z'-b}{\varepsilon}} \mathrm{f}\cdot(a-\varepsilon,\ b-\varepsilon y,\ c+\varepsilon z)\ \varepsilon^2 dz\, dy$$

puis, faisant converger ε vers zéro, cette intégrale deviendra

$$\int_{o}^{\varphi'(a)} \int_{-\infty}^{+\infty} [f \cdot (a+\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z) + f \cdot (a-\varepsilon, b-\varepsilon y, c+\varepsilon z)] \, \varepsilon^2 dz \, dy,$$

donc on aura

$$(11) \quad \Delta = \int_{-\infty}^{o} \int_{-\infty}^{+\infty} [f \cdot (a+\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z) - f \cdot (a-\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z)] \, \varepsilon^2 dz dy$$

$$+ \int_{o}^{\frac{dY'}{da}} \int_{-\infty}^{+\infty} [f \cdot (a+\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z) + f \cdot (a-\varepsilon, b-\varepsilon y, c+\varepsilon z)] \, \varepsilon^2 dz dy.$$

Si le point M se trouvait sur la surface cylindrique $y = y_0$ on aurait trouvé

$$(12) \qquad \frac{dV}{da} = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} \frac{d f \cdot (x, y, z)}{da} - \Delta$$

$$(13) \quad \Delta = \int_{o}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [f \cdot (a+\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z) - f \cdot (a-\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z)] \, \varepsilon^2 dz \, dy$$

$$- \int_{o}^{\frac{dy_0}{da}} \int_{-\infty}^{+\infty} [f \cdot (a+\varepsilon, b+\varepsilon y, c+\varepsilon z) + f \cdot (a-\varepsilon, b-\varepsilon y, c+\varepsilon z)] \, \varepsilon^2 dz \, dy.$$

Supposons:

$$f \cdot (x, y, z) = \frac{k \, (x-a) \, F \, (x, y, z)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

on trouvera, d'après les formules (12) et (13),

$$\frac{d^2 U}{d a^2} = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} \frac{d \cdot \dfrac{k \, (x-a) \, F \, (x, y, z)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}}{da} \, dz \, dy \, dx - \Delta$$

$$\Delta = k \int_{o}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(a+\varepsilon, \, b+\varepsilon y, \, c+\varepsilon z) + F\,(a-\varepsilon, \, b+\varepsilon y, \, c+\varepsilon z)}{(1+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \, dz \, dy$$

d'où, en intégrant,

$$\Delta = 2 k \pi F \, (a, b, c) = 2 k \pi \rho_0 ,$$

ainsi

$$\frac{d^2 U}{d a^2} = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} \frac{d \, \dfrac{k \, (x-a) \, F \, (x, y, z)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot dz \, dy \, dx}{da} - 2 k \pi \rho_0 .$$

On trouverait la même valeur pour $\frac{d^2V}{da^2}$ en se servant des équations (10) et (11); quant aux quantités $\frac{d^2V}{db^2}$, $\frac{d^2V}{dc^2}$, on les obtiendra par la simple différentiation sous le signe $\int$, en sorte que l'on aura

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=-2k\pi\rho_0.$$

Nous avons supposé que le point M se trouvait sur une des surfaces cylindriques

$$y=y_0\quad y=Y,$$

l'équation précédente serait encore vraie, et on la démontrerait de la même manière, en supposant que le point M soit situé sur une des surfaces courbes

$$z=z_0,\quad z=Z.$$

V. Examinons maintenant ce qui arrivera quand le point M sera situé sur une des douze intersections des surfaces qui terminent le sphéroïde; supposons par exemple que le point se trouve sur l'intersection du plan

$$x=x_0$$

et de la surface cylindrique

$$y=y_0,$$

on aura alors $x'_0=a$, $y'_0=b$, y'_0 étant la valeur de y_0 pour $x=a$.

Cela posé, désignons, comme plus haut, par $\varphi(x)$ la fonction y_0, et prenons l'équation

$$V=\int_{a+\varepsilon}^{X}\int_{\varphi(x)}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\mathrm{f}\cdot(x,y,z)\,dz\,dy\,dx,$$

en la différentiant par rapport à la quantité a, on aura

$$(14)\qquad \frac{dV}{da}=\int_{a+\varepsilon}^{X}\int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z}\frac{d\,\mathrm{f}\cdot(x,y,z)}{da}\,dz\,dy\,dx-\Delta$$

$$(15)\qquad \Delta=\int_{\varphi(a+\varepsilon)}^{Y'}\int_{z'_0}^{Z'}\mathrm{f}\cdot(a+\varepsilon,y,z)\,dz\,dy.$$

Supposons

$$\mathrm{f}(x,y,z)=\frac{k(x-a)F(x,y,z)}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

nous aurons

$$\frac{d^2 U}{d a^2} = \int_{a-\varepsilon}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} \frac{d \cdot \dfrac{k(x-a) F(x,y,z)\, dz\, dy\, dx}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}}{da} - \Delta,$$

$$\Delta = \int_{\varphi(a+\varepsilon)}^{Y'} \int_{z'_0}^{Z'} \frac{k\varepsilon F(a+\varepsilon, y, z)\, dz\, dy}{[\varepsilon^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

En observant que Y', z'_0, Z' peuvent être remplacés respectivement par $b+\varepsilon^n$, $c-\varepsilon^n$, $c+\varepsilon^n$, n étant positif et inférieur à $\frac{1}{3}$, on supposera

$$y = b + \varepsilon y, \quad z = c + \varepsilon z,$$

et l'on trouvera

$$\Delta = k F(a, b, c) \int_{\frac{dy'_0}{da}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz\, dy}{(1+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, on a

$$\frac{1}{(1+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-(1+y^2+z^2)x}\, dx$$

donc

$$\int_{\frac{dy'_0}{da}}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz\, dy}{(1+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{dy'_0}{da}}^{+\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-(1+y^2+z^2)x}\, dz\, dx\, dy$$

$$= 2 \int_{\frac{dy'_0}{da}}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{-(1+y^2)x}\, dx = \pi - 2 \text{ arc tang. } \frac{dy'}{da}.$$

arc tang. $\frac{dy'}{da}$ désigne le plus petit arc dont la tangente trigonométrique est $\frac{dy'_0}{da}$; cet arc est toujours compris entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Ainsi on aura

$$\Delta = 2k\rho_0 \left(\frac{\pi}{2} \text{ arc tang. } \frac{dy'_0}{da}\right),$$

et par suite on trouvera l'équation

(16) $$\frac{d^2 U}{d a^2} + \frac{d^2 U}{d b^2} + \frac{d^2 U}{d c^2} = -2k\rho_0 \left(\frac{\pi}{2} \text{ arc tang. } \frac{dy'_0}{da}\right)$$

*

qui n'était pas encore connue. $\frac{\pi}{2}$ — arc tang. $\frac{dy'_0}{da}$ est evidemment l'angle que la surface cylindrique $y = y_0$ fait avec le plan $x = x_0 = a$; si donc le point M était placé sur l'intersection de deux surfaces cylindriques verticales, la somme des trois différentielles $\frac{d^2U}{da^2}$, $\frac{d^2U}{db^2}$, $\frac{d^2U}{dc^2}$ serait égale à la quantité $2k\varrho_0$ multipliée par l'angle de deux surfaces; en appellant ω cet angle on aurait

$$(17) \qquad \frac{d^2U}{da^2} + \frac{d^2U}{db^2} + \frac{d^2U}{dc^2} = -2k\varrho_0\omega .$$

Concevons un plan perpendiculaire aux arêtes de deux surfaces; si le point M se trouve placé au point d'intersection de ces trois surfaces l'équation (17) doit être remplacée par la suivante

$$(18) \qquad \frac{d^2U}{da^2} + \frac{d^2U}{db^2} + \frac{d^2U}{dc^2} = -k\varrho_0\omega .$$

Nous nous dispensons de considérer ce que devient la somme des trois différentielles $\frac{d^2U}{da^2}$, $\frac{d^2U}{db^2}$, $\frac{d^2U}{dc^2}$ lorsqu'on suppose que le point M soit sur l'intersection des surfaces, $z = Z$, $y = Y$, car le calcul qu'il faut faire pour y parvenir est analogue à celui que nous avons déjà exécuté et, une fois indiqué, il ne présente plus aucune difficulté.

En général, on pourra facilement trouver, dans chaque cas particulier, comment il faudrait modifier la somme

$$\frac{d^2U}{da^2} + \frac{d^2U}{db^2} + \frac{d^2U}{dc^2},$$

pour qu'elle convienne au cas que l'on considère. Ainsi, si l'on voulait savoir ce que deviendrait cette somme, si le point M était situé dans un angle d'un parallélépipède rectangulaire, par exemple dans l'angle ayant pour coordonnées x_0, y_0, z_0, alors en observant d'abord que $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$, on prendrait ensuite la formule

$$\frac{dU}{da} = \int_{a+\varepsilon}^{X} \int_{b}^{Y} \int_{c}^{Z} \frac{\lambda(x-a)F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

laquelle donnerait par la différentiation

$$\frac{d^2U}{da^2} = \int_{a+\varepsilon}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} \frac{d.\frac{\lambda(x-a)F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}}{da} - k\int_{b}^{Y}\int_{c}^{Z} \frac{\varepsilon F(a+\varepsilon,y,z)\,dz\,dy}{[\varepsilon^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

la valeur de la dernière intégrale étant $-\frac{\lambda\pi\rho_0}{2}$, on aura

$$\frac{d^2U}{da^2} = \int_{a+\varepsilon}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} \frac{d.\frac{k\,(x-a)\,F.\,(x,y,z)\,dz\,dy\,dx}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c]^{\frac{3}{2}}}}{da} - \frac{\lambda\pi\rho_0}{2},$$

quant aux valeurs $\frac{d^2U}{db^2}$, $\frac{d^2U}{dc^2}$, on les obtiendra par la simple différentiation sous les signes $\int$ des intégrales

$$\frac{dU}{db} = \int_{a+\varepsilon}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} \frac{\lambda\,(y-b)\,F\,(x,y,z)\,dz\,dy\,dx}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dU}{da} = \int_{a+\varepsilon}^{X} \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} \frac{\lambda\,(z-c)\,F\,(x,y,z)\,dz\,dy\,dx}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

ce qui nous donnera l'équation

$$\frac{d^2U}{da^2}+\frac{d^2U}{db^2}+\frac{d^2U}{dc^2} = -\frac{\lambda\pi\rho_0}{2}$$

qui s'accorde avec l'équation (18); car dans le cas du parallélépipède rectangulaire on y doit supposer $\omega = \frac{\pi}{2}$.

GRAMINUM GENERA

QUAEDAM

SPECIESQUE COMPLURES DEFINITIONIBUS NOVIS

ILLUSTRAVIT

C. B. TRINIUS.

(Conventui exhib. die 2. Septembris 1829.)

Gramina hucusque secundum tribus a communi quadam forma repetita disponere conatus, neque id invita natura hujus plantarum familiae, ad unum et eundem ubique expressum characterem revocandae, institui a me veritus, copia tamen in dies crescente usu mihi videor edoctus esse, dispositionem ejusmodi non prius tentari posse, quam de comparatis omnium, quotquot inveniri potuerint, generum notis ac formis accurate constitisset. Itaque rectius nunc me facturum esse existimo, si omne hoc graminum disponendorum tentamen, minus feliciter ab aliis, vel recentioribus et eruditissimis susceptum, et naturae magis accomodandum, eo usque rejiciam, donec singularum, quotquot mihi innotuerint, specierum illustrationem absolverim; eamque ob rem, relicto quem hucusque in binis Dissertationibus secutus sum, ordine, graminum genera, quae restant, collatis potissimum iis quae majori inter se affinitate juncta sunt, examinare, definire, speciebus illustrare, actisque academicis nostris deinceps inserere, constitui.

1. Aira.

Panicula. Spiculae biflorae, flosculis convexis. *Rachis calli*que pl. min. pilosi. *Perianthium* dorso apiceve armatum. *Semen* oblongo-cylindraceum, eberbe, exsulcum, adnatum.

Generis, charactere essentiali satis circumscripti, species aliae substantiam glumarum et perianthii aequalem (herbaceo-membranaceam), aliae perianthii substantiam glumis firmiorem habent. Quae floralis materiae ubertas quamvis progredientem floris evolutionem indicet, qualem proprie in graminibus generici characteris esse alibi contendimus, tamen in Airis, arctissimo inter se vinculo junctis, gradus potius seu subdivisiones exinde nasci quam genera propria distingui existimamus. — Ceterum *Airam* cum *Avena* non confundi posse, vel e sola seminis, in *Avena* teretis, barbati, sulcati, liberi, natura cognoscitur.

a) Glumarum perianthiique substantia aequalis, *Deschampsia*.

(Deschampsia *Pal.*)
(Avenae spp. *Pal. Mert.* et *Koch.*)
(Schismi spp. *Tr. Fund. Agr.*)

Aira flexuosa L. sp. pl. ed. 1. Glumis perianthia brevissime et irregulariter denticulata supra basin aristata aequantibus; Arista geniculata longe exserta; Foliis involutis.

Aira flexuosa. R. et S. II. p. 678.

Avena flexuosa. M. et K. Fl. Germ. 1. p. 570.

V. spp. Germ. Petrop. Lapp. Cauc. Sic. Am. bor.

Ludit statura; foliis majoribus atroviridibus; brevioribus, brevissimis; Spiculis trifloris (quale est gramen in Caucasi monte Kasbeck a cel. Parrot lectum); Panicula contracta:

Aira montana L. (qui in appendice ad sp. pl. ed. 2. montanam suam nil nisi flexuosae varietatem esse ipse affirmat). V. spp. Germ. Gall. Petrop. Norw. — a qua tandem non diversa

Aira uliginosa Weihe!

Aira caespitosa L. sp. pl. ed. 1. Glumis perianthia irregulariter s. eroso-denticulata supra basin aristata aequantibus; Arista setiformi, inclusa vel paulo exserta; Foliis planis.

Deschampsia caespitosa Pal. R. et S. II. p. 685. (excl. syn. Rothii et Koel.)

Aira altissima Moench.

V. spp. Germ. Ross. Am. bor. Aleut. Lapp.

Ludit et *variat* Spiculis linearibus, longioribus (ex Unalaschka).

Arista productiori (Ircut. Helv. var. *β. Gaud.*) haec var. esse potest floribus minoribus:

Aira parviflora Thuill. (Lithuan.)

panicula angustiori, elongata:

Aira bottnica Wahlenb.! R. et S. II. p. 679. sub *Aira montana;* cujus culta specimina prorsus induunt formam Airae caespitosae communis.

Foliis abbreviatis (Germ. Petrop. Lithuan.)

Spiculis 3 — 4-floris (Petrop.)

Statura humillima (Kamtsch. Fret. Kotzeb.)

Floribus viviparis: quam var., foliis abbreviatis, arista supra medium valvulae enata, rachi subnulla (*Aira alpina L.* cuj. v. spp. Lapp.) speciem esse vix concederem. Aristae enim exsertio eadem occurrit in quibusdam individuis Airae caespitosae communis, sicut et in *Aira media;* Folia subinvoluta eadem in speciminibus Airae caespit. communis humilioribus; Rachis autem subnulla cum ipso hujus varietatis alpinae nisu prolificandi intime conspirat.

Aira arctica. Glumis perianthia irregulariter dentata medio dorso aristata aequantibus; Arista setiformi valvulam aequante; Foliis compresso-involutis.

Deschampsia brevifolia Br. Melw. Isl.

V. sp. e Melwille Island.

Tri-quinque-pollicaris. Panicula coarctata, lanceolata. Descr. vid. apud Br. l. l. no. 64. — An mera varietas antecedentis?

Aira media Gouan. Glumis perianthia regulariter denticulata apice aciculata l. dorso brevi-setigera aequantibus; Seta inclusa; Foliis setaceo-involutis.

Deschampsia media R. et S. II, p. 687.

Aira juncea Vill. R. et S. ibid.

Aira pumila Vill! ined.

Schismus Villarsii Tr. Fund. Agr. p. 148.

V. spp. Gall. et cc. — Am. bor. occid.

Obs. Aira, quam sub nomine *Airae pumilae* ab ipso cl. VILLARS datam asservo, in eo differt, ut apicis perianthii dentes duo intermedii exterioribus minores sint, qui aut majores aut exterioribus aequales sunt in Aira media. Ceterum prorsus cum hac convenit, nec minimum dubito, eandem esse cum Aira, quam postea *junceam* dixit cl. VILLARS, etsi huic aristam, caducam, e basi valvulae exire asseruerit. Setam enim in *A. juncea culta* nunc supra nunc infra dorsi medium exeuntem observo; saepissime autem setam, legitime e basi enascentem, cum valvula ad apicem usque concretam videmus in graminibus compluribus.

Aira pulchella Willd. Glumis perianthia brevissime et irregulariter denticulata infra apicem brevi-setigera aequantibus; Foliis angustis, planiusculis.

Aira pulchella. R. et S. II. p. 682.

Avena pulchella Pal.

V. spp. Hisp. Calabr. Taur.

Facies *Avenulae.* Panicula contractiuscula, oblonga. Gramen tenerum, spitham.

Aira danthonioides. Glumis perianthia inaequaliter denticulata dorso aristata excedentibus; Arista geniculata glumis longiori; Foliis augustissimis.

V. spp. ex Am. bor. occid.

Gramen spithamaeum, caespitosum. Panicula mediam culmi longitudinem efficit, viridis, contracto-erecta. Spiculae antequam apertae sunt, lineares, fere tres lineas longae. Glumae lineari-lanceolatae, perianthiis quartam partem longiores, crassinerves.

Aira canescens L. sp. pl. ed. 1. Glumis perianthia integra supra basin aristata excedentibus; Arista inclusa, medio coronata, apice clavata; Foliis setaceis vel subinvolutis.

Corynephorus canescens Pal. R. et S. II. p. 688.

Avena canescens Web.

Weingärtneria canescens Bernh.

V. spp. Germ. Gall. Hisp. Neap. Cors.

β) Panicula ampliori, culmo saepe geniculato, foliis tantum subinvolutis;

Corynephorus articulatus Pal. R. et S. II. p. 689.

Aira articulata Desf.

Aira aetnensis Presl.!

V. spp. Lus. Pyren. Gall. Sic. Ting. cc.

b) Perianthiorum substantia glumis firmior, *Avenula.*

Aira caryophyllea L. sp. pl. ed. 1. Panicula patula vel patente; Glumis flosculis dimidio longioribus; Calli pilis brevissimis, racheos obsoletis; Perianthio altero l. utroque bisubulato, infra medium aristato.

Aira caryophyllea. R. et S. II. p. 681.

Variat

α) Flosculo utroque bisubulato et aristato:

Aira caryophyllea et *Aira truncata Salzm.! mss.*

V. spp. Germ. Gall. Ital. Taur. cc.

β) Flosculo utroque bisubulato, altero aristato.

V. spp. Germ. Cap. b. sp.

eadem, radiis capillaribus, est

Aira capillaris Salzm.! mss.

γ) Flosculo inferiore simpliciter acuto, superiore bisubulato et aristato:

Aira elegans Willd. R. et S. II. p. 682.

Aira capillaris Host.

Aira saxatilis Salzm.! mss.

Avena capillaris M. et K.

V. spp. Germ. Gall. Ital. Sic. Taur. Cauc. Cret.

δ) Flosculo utroque aristato: altero acuto, altero bisubulato.

V. spp. Iber.

Aira praecox L. sp. pl. ed. 1. Panicula thyrsiformi, lucidula (parva); Glumis flosculis paulo longioribus; Calli pilis brevissimis, racheos obsoletis; Perianthiis bisubulatis, infra medium aristatis.

Avena praecox Pal. R. et S. II. p. 667.

Avena pusilla Web.

V. spp. Angl. Germ. Helv. Philad. cc.

Aira atropurpurea Wahlenb.! Panicula patula; Glumis flosculis tertiam partem longioribus; Calli pilis flosculi medium superantibus, racheos, apice nudae, brevibus; Perianthiis strigoso-denticulatis, supra medium aristatis.

Aira atropurpurea. R. et S. II. p. 680.

Aira alpina Vahl. Fl. Dan.

V. spp. Lapp. Aleut. Sitk.

Panicula saturatius pallidiusve purpurascens.

---

2. Trisetum *Br.* pl. coll. in Melwille Isl.

Panicula (saepissime coarctata). *Spiculae* 2— pluriflorae, flosculis carinato-compressis. *Rachis calli*que plerumque pl. min. pilosi. *Perianthii*, ejusdem cum glumis substantiae, valvula inferior bidentata vel bisubulata, dorso aristata vel infra apicem setigera, (rarissime mutica). *Semen* pl. min. compressum, longe plerumque eberbe, exsulcum, liberum.

a) Perianthiis bisubulatis, aristis elongatis, *Acrospelion* Besser *in litt.*

Trisetum distichophyllum Pal. Panicula contractiuscula patulave; Glumis 2— 3-floris: superiori tertiam quartamve partem longiore; Pilis calli perianthio bi-

subulato supra medium aristato tertiam partem-, racheos eodem paulo brevioribus; Ovario nudo.

Trisetum distichophyllum. R. et S. II. p. 666.

Trisetum brevifolium. R. et S. ib. p. 665.

Avena distichophylla Vill.!

Avena brevifolia Host.

β) culmo tenuiori, spiculis minoribus:

Avena argentea Willd. en.

Avena sesquitertia Willd. sp. pl.

Trisetum argenteum R. et S. II. p. 665.

V. spp. alp. rhaet. nor.

Trisetum rigidum R. et S. II. p. 662. Panicula contractiuscula patulave; Glumis 2—4-floris; superiori tertiam dimidiamve partem longiore; Pilis calli brevissimis, racheos perianthium brevisubulatum infra apicem aristatum subaequantibus; Ovario nudo.

Avena rigida M. Bieb.! (*Av. sesquitertia* Fl. Taur. Cauc.).

Trisetum Wilhelmsii Ledeb. ap. R. et S. Mant. 1. p. 367.

Arundo Wilhelmsii Ledeb. in act. Petrop.

V. spp. Caucas.

Trisetum flavescens Pal. Panicula patula vel patente; Glumis 2—4-floris: superiori duplo longiore; Pilis calli brevissimis, racheos brevibus; Perianthiis bisubulatis, supra medium aristatis; Ovario nudo.

Trisetum flavescens. R. et S. II. p. 663.

Trisetum pratense Pers.

Trisetum splendens Presl.!

V. spp. Germ. Angl. Iber. Sic. Sib. Kamtsch.

Variat et *ludit* Flosculis basi nudis (Podol. Sib.); panicula rubella (Germ.); subthyrsode, rubra (Altaica specimina, quotcumque viderim, hujus formae).

Trisetum palustre. Panicula sublineari-contracta vel laxiuscula; Glumis bifloris, pl. min. inaequalibus; Callo pilosulo, rachi nudiuscula; Perianthio inferiori brevirostrato, superiori acuto infra apicem squarroso-aristato; Ovario nudo.

Aira pallens Mühlenb. R. et S. II. p. 683. Mant. 2. p. 378.

Avena palustris. R. et S. II. p. 673. Mant. 2. p. 373.

Avena caroliniana Walt.

V. spp. Virgin.

Trisetum alpestre Pal. Panicula contractiuscula patulave; Glumis 2—3-floris: superiori duplo longiore; Pilis calli brevissimis, racheos brevibus; Perianthiis bisubulatis, supra medium aristatis; Ovario pilosulo.

Trisetum alpestre. R. et S. II. p. 665.

Avena alpestris Host.

Avena purpurascens DeC.

V. spp. alp. Austr.

Trisetum antarcticum. Panicula contracta patulave; Glumis 2—3-floris: superiori tertiam partem longiore; Pilis calli brevissimis, racheos breviusculis; Perianthiis bidentato-acutis, infra apicem aristatis; Ovario nudo.

Aira antarctica Forst.!

Avena antarctica. R. et S. II. p. 676. excl. syn. Pal. et Thbg.

V. spp. nov. Zeland.

Specimina quae ab ipso cel. Forster ll. vidi, paniculam contractam habent. Arista perianthio fere duplo longior, vix geniculata. Culmus semipedalis, basi decumbens? Folia angustissima, plana, paniculam 2—3-pollicarem, viridem, fere aequantia.

Trisetum cernuum. Panicula laxa, nutante; Glumis 3—4-floris: superiori paulo longiore (triplo latiore); Pilis calli brevibus, racheos medium valvulae attingentibus; Perianthiis bisubulatis, supra medium (longe) aristatis; Ovario barbato.

V. spp. ex Ins. Sitka.

Culmus bipedalis. Folia plana. Paniculae circiter spithameae radii subcapillares. Spiculae e viridi et purpureo variae. Arista tenuissima, perianthio duplo triplove longior, patens. Ovarium insigniter comosum.

Trisetum tenue R. et S. II. p. 657. Panicula laxa, patula; Glumis 3-floris: superiori tertiam partem longiore; Pilis calli brevibus, racheos nullis; Perianthio infimo subulato, reliquis bisubulatis, supra medium aristatis; Ovario nudo.

Trisetum striatum Pers.
Avena dubia Leers.
Avena tenuis Mönch.
Avena fertilis All.
Avena triaristata Vill.
Bromus triflorus Poll.
Holcus biaristatus Web.
Ventenata bromoides et *avenacea* Koel.

V. spp. Germ. Calab. Iber.

Trisetum nitidum Pers. Panicula thyrsiformi-contracta; Glumis 3 — 5-floris, subaequalibus, (dorso ciliatis); Callo nudo, rachi pilosa; Perianthio infimo uniseto, reliquis bisetis medio dorso aristatis; Ovario nudo.

Trisetum nitidum. R. et S. II. p. 658.
Avena nitida Desf.!

V. sp. Mauritan.

Trisetum parviflorum Pers. Panicula laxiuscula (saepe elongata); Glumis 2 — 4-floris: superiori tertiam partem longiore; Callo rachique nudis; Perianthiis dentato-biaciculatis, infra apicem aristatis; Ovario nudo.

Trisetum parviflorum. R. et S. II. p. 659.
Avena parviflora Desf.!
Festuca segetum Savi.
Venit quoque s. n. *Avenae neglectae* et *Triseti micranthi.*

V. spp. Ital. Mauritan.

Trisetum condensatum Presl. Panicula patula (densiuscula, brevi); Glumis 2-floris: superiori paulo majore; Callo nudo, racheos pilis brevissimis, Perianthiis biaciculatis, supra medium aristatis; Ovario nudo.

Trisetum condensatum. Schult. Mant. 2. p. 366.

Avena condensata Link.

V. spp. Neap. Sic. cc.

Nimis affine praecedenti.

Trisetum neglectum R. et S. II. p. 660. Panicula contracta, subthyrsiformi; Glumis 3—6-floris: superiore paulo longiori; Callo nudo, racheos pilis brevissimis; Perianthiis biaciculatis, supra medium aristatis; Ovario nudo.

Avena neglecta Savi.

Avena panicea Desf. (LaM. et Link.).

Trisetum paniceum lusitanicum Pers.

Trisetum hispanicum, *β. pisanum* Pers.

V. spp. Lus. Hisp. Calabr. cc.

Glumae et perianthia interdum pl. min. pilosa. Variat statura palmari-, sesquipedali, panicula 1—5-pollicari. Perianthia nonnumquam submutica.

Trisetum Loefflingianum Pal. Panicula contracta, subthyrsiformi (brevi); Glumis 2-floris: superiore quartam partem longiori; Calli racheosque pilis subobsoletis; Perianthiis (pilosulis) longo-bisetis, medio dorso aristatis; Ovario nudo.

Trisetum Loefflingianum. R. et S. II. p. 661.

Trisetum hispanicum Pers.

Avena Loefflingiana L. sp. pl. ed. 1.

V. spp. Hisp.

Trisetum Cavanillesii. Panicula contracta, subthyrsiformi; Glumis 2-floris: superiore paulo longiori; Pilis calli brevibus, racheos praelongis; Perianthiis (glabris) longo-bisetis, paulo supra medium aristatis; Ovario nudo.

Avena Loefflingiana Cav. et Gaud.

Arundo pygmaea Sprgl.! R. et S. II. p. 512.

V. spp. Helv. Ital.

A *Triseto Loefflingiano*, quocum confunditur, pilorum racheos longitudine ut et ipso habitu diversum. Illi panicula plerumque angustior, fuscescens; huis viridis, splendens. Utrumque gramen parvum, posterius tamen haud raro sesquipalmare.

Trisetum molle. Panicula lineari-angustata, lucidula; Glumis 2-floris: superiore paulo longiori; Calli racheosque pilis brevissimis; Perianthiis bidentatis, infra apicem aristatis; Ovario nudo.

Avena mollis Mchx. R. et S. II. p. 676.

V. spp. Am. bor.

Trisetum airoides R. et S. II. p. 666. Panicula thyrsode, densa; Glumis 2-3-floris: superiore paulo longiori; Calli racheosque pilis brevissimis; Perianthiis brevi-bisubulatis, infra apicem aristatis; Ovario nudo; (Culmo superne pubescente).

Aira subspicata L. syst. nat.

Aira spicata L. sp. pl. ed. I. no. 7.

Avena airoides Koel.

Trisetum subspicatum Pal.

V. spp. alp. Germ. Helv. Lapp. Altaiens. — Pers. Laur. Aleut. Staatenland. — Specimina Kamtschatika paniculam longiorem habent, folia latiora, tomentosa.

Trisetum ovatum Pers. Panicula capitato-thyrsode, densa; Glumis 2—5-floris, subaequalibus (caudato-acuminatis, pilosis); Calli racheosque pilis obsoleto-brevissimis; Perianthiis bisubulatis, infra apicem aristatis; Ovario nudo.

Trichaeta ovata Pal. R. et S. II. p. 633.

Bromus ovatus Cav.

Avena ovata Gmel. ht. Carlsr.

V. spp. Lus. Hisp. cc.

b) Perianthiis bidentatis, aristis (setis) abbreviatis, *Rostraria* Tr. Fund. Agr.

Trisetum phleoides. Panicula thyrsode, densa; Glumis 4—6-floris, inaequalibus, flosculis brevioribus; Perianthiis infra apicem longius setigeris; Ovario nudo.

Koeleria phleoides Pers. R. et S. II. p. 623.

Koeleria cristata Bertol.

Festuca cristata L. sp. pl. ed. 1.

Festuca phleoides Vill.

Bromus trivialis Savi.

Poa phleoides LaM.

V. spp. Lus. Hisp. Gall. Helv. Dalm. Taur. Cret. cc.

Panicula saepe lobata. Glumae valvulaeque plerumque pilosae; sed et glabrae occurrunt, quae var. est:

Bromus dactyloides Roth. Venit quoque s. n:

Koeleria dactyloides Sprgl.

Eadem var. pumila, brachystachya:

Koeleria brachystachya Dec. occurrens etiam s. n:

Bromus Dactylis, et

Dactylis pungens.

V. spp. Pyren.

Nec raro perianthia exasperata inveniuntur, flosculorum inferiorum longius-, superiorum brevius setigera.

Trisetum pubescens. Panicula thyrsode, densa; Glumis 2-floris, aequalibus, flosculos aequantibus vel paulo superantibus (dorso ciliatis); Perianthiis infra apicem brevi-setigeris; Ovario nudo.

Koeleria villosa Pers. R. et S. II. p. 623.

Koeleria pubescens Pal.

Aira pubescens Vahl.

Phalaris pubescens Poir.

Phalaris Barrelieri Ten.

V. spp. Gall.

Seta valvulam nunc aequat, nunc eandem excedit, quam var. cl. Salzmann misit s. n. *Airae elongatae.*

Hoc Gramen macilentum, sesquiflorum, seta subterminali, est *Aegialitis tenuis* Tr. Fund. Agr. p. 127.

Trisetum macilentum. Panicula sublineari-thyrsode, lucidula; Glumis 2 — 4-floris: inferiore minima, superiore flosculos subaequante; Perianthiis infra apicem brevisetigeris; Ovario nudo.

Koeleria macilenta DeC. R. et S. II. p. 625.

Koeleria tenuiflora Salzm.! mss.

Festuca sicula Presl.!

V. spp. Hisp. Gall. Sic.

? c) Perianthiis muticis, *Colobanthus.*

Obs. Ob semen compressum, exsulcum, liberum huc refero; nec habitus alienus; Perianthia autem fere coriaceo-chartacea.

? *Trisetum pensylvanicum.* Panicula lineari, laxa, lucida; Perianthiis exasperatis.

Koeleria pensylvanica DC. R. et S. II. p. 621.

Aira pensylvanica Sprgl.! act. Petr.

Aira nitida Sprgl.! Cent. nov. pl.

Aira mollis Mühlenb.

Aira truncata ht. Berol.

V. spp. Am. bor.

Simillimum *Triseto palustri.*

? *Trisetum lobatum.* Panicula cylindracea, lobata, stricta, densa; Perianthiis glabriusculis.

Aira obtusata Mchx.?

V. spp. Am. bor.

A priori diversissimum. Culmus strictus, ultrapedalis. Folia quae in *pensylvanico* angustissima et pubescentia, in hoc lineas 2 lata, stricta, scabra. Panicula densa, lobata, stricta. Spiculae duplo minores, ut in illo biflorae.

---

3. DANTHONIA DeC.

Panicula, interdum thyrsiformis. *Glumae* 2- multiflorae, subaequales, flosculos aequantes vel iisdem longiores. ***Perianthii*** valvula inferior, glumis pl. min. firmior, convexa, 9— 13 nervis: nervis tribus mediis confluentibus in aristam planam, tortilem (quandoque abbreviatam vel nullam), lateralibus utrinque in subulam (nonnumquam abbreviatam). *Ovarium* nudum.

Rachis brevis et brevissima. Nervi glumae nunc inferioris, nunc superioris plures.

Danthonia decumbens DeC. Panicula racemiformi, simplicissima, pauciflora; Spiculis quadrilinealibus, 3— 5-floris; Glumis acutis, flosculos aequantibus; Perianthiis, margine inferne villosulis, tridentatis: dentibus aequalibus.

Triodia decumbens Pal. R. et S. II. p. 597.

Festuca decumbens L. sp. pl. ed. I.

Poa decumbens Schrad.

Bromus decumbens Koel.

Melica decumbens Web.

Melica rigida Wib.

Sieglingia decumbens Bernh.

V. spp. Germ. Gall. Angl. Ross.

Obs. *Triodia Br.* mihi ignota, aliena tamen, quantum e definitionibus specierum autumare licet, a Danthonia decumbente. *Triodiae* spp. KUNTH, ad *Schismum* pertinent.

Danthonia provincialis DeC. Panicula racemosa, pauciflora; Spiculis semipollicaribus, 4-floris; Glumis acuminatis, flosculis tertiam partem longioribus; Subulis brevibus laciniiformibus; Arista perianthio basi piloso subsesquilongiori.

Danthonia provincialis. R. et S. II. p. 689. Tr. ic. gram. VI. 67.

Danthonia alpina Vest.

Avena calycina Vill.

Avena depauperata Sieb. hb.

V. spp. Taurin. Tergest.

Danthonia spicata Nutt. Panicula racemali, secunda, pauciflora; Spiculis quadrilinealibus, sub- 7-floris; Glumis acutissimis, flosculis paulo longioribus; Subulis perianthio villoso quater brevioribus; Arista eodem sesquilongiori.

Danthonia spicata. R. et S. II. p. 690. Tr. ic. gram. V. 54.

Avena spicata L. sp. pl. ed. 1.

V. spp. Amer. bor.

Danthonia sericea Nutt. Panicula subracemali, subpauciflora; Spiculis semipollicaribus, 5 — 8-floris; Glumis acuminatis, flosculis paulo l. tertiam partem longioribus; Subulis perianthio margine praesertim villoso tertiam partem brevioribus; Arista eodem sesquilongiori.

Danthonia sericea. Schult. Mant. 2. p. 382. Tr. ic. gram. V. 53.

Avena spicata Ell.

V. spp. Carolin.

Valvula inferior margine villosa, quae in priori dorso tantum pilis adspersa.

Danthonia semiannularis Br. Panicula contracta, lanceolato-lineari; Spiculis semipollicaribus, 5-floris; Glumis acuminatis, flosculis quartam partem longioribus; Subulis circiter longitudine perianthii interrupte villosi; Arista eodem fere bis longiori.

Danthonia semiannularis. R. et S. II. p. 691. Tr. ic. gram. V. 52.

Arundo semiannularis LaBill.

V. spp. nov. Holl.

Danthonia pallida Br. Panicula contracta, lanceolato-lineari; Spiculis octo-linealibus, 3-floris; Glumis acuminatis, flosculis quartam partem longioribus; Subulis longitudine perianthii ad medium usque villosi, acuminato-bifidi; Arista eodem paulo longiori.

Danthonia pallida. R. et S. II. p. 692. Tr. ic. gram. VI. 65.
V. spp. nov. Holl.

Danthonia paradoxa Br. Panicula contracta; Spiculis quadrilinealibus, 3—4-floris; Glumis acutis, flosculis paulo longioribus; Perianthii ad medium usque hirsuti, bifidi, laciniis acutis, brevibus; Arista eodem breviori (reflexa).

Danthonia paradoxa. R. et S. II. p. 692.
Triodia litoralis Spreng. S. V. I. p. 330.
V. spp. nov. Holl.

Bipedalis. Folia involuta, glabra. — Quamvis definitio abludat a Browniana, tamen absque dubio eadem planta. Quam enim effusam dicit etiam in *D. pallida* paniculam, in utriusque speciei speciminibus plurimis semper contractam vidi.

Danthonia Forskalii. Panicula contracta, oblongo-lineari (basi folio involucrata); Spiculis tri- quadri-linealibus, sub- 3-floris; Glumis acutis, flosculis parum longioribus; Perianthio seriatim pubescente, bifido: laciniis acutis, ipso paulo brevioribus; Arista perianthii longitudine.

Tr. ic. gram. V. 49.
Trisetum Forskalii Pal. R. et S. II. p. 658.
Avena Forskalii Vahl.
Avena pensylvanica Forsk.
Avena arundinacea Del.
Deschampsia arundinacea Sprgl. Schult. Mant. II. p. 381.
V. spp. Egypt.

***Danthonia pilosa* Br.** Panicula coarctata, lanceolata; Spiculis (cum setis) 7 — 8-linealibus, 5 — 9-floris; Glumis acutis, flosculis paulo longioribus; Subulis circiter longitudine perianthii interrupte villosi; Arista eodem bis longiori.

Danthonia pilosa. R. et S. II. p. 692. Tr. ic. gram. V. 51.

V. spp. nov. Holl.

Danthonia livida. Panicula contracta, ovata; Spiculis quinquelinealibus, 2-floris; Glumis subulatis, flosculis plus duplo (fere triplo) majoribus; Perianthii villosuli subulis eodem duplo vel sesquilongioribus; Arista eodem triplo longiori.

Tr. ic. gram. V. 50.

V. spp. Cap. b. sp.

***Danthonia curvifolia* Schrad.** Panicula coarctata, ovata, densa; Spiculis quadrilinealibus, 2-, vel sub- 3-floris; Glumis subulatis, flosculis fere sexies majoribus; Perianthii pubescentis setis aristaque eodem multo longioribus.

Danthonia curvifolia. Schult. Mant. II. p. 386.

V. sp. Cap. b. sp.

Laciniae perianthii laterales bipartitae: dente exteriore lanceolato, brevi; interiore in setam tenuissimam praelongam producto. — Glumae paucinerues.

Danthonia coronata. Panicula subcapitato-ovata; Spiculis quadrilinealibus, 3-floris; Glumis subacuminatis, flosculis parum longioribus; Laciniis brevibus; Arista longitudine perianthii infra pubescentis, medio pilis densis coronati.

V. sp. Cap. b. sp.

Ultrapedalis, glabra. Folia involuta. Panicula ovata, densa, pollicaris, pallide spadicea.

***Danthonia lanata* Schrad.** Panicula condensata, subcapitata; Spiculis semipollicaribus, sub- 5-floris; Glumis subacuminatis, flosculis paulo longioribus; Perianthii infra longe denseque villosi laciniis brevibus; Arista eodem vix breviori.

Danthonia lanata. Schult. Mant. II. p. 386. Tr. ic. gram. VI. 62.
Avena lupulina Thbg.?
V. sp. Cap. b. sp.

Danthonia papillosa Schrad. Panicula oblonga, patula, (demum contracta); Spiculis subtrilinealibus, 2-floris; Glumis acuminatis, flosculis tertiam partem et ultra longioribus; Subulis longitudine perianthii villosuli; Arista eodem triplo longiori; (Foliis margine papillosis).
Danthonia papillosa. Schult. Mant. II. p. 385. Tr. ic gram. VI. 66.
V. spp. Cap. b. sp.

Danthonia micrantha. Panicula oblonga, patula; Spiculis sesquilinealibus, bifloris; Glumis caudato-acuminatis, flosculis tertiam partem longioribus; Setis longitudine perianthii villis adspersi; Arista eodem triplo longiori; (Foliis planis, nudis).
Polypogon capense Hornem. mss.
V. spp. cult. e semin. Capens.
Gramen satis tenerum, semipedale.

Danthonia involucrata Schrad. Panicula angustato-contracta, multiflora; Spiculis ultrasemipollicaribus, 3 — 4-floris; Glumis acuminatis, flosculis fere duplo longioribus; Subulis perianthii pilosi longitudine; Arista eodem $2\frac{1}{2}$ longiori; (Pedicellis villo involucratis).
Danthonia involucrata. Schult. Mant. II. p. 383.
V. sp. Cap. b. sp.

Danthonia macrantha Schrad. Panicula secunda, contractiuscula, multiflora; Spiculis sesquipollicaribus, bifloris; Glumis acuminatis, flosculis plus duplo longioribus; Perianthii basi superneque pilosi subulis eodem subbrevioribus; Arista eodem bis longiori.
Danthonia macrantha. Schult. Mant. II. p. 385. Tr. ic. gram. VI. 63.
V. spp. Cap. b. sp.

Danthonia pallescens Schrad. Panicula contractiuscula, oblonga, multiflora; Spiculis quadrilinealibus, bifloris; Glumis acuminatis, flosculis subduplo longioribus; Subulis perianthio pubescente l. villosulo paulo brevioribus; Arista eodem bis longiori.

Danthonia pallescens. Schult. Mant. II. p. 386. Tr. ic. gram. VI. 64.

V. spp. Cap. b. sp.

Danthonia tortuosa. Panicula laxa, apice nutante; Spiculis trilinealibus, bifloris; Glumis subacuminatis, flosculis tertiam partem aut fere dimidio longioribus; Subulis longitudine perianthii villosi; Arista eodem plus triplo longiori.

Tr. ic. gram. VI. 68.

Trisetum villosum Sieb. hb. Cap. no. 119.

Avena pallida Thbg.!

V. spp. Cap. b. sp.

Avena pallida, ab ipso ill. auct. communicata, a *tortuosa* non differt, nisi quod glumae, in hac hirtulae, illi glabrae et perianthium plerumque pilosulum tantum sit.

Danthonia Anisopogon. Panicula laxa; Spiculis fere bipollicaribus, sesquifloris; Glumis acutiusculis, flosculo plus duplo longioribus; Subulis perianthio lanuginoso bis-, Arista eodem fere sexies longiori.

Tr. ic. gram. VI. 61.

Anisopogon avenaceus Br.! R. et S. II. p. 422.

V. spp. nov. Holl.

---

4. Stipa. Diss. I. p. 182.

Panicula. Locustae uniflorae. *Glumae* membranaceae, proportione inter se varia. *Perianthium* coriaceum, apice uni aristatum. *Lodiculae* squamae plerumque 3.

(*Species emendatae et auctae.*)

a) Callus planiusculus vel brevissimus, perianthium oblongum, *Nassella*

Obs. Subgenus habitu *Urachnes*, cui vero glumae multinerves, nervique in gluma inferiore plures sunt quam in superiore: qua nota Urachne characterem suum polygamum (paniceum) palam facit.

Stipa trichotoma. N. ab Es. Glumis lanceolatis, subacuminatis, perianthio linea minori, verrucoso-aspero, basi villoso, fere triplo longioribus: inferiore paulo majori: Arista laterali, subaequa, tortili, hispida, glumis quinquies longiori.

V. spp. Brasil. merid.

Sesquipedalis et ultra. Culmi teneri, subfiliformes. Folia setacea. Panicula dodrantalis, laxa, lucidissima, radiolis subcapillaribus, pallidis. Glumae purpureae. Perianthium albens.

Stipa panicoides LaM. Glumis oblongis, caudatis, perianthio linea minori, verrucoso, basi brevissime villosulo paulo longioribus: inferiore paulo majori; Arista laterali, flexuosula, demum parum tortili, glumis sesquilongiori.

Stipa panicoides. R. et S. II. p. 341.

V. spp. Chil. Brasil. merid.

Sesquipedalis, dense caespitosa. Culmi tenues, superne plerumque geniculati. Folia filiformi-setacea. Panicula bipollicaris, lineari-oblonga, densiuscula.

Stipa ovata. Glumis oblongis, caudatis, subaequalibus, perianthio sesquilineali, basi villoso, truncato, torulo coronato tertiam partem vel subduplo longioribus; Arista terminali, tortili, plicata, flexuosula, glumis quater longiori.

V. sp. e Monte Video.

accepi s. n. *Stipae bicoloris β*, a qua vero certo specie distincta. — Pedalis, dense caespitosa. Folia filiformia. Panicula (in nostro specimine) sesquipollicaris, subracemosa, pauciflora. Similis quodammodo antecedenti.

b) Callus planiusculus, perianthium cylindraceum, *Aristella*.

Stipa ramosissima. Glumis cuspidatis perianthio vix lineali, scabro, paulo longioribus: inferiore paulo majori; Arista plicata, hispida, glumis quinquies sexiesve longiori; Antheris . . . .

Urachne ramosissima Tr. Diss. 1. p. 173.

Stipa micrantha Sieb. Agrostoth. no. 82.

V. spp. nov. Holl.

Gramen omnium facile ramosissimum, prostratum?, 10—12 pedale. Rami floriferi plurimi, tenues, strictiusculi. Panicula tenerrima, ultrapalmaris, laxiuscula, incomta, glaucescens.

Stipa caragana. Glumis acutis, aequalibus, perianthio subultralineali, pilis adsperso, apice villoso fere tertiam partem longioribus; Arista (caduca) aequa, recta, glumis subtriplo longiori; Antheris barbatis.

V. spp. e littore oriental. maris Caspici.

1—3 pedalis, gracilis, culmo pertenui. Folia angustissima, subinvoluta. Panicula dodrantalis, laxa, perpauciflora, pallida, radiis subcapillaribus, locustis adpressis.

Stipa micrantha Br. Glumis acutis, perianthium sesquilineale, asperrimum subaequantibus: inferiore parum minori; Arista subtortili, plicata, hispida, glumis bis longiori; Antheris nudis.

V. spp. nov. Holl.

Cavanillesii planta, sub qua habent R. et S. II. p. 339, panicula spicata recedere videtur, quae in nostra laxiuscula, spithamaea.

Stipa altaica. Glumis acutis: superiore, tertiam partem majori, perianthium bilineale, villosum aequante; Arista aequa, curvula, hirta, glumis fere bis longiori; Antheris barbatis.

Ledeb. Fl. altaica ined.

V. spp. Altaic.

Gramen 3-4-pedale, glaucescens. Folia subcoriacea, lineam lata. Panicula spithamaea — sesquipedalis, contractiuscula.

Stipa aristella **L. S. N.** Glumis rostrato-acuminatis, perianthio trilineali, pilis adsperso paulo longioribus: inferiore submajori; Arista aequa, hispida, glumis duplo longiori; Antheris nudis.

Stipa aristella. R. et S. II. p. 334.

Agrostis bromoides L. Mant. 1.

V. spp. Gall. Taur. Cret.

c) Callus conicus, perianthium cylindraceum, *Stipa*.

Stipa verticillata **N. ab Es.** Glumis acutis, aequalibus, perianthium ultralineale, villosulum, apice barbatulum aequantibus; Arista flexuosa, plicata, scabra, glumis 7—8ies longiori; Antheris cuspidato-barbatis.

Sieb. Agrostoth. no. 64.

V. spp. nov. Holl.

Bipedalis et ultra. Culmus firmus, ramosulus. Folia angusta, plana, attenuata. Panicula dodrantalis, laxiuscula, tenerrima.

Stipa hyalina **N. ab Es.** Glumis subulato-acuminatis, perianthio sesquilineali, scabro, inferne lateraliter piloso, apice coronato fere duplo longioribus: inferiore paulo minori; Arista tortili, plicata, flexuosula, nuda, glumis fere quinquies longiori; Antheris . . . .

V. spp. Bras. merid.

Bipedalis et ultra, glaucescens, culmo firmo, foliis perangustis subinvolutis. Panicula fere spithamaea, tenera.

Stipa caudata. Glumis brevi-caudatis, aequalibus, perianthio bilineali, villoso, apice barbato parum longioribus; Arista tortili, plicatula, nuda, glumis triplo longiori; Antheris barbatis.

V. spp. Chilens.

Bi — tri-pedalis, gracilis, foliis filiformi-involutis. Panicula spithamaea — pedalis, erecta, contractiuscula, lucidula.

Stipa Redowskii Tr. Diss. 1. *p.* 183. Glumis obtusiusculis perianthio bilineali, villoso paulo longioribus: inferiore parum majori; Arista aequa, recurva, hispida, glumis duplo longiori; Antheris barbatis.

Stipa conferta Poir. Schult. Mant. II. p. 187.

V. spp. Altaic.

Sesqui — bi-pedalis, gracilis. Folia angusta, planiuscula, attenuata. Panicula digitalis — spithamaea, contractiuscula, glaucescens (in culto gramine, cui et perianthium nonnihil majus, e spadiceo, purpureo et albo varia).

Stipa Calamagrostis Wahlenb. Glumis acutis perianthio bilineali, apice emarginato, lateribus villoso paulo longioribus: inferiore paulo majori; Arista aequa, recurva, hispida, glumis sesquilongiori; Antheris barbatis.

Agrostis Calamagrostis L. sp. pl. ed. 2. R. et S. II. p. 362.

Agrostis stipata Koel.

Arundo speciosa Schrad.

Calamagrostis argentea Fl. fr.

Calamagrostis conspicua Berg.

Calamagrostis speciosa Host.

V. spp. alp. Eur. austr.

Stipa splendens Tr. Diss. I. p. 183. Glumis acutis: superiore circiter quintam partem majori perianthium bilineale, apice emarginatum, sparsim villosum paulo superante; Arista aequa vel subtorta, rectiuscula, nuda, glumis sesquilongiori; Antheris barbatis.

V. spp. e Sibir. transbaicalensi.

Tri- quinque-pedalis. Folia plana, lineam lata, vel pl. min. involuta. Panicula saepe pedalis, erecta vel apice subnutans, laxiuscula, pallida, ex amethystino varia, nitens.

Stipa megapotamia Sprgl. ms. Glumis acutis, aequalibus, perianthio bilineali, ad medium usque pilosulo, superne verrucoso-scabro, truncato, subcoronato tertiam partem longioribus; Arista tortili, flexuosa, inferne pubescendo-pilosula, glumis sexies longiori; Antheris. . . . .

V. sp. Brasil. merid.

Sesquipedalis. Folia plana, lineam lata, sursum scabra. Panicula dodrantalis, laxa, subsecunda, densiuscula. Glumae purpurascentes, aristae flavendo-virides.

Stipa parviflora Desf. Glumis acuminatis: superiore duplo breviori, perianthium subultrabilineale, pilosiusculum vix superante; Arista plicata, recurva, nuda, glumis sexies longiori; Antheris barbatis.

Stipa parviflora. R. et S. II. p. 335.

Stipa elongata Roth.

V. spp. Cret.

Sesqui- bi-pedalis, pallens. Panicula dodrantalis, laxa.

Stipa filifolia N. ab Es. Glumis acuminatis, perianthio bilineali, subpilosulo, apice brevissime barbato-coronato fere duplo longioribus: inferiore vix majori; Arista flexuosula, torta, hispida, glumis quater longiori; Antheris subbarbatis?

V. spp. Bras. merid.

Tripedalis, glaucescendo-pallida. Culmus satis validus. Folia filiformia, scabriuscula, caespitis plurima. Panicula dodrantalis, lineari-coarctata, densissima, superne subfuscescens.

Stipa penniglumis. Glumis collateralibus, setiformibus, plumosis, perianthio subultrabilineali, dorso nudo, fronte villoso brevioribus; Arista tortili, plicata, inferne spiraliter villosa glumis fere decies longiori; Antheris nudis.

V. spp. Bras.

Quadripedalis, stricta. Nodi subpubescentes. Folia plana, glabra. Pa-

nicula dodrantalis, densa, contracta, incomta. Pedicelli apice cyathium obliquum formant, cui inserta est calli conici basis, ita ut perianthii callus cum pedicello articulatus sit. Glumarum loco laciniae 2, angustissimae, aequales, penniformes, ad basin valvulae inferioris, supra callum. Valvula inferior nuda praeter apicem barbatulum; superior dorso villosa. Arista basin versus fuscescens et pilis candidis spiraliter villosa, superne nuda et gilva.

Stipa tortilis Desf. Glumis longe subulatis, perianthio trilineali, seriatim pilosulo. superne nudiusculo multo longioribus: inferiore paulo majori: Arista tortili, geniculata, inferne pilosa, glumis quadruplo longiori: Antheris . . . .

Stipa tortilis. R. et S. II. p. 332.

Stipa humilis Brot.

Stipa seminuda Vahl.

Stipa paleacea Sm.

V. spp. Lus. Sic. Cret.

Stipa sibirica LaM. Glumis acutiusculis, subaequalibus. perianthium trilineale, villosum aequantibus; Arista tortili, plicatula, pilosulo-hispida, glumis bis longiori: Antheris barbatis.

Stipa sibirica. R. et S. II. p. 338.

Avena sibirica L.

V. spp. Sibir.

Sesqui — tri-pedalis. Folia plana vel involuta. Panicula spithamaea — dodrantalis. laxa, sublinearis, aut tota viridis, aut e purpureo pulchre varia.

Stipa papposa N. ab E. Glumis acuminatis perianthium trilineale, excepta basi nudum, scabrum subaequantibus; Arista subaequa, geniculato-recurva, basi longo-plumosa, glumis quadruplo longiori; Antheris . . . .

V. spp. Chil. Bras. merid.

Semi — ultrabipedalis, pallide glaucescens, ramosiuscula. Folia perangusta, plana. Panicula dodrantalis, laxa, tenera, sericea.

Stipa orientalis. Glumis subulato-acuminatis, subaequalibus, perianthio trilineali, toto piloso duplo longioribus; Arista tortili, plicata, tota plumosa, glumis plus triplo longiori; Antheris nudis.

Ledeb. Fl. Alt. ined.

V. spp. Cauc. or. et Altaic.

Habitus *Stipae pennatae* humilis, a qua differt potissimum glumis acuminatis tantum nec longissime attenuatis, arista tota nec superne tantum plumosa. — Proxime accedit planta *persica*, fere tripedalis, perianthiis semipollicaribus, quibus glumae triplo longiores; an species distincta?

Stipa eminens Cav. Glumis subulato-acuminatis, perianthio trilineali, verrucoso-scabro, basi villoso, apice coronato duplo longioribus: inferiore paulo majori; Arista tortili, subplicata, flexuosa, inferne pilosula, glumis quadruplo longiori; Antheris . . . .

Stipa eminens. R. et S. II. p. 337, (ubi in definitione glumae paleis duplo *longiores* dicendae).

V. spp. Bras. merid.

Stipa bicolor Vahl. Glumis subulatis, subaequalibus, perianthio trilineali, excepta basi nudo, verrucoso, apice coronato duplo longioribus; Arista tortili, flexuosula, vix plicata, pubescendo-villosula, glumis fere triplo longiori; Antheris barbatis.

Stipa bicolor. R. et S. II. p. 336.

V. spp. Chil. Bras. merid.

Praecedenti valde affinis, differt aristis, panicula laxiori, subpauciflora, glumis latioribus, saturatius purpureis.

Stipa avenacea L. sp. pl. ed. 1. Glumis acutis, subaequalibus, perianthio fere 4-lineali, excepta basi nudo, apice barbatulo parum longioribus; Arista tortili, plicata, sub lente pilosula, glumis 5-8ies longiori; Antheris nudis?

Stipa avenacea. R. et S. II. p. 334.

Stipa bicolor Tr. Diss. I. p. 185.

V. spp. Amer. bor.

Linnaeus plantam juvenilem vidisse videtur, panicula folio supremo etiamnum involucrata. Libera demum est, lucidissima, pauciflora, superne angustata.

Stipa mollis Br. Glumis acuminatis, perianthio fere 4-lineali, villosulo plus duplo longioribus: inferiore paulo majori; Arista flexuosa, ad medium usque plumosa, glumis triplo longiori: Antheris barbatis.

Stipa mollis. R. et S. II. p. 336.

Sieb. Agrostoth. no. 60.

V. spp. nov. Holl.

Bipedalis et ultra. Folia longa, angusta, plana. Panicula dodrantalis, contracta, subovalis, satis densa, molliter plumosa.

Stipa tenacissima L. Amoen. Glumis subsubulatis, perianthio fere 5-lineali, undique villoso subduplo longioribus: inferiore paulo majori: Arista tortili, geniculata, inferne plumosa, glumis plus duplo longiori: Antheris barbatis.

Stipa tenacissima. R. et S. II. p. 334.

V. spp. Hisp.

Sesqui—tripedalis. Folia involuta. Panicula lineari-contracta, spithamaea—dodrantalis, satis densa, rigidula. Aristae inferne longius plumosae quam in praecedente.

Stipa pubescens Br. Glumis obtusiusculis, perianthio fere 5-lineali, scabro, sursum diminuendo-villosulo quartam partem longioribus: inferiore paulo majori; Arista tortili, plicata, tenuissime pubescente, glumis triplo quadruplove longiori: Antheris . . . .

Stipa pubescens. R. et S. II. p. 340.

Sieb. Agrostoth. no. 59 et 66.

V. spp. nov. Holl.

2 — 4-pedalis, stricto-erecta. Folia involuta. Panicula spithamaea, lucida, laxiuscula, e viridi pallens.

Stipa capillata L. sp. pl. ed. 2. Glumis subulatis, perianthio fere 5-lineali, superne nudo duplo longioribus: modo inferiori, modo superiori paulo majori; Arista tortili, plicata, varie flexa, nuda, glumis sexies longiori; Antheris nudis.

Stipa capillata. R. et S. II. p. 333.

V. spp. Germ. Gall. Taur. Alt. Sib.

Stipa juncea L. sp. pl. ed. 1. Glumis subulatis perianthio fere 5-lineali, superne nudo tertiam partem longioribus: inferiore parum majori; Arista tortili, plicata, pilosa, glumis sexies longiori; Antheris barbatis.

Stipa juncea. R. et S. II. p. 332.

V. spp. Gall. austr.

Stipa holosericea. Glumis subulatis, aequalibus, perianthio semipollicari superne longe nudo plus duplo longioribus; Arista subtortili, flexuosula, sericeo-pubescente, glumis octies longiori; Antheris nudis?

V. spp. Pers.

Sesquipedalis et altior, tota albo-glauca, tenerrime pubescens. Folia involuta, sursum scabriuscula. Panicula cum aristis praelongis ultrapedalis, laxiuscula.

Stipa erecta ht. madr. Glumis subulatis, perianthio semipollicari, ad nervos, praesertim inferne hirto duplo longioribus: inferiore parum majori; Arista tortili, plicata, flexuosa, nuda, glumis octies longiori; Antheris nudis.

V. cc.

3 — 4-pedalis, foliis subfiliformi-involutis. Panicula magna, erecta, laxiuscula.

Stipa gigantea Lag. Glumis longissime subulatis, perianthio semipollicari, superne nudo multo longioribus: inferiore paulo majori; Arista subtortili, flexuosa, tenuissime pubescente, glumis quinquies longiori; Antheris . . . .

Stipa gigantea. R. et S. II. p. 333.

Stipa juncea Cav. prael.

V. cc.

Similis praecedenti differt notis datis. Panicula sesquipedalis, laxa, lucidissima.

Stipa sparta. Glumis subulatis, perianthio ultrasemipollicari, superne nudo duplo longioribus: nunc inferiore nunc superiore parum majori; Arista tortili, plicata, flexuosa, pubescendo-hirtula, glumis plus triplo longiori; Antheris...

V. spp. Amer. bor.

similis *junceae* differt potissimum proportione partium floralium. Folia planiuscula, quae setaceo-filiformia in illa.

Stipa pennata L. sp. pl. ed. 1. Glumis subulatis, perianthio ultrasemipollicari, superne nudo plus duplo longioribus: inferiore paulo majori; Arista tortili, plicata, superne plumosa, glumis octies longiori; Antheris nudis.

Stipa pennata. R. et S. II. p. 331.

V. spp. Germ. Ross. austr. Sib.

Rusticis Odessae *Tirsa* vocatur.

Stipa arenaria Brot. Glumis brevissime acuminatis, perianthio 9-lineali, apice bilaciniato, undique villoso paulo longioribus: inferiore parum minori; Arista tortili, plicata, nuda; Glumis plus triplo longiori; Antheris barbatis.

Avena Cavanillesii Lag. R. et S. II. p. 677.

Stipa gigantea Link.

V. sp. Lusit.

Spiculas nonnumquam bi — sex-floras vidit Lag. — Transitum facit ad *Danthoniam.*

---

5. Aristida. Diss. 1. p. 175.

Panicula. Locustae uniflorae. *Glumae* membranaceae, proportione inter se varia. *Perianthium* coriaceum, subcylindricum, arista tripartita terminatum. *Lodiculae* squamae 2.

(Species emendatae et auctae).

a) Perianthium cum arista non articulatum, *Chaetaria* *)

α) *Laciniis aristae aequaliter divergentibus.*

Aristida stae Luciae Tr. Diss. II. p. 25. Panicula subpatula; Glumis bidentatis, brevisetigeris: superiore tertiam partem longiori, perianthium bilineale aequante; Aristae laciniis valvula fere triplo longioribus: media paulo longiori.

V. spp. Brasil.

An *Arist. bromoides* Kunth?

Palmaris — spithamaea. Folia brevia, falcatula. Panicula sesquipollicaris, strictiuscula, purpurascens.

Aristida adscensionis L. sp. pl. ed. 1. Panicula contracta; Glumis acuminatis: superiore tertiam partem longiori, perianthium trilineale paulo superante; Aristae laciniis valvula bis et ultra longioribus: media paulo majori.

Chaetaria adscensionis Pal. R. et S. II. p. 390. (excl. Syn. Sloan.)

V. spp. Ins. adsc.

Aristida hystrix L. sppl. Panicula patula; Glumis subbidentatis, setigeris: superiore inferiori et perianthio trilineali fere dimidio longiori; Aristae laciniis valvula plus triplo longioribus: media paulo majori.

Chaetaria hystrix Pal. R. et S. II. p. 390. (excl. Syn. Thbg.)

V. spp. Ind. or.

Aristida caerulescens Desf. Panicula contracta, subsecunda; Glumis obtusis: superiore tertiam partem duplove longiori, perianthium 3 — 4-lineale subaequante; Aristae laciniis valvula vix aut quartam partem longioribus: media paulo majori.

Chaetaria caerulescens Pal. R. et S. II. p. 394.

---

*) *Perianthium* et *valvula* ad ipsius aristae (sive, in hac sectione, subulae) divisionem usque intelliguntur.

Aristida gigantea Brouss.
Aristida canariensis Willd.
Aristida divaricata Jcq. Eccl. (nec Willd.).
Aristida elatior Cav.
V. spp. Marocc. Canar. Hisp.
Panicula plerumque interrupta.

Aristida setacea Retz. Panicula contracta, subsecunda; Glumis acutissimis: superiore subduplo longiori, perianthium 4-lineale subaequante; Aristae laciniis subaequalibus, valvula parum longioribus.
Chaetaria setacea Pal. R. et S. II. p. 391.
Aristida depressa. Tr. Diss. 1. p. 175.
V. sp. Ind. or.

Aristida longifolia. Panicula contractiuscula; Glumis acuminatis: superiori inferiore paulo longiori, perianthio 4-lineali paulo breviori; Setis lateralibus valvula sesqui-, media eadem plus duplo longiori.
V. spp. Brasil merid.
3 — 4-pedalis. Folia perangusta, plana, inferne laevia, superne deorsum scabra, longissima (paniculam aequantia). Panicula sesquipedalis, glaucescens.

Aristida ramosa Br. Panicula contracta; Glumis acutis: superiore paulo longiori, perianthio 4-lineali paulo breviori; Aristae laciniis subaequalibus, valvula parum longioribus.
Chaetaria ramosa R. et S. II. p. 397.
Sieb. Agrostoth. no. 55.
Sesquipedalis. Culmi alii simplices, alii ramosi. Panicula subdepauperata. Glumae atro-purpureae. — Vix ab *Ar. arenaria* distinguitur nisi arista cum perianthio non articulata et glumis coloratis.

Aristida squarrosa Tr. Diss. 1. p. 177. Panicula contracta, stricta; Glumis longe caudatis: superiore duplo longiori, perianthio 5-lineali (non computata

subula acuminationis suae) dimidio breviori; Aristae laciniis valvula plus duplo longioribus, squarrosis: media paulo majori.

An *Aristida stricta* Mchx. R. et S. II. p. 391.

Bipedalis. Culmus subramosus foliaque glabra (nec pubescentia). Panicula spithamaea, stricta, angustata, sed ob aristas inter se complicatas valde squarrosa.

Aristida laxa Cav. Panicula (demum) laxa; Glumis acutissimis: superiore duplo longiori, perianthio 5-lineali parum breviori; Aristae laciniis lateralibus brevissimis, media valvulae longitudinem paulo excedente.

Aristida laxa. R. et S. II. p. 399.

V. spp. Bras.

Culmus perbrevis sustinet paniculam compositam e radiis aequissimis, tenuissimis et subcapillaribus, erectis, levissimo impulsu vacillantibus.

Aristida pallens Cav. Panicula plerumque contracta; Glumis subulato-acuminatis: superiore inferiori duplo-, perianthio fere semipollicari subduplo vel multo longiori; Aristae laciniis vix inaequalibus, valvula 8-, 12-18plo longioribus.

Chaetaria pallens Pal. R. et S. II. p. 392.

V. spp. Chil. Bras.

Proportione partium ipsiusque paniculae forma inconstans gramen, tamen longitudine aristarum insigni facile dignoscitur. 1—2 pedale et ultra. Folia involuta nunc brevia nunc longa. Panicula modo valde compacta confertissimisque aristis barbam hircinam referens (nude incolis *barba de bode* dicitur), modo lucidissima et laxa, erecta vel secunda; junior e purpureo et flavo-viridi eleganter varia.

Aristida complanata. Panicula contracta; Glumis acuminatissimis: superiore inferiori tertiam quartamve partem-, perianthio semipollicari paulo longiori; Aristae laciniis valvula triplo longioribus.

V. spp. e Bras. merid. (acc. sub nom. *Aristidae capillaceae LaM.* et *Chaetariae laevis N. ab Es.*).

Tripedalis. Folia praelonga, coriacea, involuta vel plana, glabra, cum panicula fere spithamaea, sublineari-compacta, basin versus saepe interrupta, e glauco et amethystino varia. Aristae squarrosae.

Aristida diffusa. Panicula diffusa, lucidissima; Glumis obtusiusculis, bifido-dentatis: superiore duplo longiori, perianthio 8-lineali quartam partem breviori; Aristae laciniis valvula sesqui-longioribus: media paulo majori.

V. sp. Cap. b. sp.

Bipedalis, culmo simplici foliisque involutis glabris. Panicula dodrantalis, radiis subcapillaribus diffusis. Flores (demum) spadicei, basi purpurei; Aristae squarrosae.

β) *Aristae laciniis lateralibus rectis, media reflexa.*

Aristida virgata Tr. Diss. I. p. 178. Panicula patula, elongata; Glumis acuminatis, perianthio bilineali (laevi) non nimis longioribus: inferiore paulo minori; Aristae laciniis lateralibus valvula plus duplo-, media eadem fere quadruplo longioribus.

An *Aristida oligantha* Mchx. R. et S. II. p. 391. sub Chaetaria.

V. spp. Am. bor.

Tripedalis, gracilis. Folia plana, satis longa. Panicula 1-sesqui-pedalis, lineari-angustata, subsecunda et nutans.

Aristida gracilis Ell. Panicula contracta; Glumis acuminatis, perianthium subultrabilineale (scaberrimum) aequantibus: inferiore paulo minori; Aristae laciniis lateralibus longitudine valvulae, media eadem plus duplo longiori.

Aristida gracilis. Schult. Mant. II. p. 214.

V. spp. Amer. bor.

Semipedalis et ultra, basi ramosa. Panicula dimidiam culmi partem efficiens strictiuscula, interrupta, contracto-angustissima.

?*Aristida dichotoma Mchx.* Panicula racemosa; Glumis acuminatis perianthio bilineali non nimis longioribus: inferiore paulo minori; Aristae laciniis lateralibus brevissimis, media tortili, longitudine valvulae.

Curtopogon dichotomus Pal. R. et S. II. p. 398.

Avena setacea Mühlenb.

V. spp. Am. bor.

Proprior *Mühlenbergiae* quam *Aristidae*; huic ob aristam tortam, epiphysin potius quam ipsius valvulae processum formantem affinis, illi ob lacinias laterales perianthio ipsi nec aristae adpertinentes accensenda.

b) Perianthium cum arista articulatum, *Aristida.*

α) *Aristis nudis.*

Aristida capillacea LaM. Panicula patula; Glumis acuminatis perianthio lineali longioribus: inferiore quartam partem breviori; Arista infra medium divisa: laciniis bilinealibus: media paulo longiori.

Chaetaria capillacea Pal. R. et S. II. p. 393.

V. spp. Cayenn.

Palmaris — semipedalis, ramosa. Panicula sublinearis, tenera, lucida, pallida.

Aristida repens. Panicula lineari-contracta; Glumis subbidentatis, inter dentes brevissime cuspidatis, subaequalibus, perianthio sesquilineali tertiam partem longioribus; Arista a basi divisa: laciniis aequalibus, ultratrilinealibus.

V. spp. ex Ind. occ. ins. Gallapago.

Culmus prostratus, repens, per intervalla brevia emittens foliorum fasciculos et ramos floriferos, erectos, spithamaeos. — Folia angusta, plana. Panicula digitalis, subracemiformis, lucida, pallens.

Aristida arenaria Tr. Diss. II. p. 25. Panicula contracta, sublineari; Glumis acutiusculis: inferiore tertiam partem breviori, perianthium ultrabilineale sub-

aequante; Arista paulo supra basin divisa: laciniis subaequalibus, 7—8-linealibus.

V. spp. Brasil.

1 — sesqui-pedalis. Folia involuta, glabra. Panicula spithamaea, angustata, pallida, aristis superioribus purpurascentibus.

Aristida congesta R. et S. II. p. 401. Panicula coarctata, lineari-oblonga: Glumis bifidis, satis brevi-setigeris: inferiore (non computata seta) duplo-, perianthio trilineali subduplo breviori; Arista supra basin divisa: laciniis aequalibus, semipollicaribus.

Aristida coarctata Lichtenst.!

V. spp. Cap. b. sp.

Pl. min. pedalis, interdum erecto-ramosa. Folia brevia, rigida. Panicula ultrapollicaris, stricta, densa.

Aristida Sieberiana Tr. Diss. I. p. 179. Panicula contracta; Glumis bidentatis, brevisetigeris: inferiore duplo minori (non computata seta) perianthium 5-lineale aequante; Arista infra medium divisa: laciniis aequalibus, bipollicaribus.

Aristida coerulescens Sieb. Cat. Palaest.

V. spp. Palaest.

Bipedalis, ramosa. Folia involuta. Panicula (cum aristis) spithamaea, glumis amethystinis, aristis glaucis.

Aristida stipoides Br.! Panicula angustissime contracta; Glumis obtusiusculis, demum apice fissis: inferiore duplo breviori, perianthium 5-lineale subaequante: Arista circiter medio divisa: laciniis aequalibus, ultrabipollicaribus.

Arthratherum stipoides Pal. R. et S. II. p. 398.

V. spp. nov. Holl.

Bipedalis, caespitosa, culmo tenui. Folia longa, filiformia. Panicula angustissima, dodrantalis, pallida, aristis squarrosis.

β) *Aristis plumosis.*

Aristida uniplumis Lichtenst.! Panicula patente; Glumis acutis perianthio sesquilineali longioribus: inferiore quartam partem breviori; Arista infra medium divisa, ad divisuram lanata: laciniis lateralibus capillaribus, nudis, ultralinealibus, media fere 9-lineali, superne plumosa.

Aristida uniplumis. R. et S. II. p. 401.

V. sp. Cap. b. sp.

Sesquipedalis, ramosa. Folia involuta. Panicula lucidissima, pallens.

Aristida ciliata Desf. Panicula patula; Glumis acutiusculis perianthio trilineali duplo longioribus: inferiore parum minori; Arista longe infra medium divisa: laciniis lateralibus pollice minoribus, nudis, media bipollicari, superne plumosa.

Aristida ciliata. R. et S. II. p. 399.

V. sp. Mauritan.

Bipedalis et ultra. Culmorum nodi cum ligulis barbati. Panicula speciosa, pedalis, linearis, lucida, pallens.

Aristida plumosa Vahl. Panicula patula; Glumis attenuatis, obtusis, perianthio subbilineali multo longioribus: inferiore paulo minori; Arista longe infra medium divisa: laciniis lateralibus semi-pollicaribus, nudis plumosulisve, media sesqui-pollicari, superne plumosa.

Aristida plumosa. R. et S. II. p. 398.

Aristida lanata Forsk!

V. spp. Iber. Pers. Egypt.

Pl. min. pedalis, glaucescendo-argentea. Folia involuta, vaginis aut pubescentibus aud nudis. Panicula pl. min. palmaris.

Aristida pungens Desf. Panicula patula (stricta); Glumis acutiusculis, subaequalibus, perianthio ultrabilineali duplo longioribus; Arista supra basin

divisa: laciniis 5-linealibus, plumosis: media paulo longiori; (Foliis rigidis, pungentibus).

Arthratherum pungens Pal. R. et S. II. p. 398.

V. spp. Egypt.

Erecta, stricta, ramosa, alboglaucescens. Folia patula, teretia, rigida, pungentia. Panicula spithamaea, densiuscula, stricta.

Aristida pennata Tr. in Mém. de l'Acad. de St. Pétersb. Tom. VI. Panicula patula (laxiuscula): Glumis acutiusculis perianthio fere 3-lineali triplo longioribus: superiore paulo minori; Arista supra basin divisa: laciniis 5-linealibus, plumosis: media parum longiori: (Foliis filiformibus, laxis).

V. spp. ad Baku lect.

Sesquipedalis, glauca, ramosa. Folia filiformi-involuta. Panicula fere spithamaea, subpauciflora.

Aristida capensis Thunb. Panicula patula; Glumis acutiusculis, aequalibus, perianthio 4-lineali duplo longioribus; Arista paulo infra medium divisa: laciniis plumosis, apice nudis: media paulo longiori, fere pollicari.

Chaetaria capensis Pal. R. et S. II. p. 395.

V. spp. Cap. b. sp.

1—2-pedalis. Folia involuta. Panicula erecta, satis multiflora; glumis e purpureo et spadicescente variis.

---

6. Pappophorum *Schreb.*

Thyrsus plerumque compactus, interdum jubalis. *Spiculae* 2—6-florae. *Glumae* membranaceae. *Perianthium* subcoriaceum: valvula inferior convexa, excurrens in subulas 3, 5, 7, 9, 13, pl. min. aequales.

(Valvulae inferioris nervi, ut in Danthoniis, novem. Flosculi superiores saepe steriles).

a) Spiculae 3—4-florae; Subulae 15, hispidae, *Polyraphis*.

Pappophorum alopecuroides Vahl. Thyrso cylindrico, longissimo, denso.

Pappophorum alopecuroideum. R. et S. II. p. 616.

nec specifice diversa Pappophora

laguroideum Schrad. Schult. Mant. II. p. 342., et

macrostachyum Schrad. Schult. l. l.

V. spp. Ind. occ. Bras.

Obs. Huic subdivisioni proxima est planta Brasil. meridionalis, thyrso racemiformi, spiculis fasciculatis, bifloris: flosculo inferiori tri-, superiori 13-subulato; quam *Eutrianis* melius adjunxit et *Eutr. multisetam* dixit ill. Nees ab Es. Media aperte inter Pappophorum et Eutrianam, huic non solum ob habitum (simillima enim *Eutrianae repenti*), sed praecipue ob perianthii valvulam inferiorem trinervem affinior.

b) Spiculae 2-florae, Subulae 9, plumosae, *Enneapogon Pal.*

Pappophorum nigricans Br.! Thyrso cylindraceo-oblongo; Glumis scabris, 5—7-nervibus; Subulis longitudine valvulae, supra medium usque plumosis.

Enneapogon nigricans Desv. R. et S. II. p. 616.

V. sp. n. Holl.

Sesquipedalis et ultra. Folia glabra, ut in reliquis, angusta. Thyrsus semipollicaris, compactus, nigricans.

Pappophorum phleoides ht. madr. Thyrso ovato; Glumis ad carinam pilosulis, 3—5-nervibus; Subulis valvula subsesquilongioribus, paulo supra medium usque plumosis.

Enneapogon phleoides R. et S. II. p. 616.

V. spp. Arab. felic.

Palmaris, semipedalis. Vaginae cum foliis pubescentes. Thyrsus ovatus, fere pollicaris, nigrescens.

Pappophorum pallidum Br.! Thyrso cylindraceo; Glumis pilosis 7— 9-nervibus; Subulis valvula paulo longioribus, supra medium usque plumosis.

Enneapogon pallidus Desv. R. et S. II. p. 615.

V. sp. nov. Holl.

Decumbens, semipedalis. Folia glabra, rigidula. Culmus superne pubescens. Thyrsus circiter pollicaris, pallidus.

Pappophorum cenchroides Lichtenst.! Thyrso cylindraceo, subelongato; Glumis pilosulis, 3-nervibus; Subulis valvula duplo longioribus, ad medium usque plumosis.

Pappophorum cenchroides. R. et S. II. p. 616.

V. sp. Cap. b. sp.

Pedalis et ultra, decumbens, ramosulum, pubescens. Thyrsus 3-pollicaris, densus, nigricans.

c) Spiculae 6-florae; Subulae (flosculorum superiorum) 9, hispidae, *Euraphis.*

Pappophorum pumilio. Thyrso ovato-capitato; Perianthiis pilosulo-scabris: infimo 5-, secundo 7-, reliquis 9-setis.

V. spp. Pers.

Digitalis. Folia pubescentia. Capitulum magnum, densum, dimidiam plantulae partem efficiens, flosculis pallidis, subulis purpureis.

d) Spiculae 6-florae; subulae 3, hispidae, *Triraphis.*

Pappophorum pungens. Thyrso jubali laxo, lucidulo; Perianthiis tenuissime pubescentibus; Subulis aequalibus: intermedia simplici.

Triraphis pungens Br.! R. et S. II. p. 617.

V. sp. nov. Holl.

Tripedalis et ultra. Folia rigidula, subpungentia. Thyrsus s. juba laxa, dodrantalis, pallida. Flosculi superiores, ut in praecedente, steriles.

7. Lepideilema.

Axis caduceiformis. *Locustae* solitariae, lineari-lanceolatae. *Involucellum* coriaceum, duplex: exterius squamae (4—6) abbreviatae, interius squamae (2—3) elongatae: unica longe caudata.

Glumae 2. *Perianthium* bivalve. *Stylus* 1. *Stigma* trifidum.

Lepideilema lancifolium.

V. spp. Brasil.

Bipedale, glabrum, saturate viride. Folia ovato-lanceolata. Axis sesquipalmaris, 5—6-parus. Locustae adpressae, cuneato-teretes, fere pollicares. Involucellum arcte incumbens: squamae exteriores marginibus imbricatae, subcoriaceae, circiter lineam longae, latiores lineam latae, apice inaequaliter dentatae, 5—7-nerves: nervis plerumque furcato-partitis; squamae interiores forma ipsius locustae: extima attenuata in caudam praelongam capillaceam. Glumae lanceolatae, subcoriaceae. Perianthii valvula inferior subcoriacea, superior hyalina, utraque lineari-lanceolata. Stigmata 3, simplicia. Stamina nulla vidi.

Obs. Involucelli exterioris costae s. nervi crassi *Penniseti* setas externas referunt coalitas, interioris cauda setam in Pennisetis intimam elongatam. Stylus 1 et Lodicula nulla ut in Pennisceto, cujus inflorescentia thyrsodes in Lepideilemate simplicissima, depauperata.

CALCUL DES OPPOSITIONS

DE

JUPITER ET DE SATURNE.

OBSERVÉES A St.-PÉTERSBOURG EN 1818,

PAR

P. TARKHANOFF.

(Lu à l'Academie le 9. Juillet 1823.)

Les observations dont j'ai l'honneur de présenter le calcul à l'Académie Impériale, ont été faites par Mr. l'Académicien WISNIEWSKY et par moi conjointement. Nous avons observé les deux planètes au méridien, Mr. WISNIEWSKI au Quart-de-cercle mural de BIRD, de huit pieds de rayon, et moi à l'instrument des passages de TROUGHTON, de cinq pieds, et pour plus d'exactitude nous avons comparé chaque planète avec deux étoiles, nommément: Jupiter avec π et d du Sagittaire, et Saturne avec α et γ du Verseau. On voit ici les observations de Jupiter dans les tableaux suivans.

OBSERVATION DE JUPITER.

Passage au méridien.

Nouveau style	bord occident. ♃	π ♐	d ♐
28. Juin	$18^h 35' 7'',24$	$18^h 57' 59'',93$	$19^h 6' 2'',60$
29. —	18 34 34, 00	18 57 59, 56	19 6 2, 52
30. —	18 33 59, 96	18 57 59, 17	19 6 1, 72
1. Juillet	18 33 25, 72	18 57 58, 38	19 6 0, 84

Distance au Zénith.

Nouveau style	bord supérieur ♃	π ♐	d ♐	Baromètre de Paris	Therm. de Réaum.
28. Juin	82°59′59″,13	81°8′47″,99	79°7′41″,91	28″0‴,6	+ 8°,2
29. —	83 0 39, 71	81 8 49, 07	— — —	28 1, 5	+ 11, 1
30. —	83 1 18, 32	81 8 49, 57	79 7 42, 10	28 1, 7	+ 11, 2
1. Juillet	83 1 55, 48	81 8 50, 48	79 7 43, 08	28 0, 4	+ 12, 6

La distance au Zénith de l'étoile de *d* ♐ n'a pu être observée le 29 Juin, parce qu'un nuage empêcha de voir cette étoile à la lunette du Quart de cercle mural, qui n'est pas achromatique.

J'ai calculé la position moyenne des dites étoiles d'après la détermination de M. Piazzi, qui se trouve dans l'ouvrage de M. Bessel, intitulé: *Fundamenta Astronomiae pro anno* MDCCLV, *ect.*, la voici.

Nouveau style	Ascension droite	mouv. en 24^h	Déclin. australe	mouv. en 24^h
π ♐ le 28. Juin 1818	284°44′27″,03	+ 0″,163	— 21°18′ 3″,77	+ 0″,015
d ♐ — — — — —	286 45 5, 91	+ 0, 139	— 19 15 55, 29	+ 0, 018

La table suivante contient l'aberration et la nutation lunisolaire de ces étoiles, calculées pour deux époques, savoir:

	le 28. Juin	le 1 Juillet
Noeud ascendant de la Lune	1^{s}5°37′,83	1^{s}5°28′,30
Nutation lunisol. en ascens. droite de π ♐	— 10″,11	— 9″,97
— — — — — — — de *d* ♐	— 9, 94	— 9, 79
Nutation lunisol. en déclinaison de π ♐	— 8, 13	— 8, 14
— — — — — — de *d* ♐	— 8, 19	— 8, 20
Aberration en ascension droite de π ♐	+ 21, 46	+ 21, 57
— — — — — — de *d* ♐	+ 21, 06	+ 21, 19
Aberration en déclinaison de π ♐	+ 1, 97	+ 2, 01
— — — — — — de *d* ♐	+ 2, 11	+ 2, 18

Nous aurons donc la position apparente des dites étoiles comme il suit:

Ascension droite apparente.

Nouveau style	de π — — — ♐		de d — — ♐	
	en degrés	en tems	en degrés	en tems
28. Juin	284°44′ 38″,37	18^{h}58′ 58″,56	286°45′ 17″,03	19^{h}7′ 1″,13
29. —	284 44 38, 62	18 58 58, 57	286 45 17, 26	19 7 1, 15
30. —	284 44 38, 87	18 58 58, 59	286 45 17, 50	19 7 1, 17
1. Juillet	284 44 39, 12	18 58 58, 61	286 45 17, 73	19 7 1, 19

Déclinaison apparente australe.

Nouveau style	de π ♐	de d ♐
28. Juin	— 21°18′ 9″,93	— 19°16′ 1″,38
29. —	— 21 18 9, 91	— 19 16 1, 34
30. —	— 21 18 9, 88	— 19 16 1, 30
1. Juillet	— 21 18 9, 86	— 19 16 1, 26

En comparant les passages des dites étoiles au méridien ci-dessus rapportés, avec les ascensions droites apparentes de cette table, on trouve pour le moment du passage de Jupiter, le retard moyen de la pendule par rapport au tems sidéral, le 28 Juin = — 58″,58; le 29 = — 58″,82; le 30 = — 59″,43; le 1 Juillet = — 60″,28. En ajoutant ces quantités au tems de la culmination de Jupiter on a le tems sidéral de la culmination; d'où l'on tire l'ascension droite du bord occidental de Jupiter et le tems moyen solaire de l'observation, comme il suit:

Nouveau style	Tems de la culmination de Jupiter.			Ascens. droite
	sidéral	moyen solaire	en part. decim. du jour	appart. de ♃
28. Juin	18^{h}36′ 5″,82	12^{h}10′ 30″,89	5^h 7′ 10″, 07	279° 1′ 27″,31
29. —	18 35 32, 82	12 6 2. 07	5 3 98, 95	278 53 12, 31
30. —	18 34 59, 39	12 1 32, 82	5 0 87, 31	278 44 50, 89
1. Juillet	18 34 26, 00	11 57 3, 61	4 97 75, 74	278 36 30, 0

Ajoutant les réfractions aux distances au Zénith observées on trouve:

Nouveau style	Distances au Zénith corrigées			Différences de dist. au Zénith	
	bord supér. de ♃	π ♐	d ♐	♃ et π ♐	♃ et d ♐
28. Juin	83°7′ 20″,08	81°14′ 43″,75	79°12′ 34″,57	1°52′ 36″,33	3°54′ 45″,51
29. —	83 7 56, 15	81 14 40, 79	— — —	1 53 15, 36	— — —
30. —	83 8 35, 41	81 14 41, 34	79 12 31, 51	1 53 54, 07	3 56 3, 90
1. Juillet	83 9 8, 48	81 14 38, 57	79 12 29, 49	1 54 29, 91	3 56 38, 99

Ces différences étant combinées avec les déclinaisons apparentes des deux étoiles, donnent:

Déclinaison apparente du bord supérieur de Jupiter.

Nouveau style	par π ♐	par d ♐	Milieu	Différ.
28. Juin	— 23°10′ 46″,26	— 23°10′ 46″,89	— 23°10′ 46″,57	— 0″,63
29. —	— 23 11 25, 27	— — — —	— 23 11 25, 66	— —
30. —	— 23 12 3, 97	— 23 12 5, 20	— 23 12 4, 58	— 1, 23
1. Juillet	— 23 12 39, 77	— 23 12 40, 25	— 23 12 40, 01	— 0, 48
			Différence moyenne	— 0″,78

J'ai ajouté la moitié de la différence moyenne, c'est-à-dire 0″,39, à la déclinaison de Jupiter conclue par π ♐ le 29 Juin, et j'ai obtenu ainsi 23°11′25″,66, comme l'on voit dans la troisième colonne.

En supposant le demi-diamètre équatorial de Jupiter à une distance égale à l'unité = 93″,40, et le rapport de ce demi-diamètre au demi-diamètre polaire = 1000:929, on trouve au moment de l'opposition le demi-diamètre apparent et horizontal de Jupiter = 24″,01, qui étant divisé par le cosinus de la déclinaison devient 26″,12, dont il faut augmenter les ascensions droites du bord occidental de Jupiter, ci-dessus rapportées. Le demi-diamètre vertical de Jupiter est = 22″,30, sa parallaxe de hauteur = 2″,04, et la moitié de l'épaisseur du fil à la lunette du Quart de cercle mural = 3″, qui est à ajouter: on aura donc = 23″,26 à ajouter aux distances au Zénith observées de Jupiter, pour les réduire au centre de cette planète. Avec ces corrections on trouve:

Nouveau style	Ascention droite apparente du centre de ♃	Déclinaison apparente du centre de ♃
28. Juin	279° 1′ 53″,43	— 23°11′ 9″,84
29. —	278 53 38, 44	— 23 11 48, 93
30. —	278 45 17, 02	— 23 12 27, 84
1. Juillet	278 36 56, 12	— 23 13 3, 27

D'où l'on déduit avec l'obliquité apparente de l'Ecliptique = 23°27′54″,40, les positions par rapport à l'Ecliptique comme il suit:

Nouveau style	Longitude apparente de Jupiter	Latitude apparente de Jupiter
28. Juin	278°17′48″,03	+ 0°1′ 9″,56
29. —	278 10 11, 46	+ 0 0 57, 36
30. —	278 2 29, 10	+ 0 0 47, 03
1. Juillet	277 54 47, 50	+ 0 0 39, 38

Pour réduire les lieux apparents de Jupiter en lieux vrais, on a la nutation lunaire en longitude le 28. Juin = + 10″,50; le 1. Juillet = + 10″,41, et la nutation solaire le 28. Juin = — 0″,26; le 1. Juillet = — 0″,37; de même l'aberration en longitude = — 11″,02 et en latitude = — 0″,20. On trouve ainsi:

Nouveau style	Lieux géocentriques vrais de Jupiter déterminés par l'observation	
	Longitude vraie de ♃	Latitude vraie de ♃
28. Juin	9ˢ8°17′ 47″,25	+ 0°1′ 9″,36
29. —	9 8 10 10, 60	+ — 57, 16
30. —	9 8 2 28, 18	+ — 46, 83
1. Juillet	9 7 54 46, 51	+ — 39, 18

Avant de calculer par les tables la position géocentrique de Jupiter, nous allons déterminer l'erreur des tables solaires; malheureusement les nuages ne m'avaient pas permis d'observer le soleil qu' une seule fois, dans l'intervalle des observations de Jupiter, savoir le 30 Juin; le centre du soleil passa au méridien ce jour là

à 6h 33′ 33″, 44 tems de la pendule de Brockbanks. Au moyen de la marche de cette pendule ci-dessus rapportée, on trouve en interpolant la correction du tems de passage du soleil = + 59″,06. L'ascension droite du soleil observée est donc en tems = 6h 34′ 32″, 50 et en degrés = 98° 38′ 7″, 5; le tems moyen solaire étant lors de l'observation 12h 3′ 3″, 95. Supposant l'obliquité apparente de l'Ecliptique = 23° 27′ 54″, 4, on calcule de cette observation la longitude apparente du soleil = 3s 7° 55″ 50″ 78. Mais les tables du soleil publiées par le bureau des Longitudes de France donnent pour cette même époque la longitude apparente du soleil = 3s 7° 55′ 45″ 66; donc l'erreur en longitude est de 5″, 12, qui sont à ajouter à la longitude du soleil calculée par ces tables. Voici les élémens tirés des tables mentionnées pour les moments des observations de Jupiter.

Lieux héliocentriques de la terre.

Nouveau style	longit. corrigée	Rayon vecteur	log. du ray. vecteur
28. Juin	9s 6° 30′ 49″, 48	1,0167931	0, 0072326
29. —	9 7 27 51, 74	1,0168116	0, 0072405
30. —	9 8 24 54, 00	1,0168251	0, 0072463
1. Juillet	9 9 21 56, 26	1,0168323	0, 0072493

J'ai calculé pour les mêmes époques les lieux héliocentriques de Jupiter par les nouvelles tables de M. Bouvard, qui ont été publiées par le bureau des longitudes de France en 1808. Voici les lieux réduits de la division décimale de l'angle droit en parties de la division sexagésimale:

Lieux héliocentriques de Jupiter.

Nouveau style	longitude	latitude	Rayon vecteur	log. du ray. vecteur
28. Juin	9s 7° 56′ 50″, 59	+ 0° 0′ 48″, 84	5,2097232	0,7168146. 492
29. —	9 8 1 47, 71	+ 0 0 42, 03	5,2093566	0,7167840. 875
30. —	9 8 6 44, 86	+ 0 0 35, 20	5,2089896	0,7167534. 903
1. Juillet	9 8 11 42, 08	+ 0 0 28, 38	5,2086255	0,7167231. 328

Moyennant ces données on trouve les quantités suivantes:

Nouveau style	Rayon vecteur raccourci	Log. du rayon vecteur raccourci	Commutation	Elongation
28. Juin	5,2097231	0,7168146.370	+ 1°26′ 1″,12	5ˢ28°13′ 7″,55
29. —	5,2093565	0,7167840.785	+ 0 33 55, 97	5 29 17 50, 27
30. —	5,2089895	0,7167534.839	— 0 18 9, 14	6 0 22 33, 31
1. Juillet	5,2086254	0,7167231.286	— 1 10 14, 19	6 1 27 16, 32

D'où l'on tire les lieux géocentriques de Jupiter suivans:

Nouveau style	Géocentrique Longitude	Géocentrique Latitude	Log. de la distance de ♃ à la terre
28. Juin	278°17′41″,93	+ 0°1′ 0″,68	0, 6225583
29. —	278 10 1, 48	+ 0 0 52, 22	0, 6224841
30. —	278 2 20, 69	+ 0 0 43, 74	0, 6224403
1. Juillet	277 54 39, 94	+ 0 0 35, 26	0, 6224272

En comparant ces lieux géocentriques vrais de Jupiter, avec les lieux observés au-dessus rapportés, nous trouvons les erreurs suivantes.

Nouveau style	En longitude	En latitude
28. Juin	— 5″,32	— 8″.68
29. —	— 9, 12	— 4, 94
30. —	— 7, 49	— 3, 09
1. Juillet	— 6, 57	— 3, 92
Erreurs moyennes	— 7, 125	— 5, 16,

qui étant réduites au soleil à raison des distances 5,209 et 4,193 donnent les corrections des tables de Jupiter de M. Bouvard: en longitude + 5″,74 et en latitude = + 4″,15.

On trouve par approximation le tems de l'opposition de Jupiter le 30 Juin le soir à 3ʰ43′53″,5 tems moyen solaire de St-Pétersbourg. En calculant pour ce moment par les tables les lieux de la terre et de Jupiter, on a la longitude héliocentriques vraie de la terre = 9ˢ8° 5′ 2″,3 et celle de Jupiter = 9ˢ8° 5′ 1″,81;

qui étant corrigées par les erreurs des tables ci-dessus déterminées devient ♁ $= 9^s8^\circ5'7'',42$ et ♃ $= 9^s8^\circ5'7'',54$. Jupiter étant donc encore éloigné de l'opposition de $0'',12$ en arc. Or on a le mouvement horaire de la terre $2'22''99$ et celui de Jupiter $= 12'',41$; partant le mouvement relatif $= 2'10'',58$; d'où l'on tire pour $0'',12$ de différence en arc $3''309$ de tems. L'opposition est donc arrivée le 30 Juin après midi à $3^h43'56''81$ tems moyen solaire de St.-Pétersbourg; la longitude héliocentrique de Jupiter et de la terre étant $= 9^s8^\circ5'7'',55$ et la latitude héliocentrique de Jupiter $0^\circ0'41''72$ boréale.

Observations de Saturne.

Cette planète a été comparée avec les étoiles α et γ du Verseau. Voici les tableaux de ces observations.

Passages au méridien.

Nouveau style	α ♒	γ ♒	Bord occid. de ♄
5. Sept.	$21^h56'\ 18'',48$	$22^h12'\ 7'',60$	$23^h8'\ \ 2'',17$
7. —	21 56 16, 58	22 12 5, 96	23 7 26, 22
8. —	21 56 16, 36	22 12 5, 56	23 7 9, 06
9. —	21 56 16, 44	22 12 5, 56	23 6 52, 12
11. —	21 56 16, 18	22 12 5, 30	23 6 18, 07

Distances au Zenith.

Nouveau style	α ♒	γ ♒	Bord supér. de ♄	Baromètre	Therm. de Reaum. α et γ ♒	Therm. de Reaum. ♄
5. Sept.	— — —	$62^\circ12'28'',50$	$67^\circ51'19'',47$	$28''\ 3''',2$	+ 8°,8	+ 8, 5
7. —	$61^\circ6'29'',82$	62 12 28, 12	67 54 57, 16	— 1, 9	+ 10, 9	+ 10, 3
8. —	61 6 29, 42	62 12 28, 11	67 56 49, 10	— 1, 8	+ 8, 3	+ 8, 0
9. —	61 6 29, 42	62 12 28, 11	67 58 39, 22	— 0, 5	+ 8, 2	+ 8, 9
11. —	61 6 29, 24	62 12 27, 86	68 2 12, 19	27 11, 9	+ 9, 1	+ 9, 1

J'ai pris la position moyenne de ces étoiles dans l'ouvrage cité de M. le Professeur Bessel; et j'ai rassemblées dans le tableau suivant toutes les quantités nécessaires, pour la determination de la positon apparente de ces étoiles; elles sont les suivantes;

		le 5. Sept.	le 11. Sept.
Ascension droite moyenne	de α ♒	329° 6′ 59″,61	329° 7′ 0″,39
— — — — —	de γ ♒	333 4 17, 72	333 4 18, 51
Déclinaison moyenne	de α ♒	—1 11 44, 24	—1 11 43, 95
— — — — —	de γ ♒	—2 17 44, 65	—2 17 44, 34
Noeud ascendant de la Lune		1ˢ 1°58, 5	1ˢ 1°39, 2
Nutation lunisol. en ascen. droite . .	de α ♒	— 7, 79	— 7, 65
— — — — —	de γ ♒	— 7, 67	— 7, 50
Nutation lunisol. en déclinaison . .	de α ♒	— 7, 32	— 7, 22
— — — — —	de γ ♒	— 6, 95	— 6, 85
Aberration en ascension droite . . .	de α ♒	+ 18, 32	+ 17, 69
— — — — —	de γ ♒	+ 18, 56	+ 18, 04
Aberration en déclinaison	de α ♒	+ 7, 62	+ 7, 76
— — — — —	de γ ♒	+ 7, 59	+ 7, 70

On a ainsi :

Ascension droite apparente.

Nouveau style	de α ♒ en degrés	de α ♒ en tems	de γ ♒ en degrés	de γ ♒ en tems
5. Sept.	329°7′ 10″,13	21ʰ56′ 28″,67	333°4′ 28″,61	22ʰ12′ 17″,90
7. —	329 7 10, 24	21 56 28, 68	333 4 28, 76	22 12 17, 92
8. —	329 7 10, 31	21 56 28, 68	333 4 28, 84	22 12 17, 92
9. —	329 7 10, 33	21 56 28, 69	333 4 28, 92	22 12 17, 93
11. —	329 7 10, 44	21 56 28, 69	333 4 29, 05	22 12 17, 93

Déclinaison apparente australe.

Nouveau style	de α ♒	de γ ♒
5. Sept.	— 1°11′43″,93	— 2°17′44″,01
7. —	— 1 11 43, 74	— 2 17 43, 82
8. —	— 1 11 43, 66	— 2 17 43, 73
9. —	— 1 11 43, 56	— 2 17 43, 64
11. —	— 1 11 43, 41	— 2 17 43, 49

En comparant les passages ci-dessus rapportés de ces étoiles avec leur ascensions droites en tems, on trouve la marche de la pendule, d'où l'on déduit par

interpolation les corrections à faire aux passages de Saturne, pour en avoir l'ascension droite apparente. Ce calcul m'a donné les quantités suivantes:

Nouveau style	Tems de la culmination du bord occident. de Saturne. Sidéral	moyen solaire	Ascension droite apparente du bord occident. de Saturne.
5. Sept.	23h8′ 12″,42	0h10′ 35″,11	347° 3′ 6″,29
7. —	23 7 38, 25	0 2 9, 20	346 54 33, 73
8. —	23 7 21, 40	11 57 56, 49	346 50 21, 05
9. —	23 7 4, 43	11 53 43, 66	346 46 6, 40
11. —	23 6 30, 65	11 45 18, 22	346 37 39, 75

Corrigeant aussi les distances au Zénith observées par la réfraction, on a.

Nouveau style	Distances au Zénith corrigées. de α ♒	de γ ♒	du bord supérieur de ♄	Différence des distances au Zénith corrigées. ♄ et α ♒	♄ et γ ♒
5. Sept.	— — — —	62° 14′ 18″,48	67° 53′ 41″,70	— — — —	5° 39′ 23″,22
7. —	61° 8 13, 45	— — 16, 58	— 57 18, 03	6° 49′ 4″,58	— 43 1, 44
8. —	— — 14, 31	— — 17, 89	— 59 11, 72	— 50 57, 41	— 44 53, 83
9. —	— — 13, 95	— — 17, 52	68 1 0, 86	— 52 46, 91	— 46 43, 34
11. —	— — 13, 34	— — 16, 61	— 4 33, 90	— 56 20, 56	— 50 17, 28

Et en ajoutant les differences des distances Zénitales à la déclinaison apparente des étoiles mentionnées, on trouve.

Déclinaison apparente du bord supérieur de Saturne.

Nouveau style	par α ♒	par γ ♒	Milieu.
5. Sept.	— — — —	— 7° 57′ 7″,23	— 7° 57′ 8″,88
7. —	— 8° 0′ 48″,32	— 8 0 45, 27	— 8 0 46, 79
8. —	— 8 2 41, 07	— 8 2 37, 56	— 8 2 39, 31
9. —	— 8 4 30, 46	— 8 4 26, 98	— 8 4 28, 72
11. —	— 8 8 3, 93	— 8 8 0, 73	— 8 8 2, 33

Le demi-diamètre de Saturne à une distance égale à l'unité étant = 85″, 85, on a son demi-diamètre apparent horisontal dans l'opposition — 10″,04, qui étant

divisé par le cosinus de la déclinaison devient = 10″,14, dont il faut augmenter les ascensions droites observées du bord occidental de Saturne, pour les réduire au centre. De même on a pour la réduction des déclinaisons observées du bord supérieur de cette planète, les corrections suivantes: la parallaxe de hauteur = + 0,95, le demi-diamètre apparent — 10″,04, et la moitié de l'épaisseur du fil à la lunette du Quart-de-cercle mural = — 3″.

Moyennant ces quantités on a:

Nouveau style	Ascens. droite appar. du centre de ♄	Déclinaison apparente du centre de ♄
5. Sept.	347° 3′ 16″,43	— 7° 57 20″,96
7. —	346 54 43, 88	— 8 0 58, 88
8. —	346 50 31, 19	— 8 2 51, 41
9. —	346 46 16, 54	— 8 4, 40, 82
11. —	346 37 49, 89	— 8 8 14, 44

En supposant l'obliquité apparente de l'écliptique le 5. Sept. = 23°27′ 55″, 20 et le 11 = 23°27′ 55″, 28, on en déduit les positions apparentes et observées de Saturne par rapport à l'écliptique, comme il suit:

Lieux géocentriques apparens.

Nouveau style	Longitude de ♄	Latitude de ♄
5, Sept.	344° 59′ 58″,61	— 2° 12′ 47″,35
7. —	344 50 45, 80	— 2 12 51, 09
8. —	344 46 11, 33	— 2 12 57, 69
9. —	344 41 36, 19	— 2 13 0, 71
11. —	344 32 30, 72	— 2 13 3, 10

Pour déterminer l'erreur des tables solaires, j'ai observé les passages du soleil au méridien le 8, 9 et 11. Sept.; d'où j'ai tiré moyennant la marche de la pendule, qui a été déterminée par les observations de α et de γ ♒ ci-dessus rapportées, les ascensions droites apparentes du Soleil et ensuite ses longitudes apparentes, comme l'on voit dans le tableau suivant:

Nouveau style	Passage au méridien du centre du ☉ tems sidéral	t. moyen solaire	Ascension droite apparente du ☉	Longitude apparente du ☉
8. Sept.	11h 5′ 9″,30	11h 57′ 42,70	166° 17′ 19″,50	165° 6′ 19″,20
9. —	11 8 45, 48	11 57 22, 35	167 11 22, 20	166 4 39, 50
11. —	11 15 57, 20	11 56 41, 09	168 59 18, 00	168 1 23, 75

Ayant calculé par les tables du soleil, publiées par le bureau des Longitudes de France, les longitudes du soleil pour ces époques, j'ai trouvé ce qui suit:

Longitude apparente du Soleil		Erreur des tables solaires
8. Sept.	165° 6′ 18″,19	— 1, 01
9. —	166 4 38, 14	— 1, 36
11. —	168 1 22, 29	— 1, 46

Correction moyenne des tables du soleil + 1″,28

Après avoir corrigé ainsi les tables solaires, on trouve pour les momens des observations de Saturne, les lieux géocentriques de la terre de la manière suivante:

Lieux héliocentriques de la terre.

Nouveau style	Longitude corrigée	Rayon vecteur	Log. du rayon vecteur
5. Sept.	342° 41′ 34″,50	1, 0074409	0, 0032194
7. —	344 37 49, 75	1, 0069081	0, 0029898
8. —	345 35 59, 46	1, 0066388	0, 0028737
9. —	346 34 10, 62	1, 0063676	0, 0027566
11. —	348 30 37, 61	1, 0058226	0, 0025211

Les tables de Saturne, publiées par le même bureau, donnent pour ces époques, les lieux héliocentriques de Saturne suivans:

Nouveau style	Longitude	Latitude	Rayon vecteur	Log. du rayon vecteur
5. Sept.	344° 45′ 30″,78	— 1° 58′ 56″,71	9, 662206	0, 9853908
7. —	344 49 25, 11	— 1 59 2, 89	9, 669620	0, 9853645
8. —	344 51 22, 29	— 1 59 5, 99	9, 668330	0, 9853515
9. —	344 53 19, 49	— 1 59 9, 08	9, 668043	0, 9853385
11. —	344 57 14, 00	— 1 59 15, 24	9, 667462	0, 9853125

D'où l'on tire par le calcul trigonométrique les quantités suivantes:

Nouveau style	Rayon vecteur raccourci	Logar. du rayon vect. raccourci	Commutation	Élongation
5. Sept.	9, 66341	0, 9851306	+ 2° 3′ 56″, 27	177° 41 38″, 50
7. —	9, 66282	0, 9851038	+ 0 11 35, 36	179 47 3, 70
8. —	9, 66252	0, 9850906	— 0 44 37, 17	180 49 48, 46
9. —	9, 66223	0, 9850775	— 1 40 51, 13	181 52 34, 46
11. —	9, 66164	0, 9850509	— 3 33 23, 61	183 58 10, 05

Nouv. style	Longitude Géocentrique vraie de Saturne	Latitude	Log. de la dist. de ♄ à la terre.	Aberration en longitude	Aberration en latitude	Nutation en long.
5. Sept.	344° 59′ 56″, 00	— 2° 12 45, 89	0. 9373525	+ 13″, 63	+ 0″, 19	— 8″, 93
7. —	344 50 46, 06	— 2 12 53, 03	0, 9373131	+ 13, 64	+ 0, 16	— 8, 81
8. —	334 46 11, 00	— 2 12 56, 17	0, 9373162	+ 13, 64	+ 0, 15	— 8, 91
9. —	344 41 36, 17	— 2 12 59, 05	0, 9373347	+ 13, 64	+ 0, 13	— 8, 94
11. —	344 32 27, 57	— 2 13 3, 93	0, 9374165	+ 13, 59	+ 0, 11	— 9, 01

Avant de comparer les lieux géocentriques observés de Saturne evec les lieux calculés par les tables, nous ajouterons aux premiers l'aberration et la nutation, après avoir changé auparavant leurs signes, et nous obtiendrons en conséquence:

Nouveau style	Longitude vraie observée de ♄	Latitude vraie observée de ♄	Erreur des tables en longitude	Erreur des tables en latitude
5. Sept.	344° 59′ 53″, 91	— 2° 12′ 47″, 16	+ 2″, 09	+ 1″, 27
7. —	344 50 40, 97	— 2 12 50, 93	+ 5, 09	— 2, 10
8 —	344 46 6, 60	— 2 12 57, 54	+ 4, 40	+ 1, 37
9. —	344 41 31, 49	— 2 13 0, 58	+ 4, 67	+ 1, 53
11. —	344 32 26, 14	— 2 13 2, 99	+ 1, 43	— 0, 94

Erreurs moyennes des lieux géocent. + 3″, 536 + 0″, 226

Ces erreurs étant réduites au soleil à raison de 9, 662 à 8, 665 donnent les corrections des tables de Saturne suivantes: en longitude — 3″, 171 et en latitude = — 0″, 202.

*

J'ai calculé par approximation le tems de l'opposition de Saturne le 8. Sept. à $4^h\,57'\,20'',0$ tems moyen. Mais on a pour cette époque par les tables les lieux héliocentriques de la terre et de Saturne, corrigés par les erreurs ci-dessus déterminées comme il suit: longitude héliocentrique de la terre $= 11^s\ 14^\circ\ 49\ 47'', 03$ longitude héliocentrique de Saturne $= 11^s\ 14^\circ\ 49'\ 46'', 34$. L'opposition était donc déjà passée, et la distance des deux planètes était en arc $= 0, 69$. Or le mouvement horaire de la terre étant $2'\ 30'', 06$ et celui de Suturne $4'', 91$, on a le mouvement horaire relatif $= 2'\ 25'', 15$, qui donne pour l'arc ci-dessus mentionné $17', 11$ de tems. D'où l'on conclut le tems de l'opposition le 8 Septembre 1818 le matin à $4^h\ 57'\ 2'', 89$ tems moyen solaire de St.-Petersbourg; la longitude héliocentrique corrigée de la terre et de Saturne étant $= 11^s\ 14^\circ\ 49'\ 46'', 31$ et la latitude australe de Saturne corrigée $= -\ 1^\circ\ 59'\ 3'', 722$.

NOTE

SUR LA

VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES

DANS LES

PROBLÈMES DE MÉCANIQUE.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lue le 2 Décembre 1829.)

Imaginons un système de points liés entre eux d'une manière quelconque, et sollicité par des forces accélératrices de telle nature que la somme des produits de chaque force par l'élément de sa direction soit une différentielle exacte. Désignons par dV cette différentielle, par T la demi-somme des forces vives du système, par $x, y, z \dots$ les coordonnées quelconques de différents points du même système et enfin par $\delta x, \delta y, \delta z \dots$ un système de vitesses virtuelles; nous aurons par les principes de la Mécanique analytique

$$o = \left(d\frac{dT}{dx'} - \frac{dT}{dx}\right)\delta x + \left(d\frac{dT}{dy'} - \frac{dT}{dy}\right)\delta y + \left(d\frac{dT}{dz'} - \frac{dT}{dz}\right)\delta z + \dots + \delta V$$

ou bien

$$o = d\left(\frac{dT}{dx'}\delta x + \frac{dT}{dy'}\delta y + \frac{dT}{dz'}\delta z + \dots\dots\right) - \delta T + \delta V,$$

$x', y', z' \dots$ désignent les différentielles $dx, dy, dz \dots$

En prenant un autre système Δx, Δy, Δz.... de vitesses virtuelles, on aura de même

$$o = d\left(\frac{dT}{dx'}\Delta x + \frac{dT}{dy'}\Delta y + \frac{dT}{dz'}\Delta z + \ldots\right) - \Delta T + \Delta V.$$

Si l'on différentie l'avant-dernière équation avec la caractéristique Δ, la dernière avec la caractéristique δ et qu'on retranche le second résultat du premier, on aura l'équation

$$o = d\left[\Delta\frac{dT}{dx'}\delta x - \delta\frac{dT}{dx'}\Delta x + \Delta\frac{dT}{dy'}\delta y - \delta\frac{dT}{dy'}\Delta y + \Delta\frac{dT}{dz'}\delta z - \delta\frac{dT}{dz'}\Delta z + \ldots\ldots\right]$$

qui subsistera quel que soit le système, entièrement libre ou assujetti à certaines conditions, car notre démonstration est indépendante de la nature du système.

Comme les valeurs de x, y, z.... exprimées en fonction du tems et de constantes arbitraires, satisfont *identiquement* aux équations de condition du système, si le système n'est pas libre, et comme δx, δy, δz.... sont tout-à-fait arbitraires, si le système est libre; il est clair que dans tous les cas on peut supposer que les caractéristiques Δ et δ, se rapportent aux constantes arbitraires renfermées dans x, y, z...

Supposons maintenant que, la nature du système, c'est-à-dire les équations de condition qui en lient les différentes parties restant les mêmes, on ajoute de nouvelles forces au système. Soit $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \ldots = \delta U$ la somme des moments virtuels de ces forces, δU peut ne pas être une différentielle exacte.

Nous aurons pour le mouvement qui résulte du nouveau système des forces l'équation suivante

$$\left(d\frac{dT}{dx'} - \frac{dT}{dx}\right)\delta x + \left(d\frac{dT}{dy'} - \frac{dT}{dy}\right)\delta y + \left(d\frac{dT}{dz'} - \frac{dT}{dz}\right)\delta z + \ldots + \delta V = \delta U$$

δx, δy, $\delta z \ldots$ restant les mêmes que dans le cas $\delta U = o$. Supposons qu'après avoir résolu le problème dans ce dernier cas, on veuille étendre la même solution, en considérant comme variables les constantes arbitraires introduites par l'intégration, au cas même où δU n'est pas nul. Désignons par Δ les différentielles dues à la variation des constantes arbitraires, et supposons, ce qui est permis,

$$\Delta x = o, \quad \Delta y = o, \quad \Delta z = o \cdots$$

nous aurons d'abord

$$\Delta \frac{dT}{dx'} \delta x + \Delta \frac{dT}{dy'} \delta y + \Delta \frac{dT}{dz'} \delta z + \cdots\cdots = \delta U$$

et par suite, en suivant la route tracée par Lagrange, nous parviendrons aux formules de la Mécanique analytique pour la variation des constantes arbitraires, formules qui se trouveront ainsi démontrées pour un système quelconque libre ou non.

Il existe des constantes dont les différentielles se trouvent immédiatement déterminées. Ce sont toutes celles introduites par l'intégration immédiate de l'équation

$$\left(d\frac{dT}{dx'} - \frac{dT}{dx}\right)\delta x + \left(d\frac{dT}{dy'} - \frac{dT}{dy}\right)\delta y + \left(d\frac{dT}{dz'} - \frac{dT}{dz}\right)\delta z + \cdots + \delta V = o$$

dans laquelle on aura attribué aux vitesses virtuelles δx, δy, $\delta z \cdots$ des valeurs propres à la rendre une différentielle exacte. Pour le faire voir observons que quelles que soient les variations δx, δy, $\delta z \cdots$ on peut toujours supposer qu'elles résultent de certaines variations des constantes arbitraires a, $b \cdots$ contenues dans x, y, $z \cdots$ Pour cela il n'y a qu'à déterminer δa, $\delta b \cdots$ par les équations :

$$\delta x = \frac{dx}{da}\delta a + \frac{dx}{db}\delta b + \cdots\cdots$$

$$\delta y = \frac{dy}{da}\delta a + \frac{dy}{db}\delta b + \cdots\cdots$$

$$\delta z = \frac{dz}{da}\delta a + \frac{dz}{db}\delta b + \cdots\cdots$$

. . . .

On peut donc supposer qu'un principe quelconque de Mécanique résulte d'un système de variations δa, $\delta b \cdots$ attribuées aux constantes a, $b \cdots$

Désignons par K la constante égale à l'intégrale de la différentielle exacte

$$\left(d\frac{dT}{dx'} - \frac{dT}{dx}\right)\delta x + \left(d\frac{dT}{dy'} - \frac{dT}{dy}\right)\delta y + \left(d\frac{dT}{dz'} - \frac{dT}{dz}\right)\delta z + \cdots + \delta V = o$$

on aura en faisant tout varier selon Δ

$$dK = \Delta \frac{dT}{dx'}\delta x + \Delta \frac{dT}{dy'}\delta y + \cdots\cdots$$

Or on a trouvé, quelles que soient les vitesses virtuelles δx, δy, $\delta z \cdots$;

$$\Delta\frac{dT}{dx'}\delta x+\Delta\frac{dT}{dy'}\delta y+\Delta\frac{dT}{dz'}\delta z+\cdots\cdots=\delta U,$$

on aura donc

$$dK=\delta U$$

pourvu que la caractéristique δ dans le second membre de cette équation ne s'applique qu'aux quantités a, b, $\cdots$ qui par leurs variations donnent l'intégrale dont K est la constante.

Pour montrer une application de cette formule générale, supposons que x, y, $z\cdots$ soient les coordonnées rectangulaires et que la quantité V et les équations de condition données par la nature du système, soient indépendantes de l'origine et de la position des axes coordonnés; en sorte qu'en supposant

$$\begin{aligned}
x&=a+\alpha x_{,}+\beta y_{,}+\gamma z_{,}\\
y&=b+\alpha' x_{,}+\beta' y_{,}+\gamma' z_{,}\\
z&=c+\alpha'' x_{,}+\beta'' y_{,}+\gamma'' z_{,}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

la quantité V et les équations de condition seront exprimées en $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ $\cdots\cdot$ précisément de la même manière qu'elles l'étaient en x, y, $z\cdots\cdots$

On peut supposer que le variations δx, δy, $\delta z\cdots$ soient relatives aux constantes a, b, c, $\alpha,\cdots\cdot\gamma''$, on satisfera par cette hypothèse aux équations de condition et l'on aura de plus

$$\begin{aligned}
\delta V&=o\\
\delta x&=\delta a+x_{,}\delta\alpha+y_{,}\delta\beta+z_{,}\delta\gamma\\
\delta y&=\delta b+x_{,}\delta\alpha'+y_{,}\delta\beta'+z_{,}\delta\gamma'\\
\delta z&=\delta c+x_{,}\delta\alpha''+y_{,}\delta\beta''+z_{,}\delta\gamma''
\end{aligned}$$

mais comme

$$\begin{aligned}
x_{,}&=\alpha\,(x-a)+\alpha'\,(y-b)+\alpha''\,(z-c)\\
y_{,}&=\beta\,(x-a)+\beta'\,(y-b)+\beta''\,(z-c)\\
z_{,}&=\gamma\,(x-a)+\gamma'\,(y-b)+\gamma''\,(z-c),
\end{aligned}$$

on trouvera en mettant ces valeurs dans celles de δx, δy, δz et en ayant égard aux équations de condition entre les quantités α, $\beta\cdots\gamma''$:

$$+(\alpha''\delta\alpha+\beta''\delta\beta+\gamma''\delta\gamma)\,(z-c)\,\delta x=\delta a+(\alpha'\delta\alpha+\beta'\delta\beta+\gamma'\delta\gamma)\,(y-b)$$
$$+(\alpha''\delta\alpha'+\beta''\delta\beta'+\gamma''\delta\gamma')\,(z-c)\,\delta y=\delta b+(\alpha\delta\alpha'+\beta\delta\beta'+\gamma\delta\gamma')\,(x-a)$$
$$+(\alpha'\delta\alpha''+\beta'\delta\beta''+\gamma'\delta\gamma'')\,(y-b)\,\delta z=\delta c+(\alpha\delta\alpha''+\beta\delta\beta''+\gamma\delta\gamma'')\,(x-a).$$

Supposant

$$\alpha'\delta\alpha''+\beta'\delta\beta''+\gamma'\delta\gamma''=p$$
$$\alpha''\delta\alpha+\beta''\delta\beta+\gamma''\delta\gamma=q$$
$$\alpha\delta\alpha'+\beta\delta\beta'+\gamma\delta\gamma'=r$$

nous aurons

$$\delta x=\delta a+(z-c)\,q-(y-b)\,r$$
$$\delta y=\delta b+(x-a)\,r-(z-c)\,p$$
$$\delta z=\delta c+(y-b)\,p-(x-a)\,q$$

$$\delta\alpha=\alpha''q-\alpha'r,\quad \delta\alpha'=\alpha r-\alpha''p,\quad \delta\alpha''=\alpha'p-\alpha q$$
$$\delta\beta=\beta''q-\beta'r,\quad \delta\beta'=\beta r-\beta''p,\quad \delta\beta''=\beta'p-\beta q$$
$$\delta\gamma=\gamma''r-\gamma'r,\quad \delta\gamma'=\gamma r-\gamma''p,\quad \delta\gamma'=\gamma'p-\gamma q$$

Substituant les valeurs particulières précédentes de δx, δy, $\delta z\cdots\cdots$ dans l'équation

$$d\frac{dT}{dx'}\delta x+d\frac{dT}{dy'}\delta y+d\frac{dT}{dz'}\delta z+\cdots\cdots+\delta V\,dt=0$$

et l'intégrant avec une constante qui doit être de la forme

$$l\delta a+m\delta b+n\delta c+cr+cq+c''p$$

on aura pour les différentielles dl, dm, dn, dc, dc', dc'' des quantités arbitraires l, m, n, c, c', c'' la formule

$$\delta a\frac{dl}{dt}+\delta b\frac{dm}{dt}+\delta c\frac{dn}{dt}+r\frac{dc}{dt}+q\frac{dc'}{dt}+p\frac{dc''}{dt}=\frac{\delta U}{da}\delta a+$$
$$\frac{dU}{db}\delta b+\frac{dU}{dc}\delta c+\frac{dU}{d\alpha}\delta\alpha+\cdots\cdots+\frac{dU}{d\gamma''}\delta\gamma'';$$

laquelle, mettant pour $\delta\alpha\cdots\delta\gamma''$ leurs valeurs et comparant les coëfficiens de δa, δb, δc, p, q, r, donnera les valeurs de ces mêmes différentielles.

Si au lieu des quantités α, β, $\gamma\cdots\cdots$ liées entr'elles par six équations de condition, on veut employer les trois quantités indépendantes ϑ, φ, ω telles que

$$x = (\cos.\vartheta\cos.\omega - \sin.\vartheta\sin.\omega\cos.\varphi)x_{,} - (\cos.\vartheta\sin.\omega + \sin.\vartheta\cos.\omega\cos.\varphi)y_{,} + \sin.\vartheta\sin.\varphi z_{,}$$

$$y = (\sin.\vartheta\cos.\omega + \cos.\vartheta\sin.\omega\cos.\varphi)x_{,} - (\sin.\vartheta\sin.\omega - \cos.\vartheta\cos.\omega\cos.\varphi)y_{,} - \cos.\vartheta\sin.\varphi z_{,}$$

$$z = \sin.\omega\sin.\varphi x_{,} + \cos.\omega\sin.\varphi y_{,} + \cos.\varphi z_{,}$$

il n'y a qu'à trouver

$$\delta\vartheta = r - \frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi}(p\sin.\vartheta - q\cos.\vartheta)$$

$$\delta\varphi = p\cos.\vartheta + q\sin.\vartheta$$

$$\delta\omega = \frac{1}{\sin.\varphi}(p\sin.\vartheta - q\cos.\vartheta).$$

par les équations $\text{tang.}\,\vartheta = -\frac{\gamma}{\gamma'}$, $\cos.\varphi = \gamma''$, $\text{tang.}\,\omega = \frac{\alpha''}{\beta''}$ et mettre leurs valeurs dans la formule

$$\delta a\frac{dl}{dt} + \delta b\frac{dm}{dt} + \delta c\frac{dn}{dt} + r\frac{dc}{dt} + q\frac{dc'}{dt} + r\frac{dc''}{dt}$$
$$= \frac{dU}{da}\delta a + \frac{dU}{db}\delta b + \frac{dU}{dc}\delta c + \frac{dU}{d\vartheta}\delta\vartheta + \frac{dU}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{dU}{d\omega}\delta\omega$$

la comparaison des coëfficiens donnera sur le champ

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dU}{da},\quad \frac{dm}{dt} = \frac{dU}{db},\quad \frac{dn}{dt} = \frac{dU}{dc},$$
$$\frac{dc}{dt} = \frac{dU}{d\varphi},\quad \frac{dc'}{dt} = \frac{\cos.\vartheta}{\sin.\varphi}\left(\cos.\varphi\frac{dU}{d\vartheta} - \frac{dU}{d\omega}\right) + \sin.\vartheta\frac{dU}{d\varphi},$$
$$\frac{dc''}{dt} = -\frac{\sin.\vartheta}{\sin.\varphi}\left(\cos.\varphi\frac{dU}{d\vartheta} - \frac{dU}{d\omega}\right) + \cos.\vartheta\frac{dU}{d\varphi}.$$

Les quantités constantes l, m, n, dans le cas $\delta U = o$, sont données par les équations

$$\frac{dT}{dx'} + \ldots\ldots = l$$

$$\frac{dT}{dy'} + \ldots\ldots = m$$

$$\frac{dT}{dz'} + \ldots\ldots = n$$

lesquelles sont encore intégrables. On trouvera pour les seconds membres de leurs intégrales les valeurs $lt + l'$, $mt + m'$, $nt + n'$; l, m', n' sont trois nouvelles constantes arbitraires. Dans le cas δU différent de zéro l', m', n' sont variables mais telles que

$$dl' = -t\,dl,\quad dm' = -t\,dm,\quad dn' = -t\,dn$$

donc

$$\frac{dl'}{dt}=-t\frac{dU}{da},\quad \frac{dm'}{dt}=-t\frac{dU}{db},\quad \frac{dn'}{dt}=-t\frac{dU}{dc}.$$

Pour faire disparaître le tems t qui multiplie les différentielles $\frac{dU}{da}$, $\frac{dU}{db}$, $\frac{dU}{dc}$, il suffit d'observer que les quantités a, b, c peuvent ne pas être constantes et qu'on peut supposer

$$a=a'+a''t,\quad b=b'+b''t,\quad c=c'+c''t$$

a', a'', b', b'', c', c'' étant rigoureusement constantes, on aura alors

$$\frac{dU}{da'}=\frac{dU}{da},\quad \frac{dU}{db'}=\frac{dU}{db},\quad \frac{dU}{dc'}=\frac{dU}{dc},\quad \frac{dU}{da''}=t\frac{dU}{da},\quad \frac{dU}{db''}=t\frac{dU}{db},\quad \frac{dU}{dc''}=t\frac{dU}{dc}$$

ce qui donnera

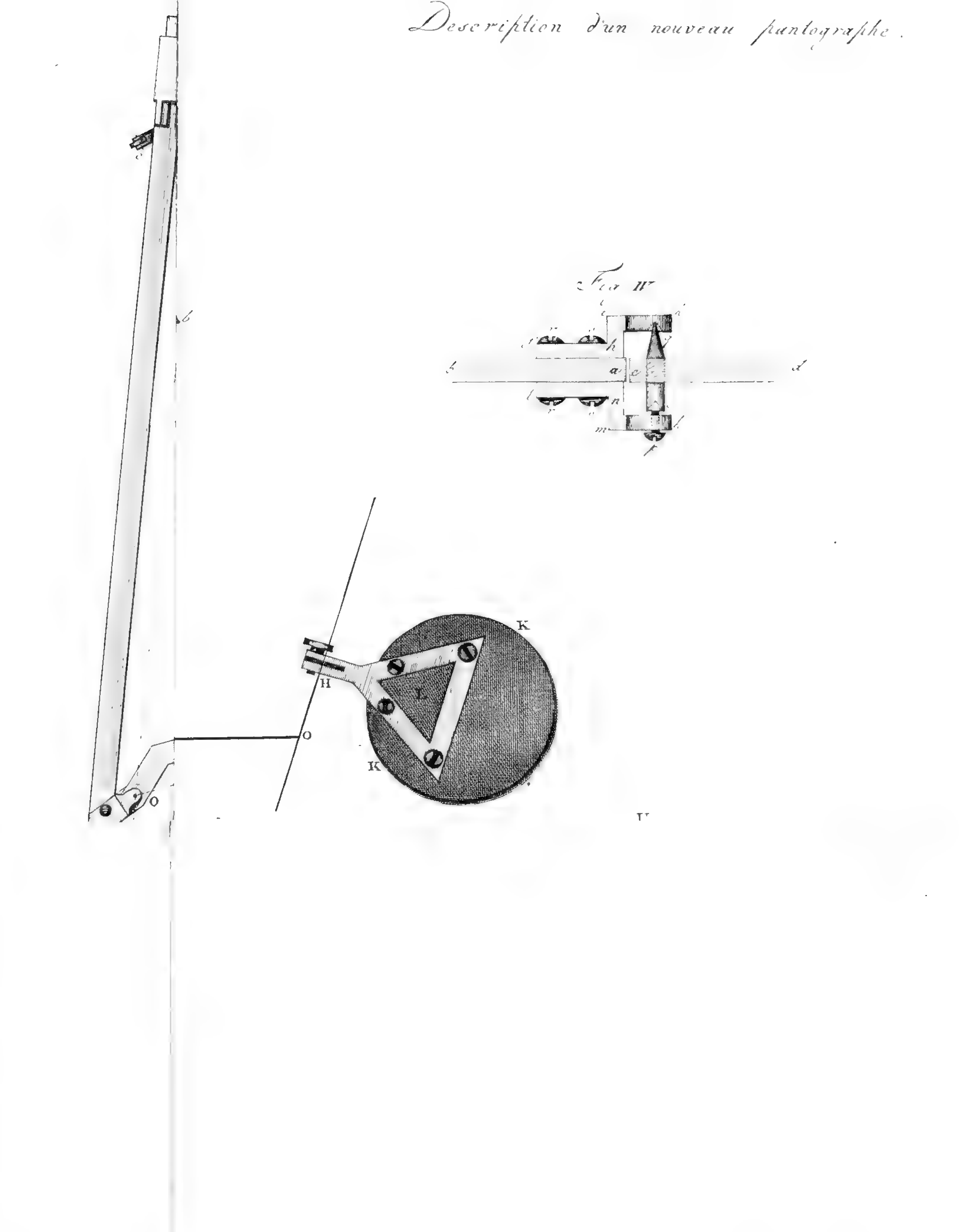
$$\frac{dl}{dt}=\frac{dU}{da'},\quad \frac{dm}{dt}=\frac{dU}{db'},\quad \frac{dn}{dt}=\frac{dU}{dc'}$$

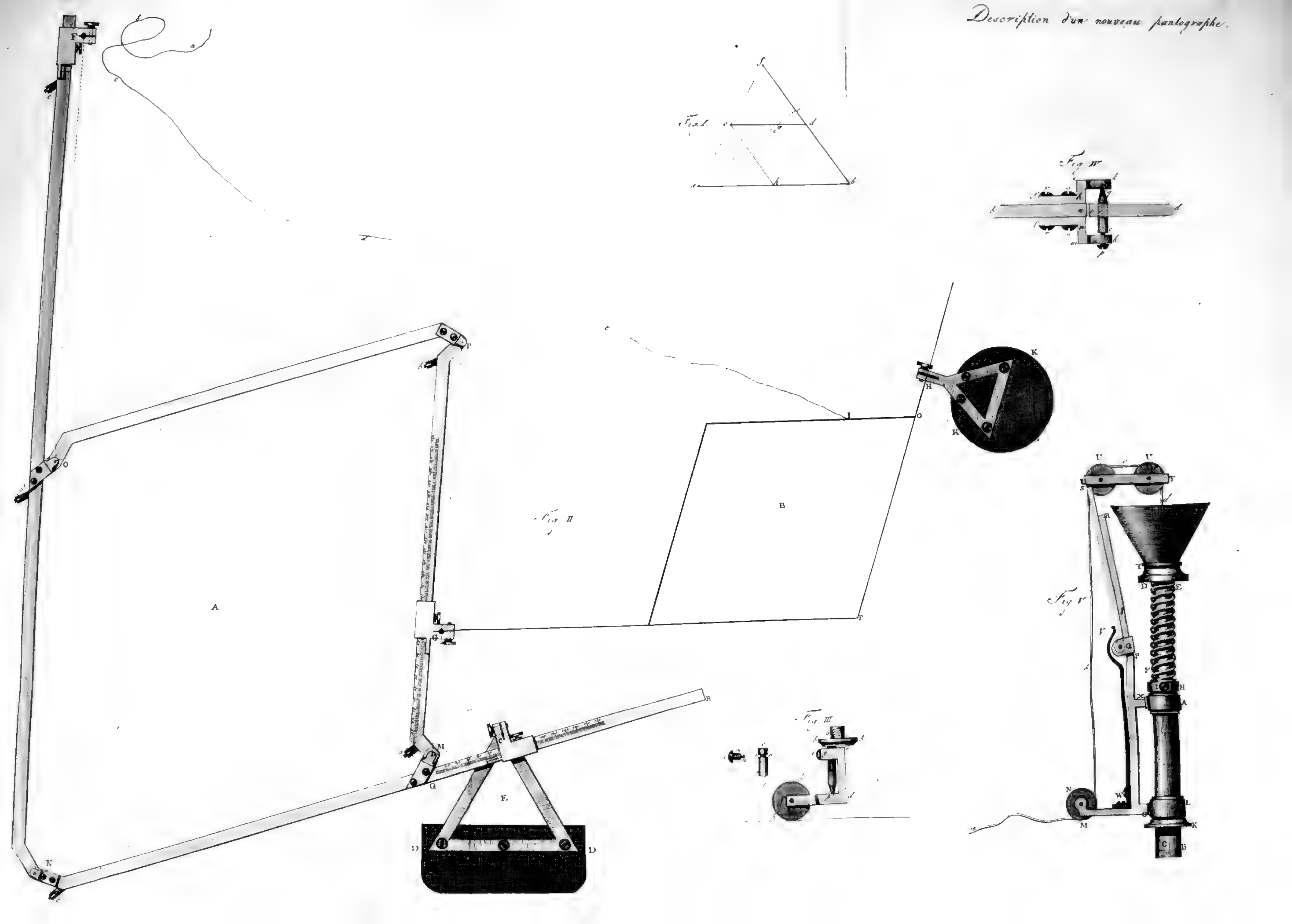
$$\frac{dl'}{dt}=-\frac{dU}{da''},\quad \frac{dm'}{dt}=-\frac{dU}{db''},\quad \frac{dn'}{dt}=-\frac{dU}{dc''}.$$

Si les équations de condition, ainsi que la quantité V ne renferment pas le tems t explicitement, les équations du mouvement ne changeront pas en y changeant t en $t+\varepsilon$ et l'on pourra rapporter la variation δ à la quantité constante ε, ce qui donnera, en supposant $\delta\varepsilon=dt$,

$$\delta x=dx,\quad \delta y=dy\cdots\cdots$$

et fournira par suite un principe dont la constante h éprouvera par l'action des forces perturbatrices une variation $\frac{dh}{dt}=\frac{dU}{d\vartheta}$. Ici comme dans l'exemple précédent, et comme dans tout autre, qu'on pourrait citer il n'est pas nécessaire de supposer, pour avoir la différentielle telle que $\frac{dU}{d\vartheta}$, que la fonction U soit une fonction finie de la constante ϑ, il suffit, en désignant par $X\delta x+Y\delta y+\cdots$ la somme des moments virtuels des forces perturbatrices, de mettre $X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+\cdots$ à la place de $\frac{dU}{d\vartheta}$.


Description d'un nouveau pantographe.
Fig. IV
a
e
d
h
n
m
f
H
O
K
L


Description d'un nouveau pantographe.
Fig. I.
Fig. II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V
A
B
E

NOTE
SUR LES INTÉGRALES DEFINIES;

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 29 Octobre 1828.)

M. Cauchy a fait une observation, sur ce que dans une intégrale définie double le résultat qu'on obtient, en intégrant d'abord par rapport à la première variable et ensuite relativement à la seconde, n'est pas toujours équivalent à celui qu'on trouverait si l'on intégrait d'abord par rapport à la seconde variable et ensuite relativement à la première; en d'autres termes: qu'il n'est pas toujours permis de changer l'ordre de deux intégrations. Après avoir fait cette remarque et spécifié les cas où une intégrale définie double peut avoir deux valeurs différentes, l'illustre géomètre que nous venons de citer calcule, dans les cas les plus importants à considérer, la différence entre les valeurs dont il s'agit, et il obtient, par la suite, des formules aussi simples que générales, soit pour l'évaluation soit pour la transformation des intégrales définies. Les mémoires sur les intégrales définies de M. Cauchy peuvent être comparés aux plus belles découvertes qu'on aît jamais faites dans l'analyse mathématique.

L'objet de cette note roule également sur l'impossibilité de changer l'ordre de deux intégrations, dans une intégrale double. Désignons par $f(x, y)$ une fonction de deux variables x et y et supposons que cette fonction devient infinie lorsque on y fait à la fois

$$x = a, \quad y = b;$$

représentons de plus par x_0 et X, y_0 et Y des quantités constantes satisfaisant aux inégalités

$$x_0 < a < X; \quad y_0 < b < Y.$$

Les intégrales définies

$$\int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy\, dx\,; \quad \int_{y_0}^{Y} \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx\, dy$$

pourront différer l'une de l'autre. Désignons par Δ leur différence en sorte que l'on ait

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{y_0}^{Y} \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx\, dy + \Delta$$

ou

$$\Delta = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy\, dx - \int_{y_0}^{Y} \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx\, dy.$$

J'observe d'abord que, sans altérer la valeur de Δ, on peut mettre des quantités aussi peu différentes de a qu'on le veut, à la place de x_0 et de X; pourvu que l'on substitue à x_0 une quantité inférieure à la quantité a, et à X une quantité supérieure à la même quantité a, ainsi nous pouvons écrire

$$\Delta = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy\, dx - \int_{y_0}^{Y} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x, y)\, dx\, dy$$

ε étant une quantité aussi petite qu'on voudra.

Il est évident, qu'on peut aussi faire une transformation analogue dans les limites relatives à y; et par conséquent il est aussi permis de mettre

$$(2) \qquad \Delta = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x, y)\, dy\, dx - \int_{b-\varepsilon}^{b+\varepsilon} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x, y)\, dx\, dy$$

ou bien

$$(3) \quad \Delta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [f(a+\varepsilon x,\, b+\varepsilon y) - f(a+\varepsilon y,\, b+\varepsilon x)]\, \varepsilon^2\, dy\, dx.$$

Comme la quantité ε peut être quelconque et aussi petite qu'on voudra, il est clair qu'il suffira de calculer le second membre de l'équation (3) après y avoir fait $\varepsilon = o$.

La simplification que cette hypothèse apportera à la formule (3) permettra souvent de trouver assez facilement la quantité Δ.

Nous avons tacitement supposé qu'il n'y avait qu'un seul système des quantités a et b capable de rendre infinie la fonction $f(x, y)$, mais il n'est pas difficile de voir comment on s'y prendrait si l'on avait plusieurs systèmes des quantités analogues aux quantités a et b.

Comme ε n'est assujettie qu'à la condition de ne renfermer entre les limites $a-\varepsilon$, $a+\varepsilon$, $b-\varepsilon$, $b+\varepsilon$, qu'un seul système des quantités capables de rendre infinie la fonction $f(x, y)$, et que du reste cette quantité ε peut être quelconque sans que Δ en souffre la moindre altération, il suffit de n'avoir égard dans la différence

$$[f(a+\varepsilon x,\ b+\varepsilon y) - f(a+\varepsilon y,\ b+\varepsilon x)]\,\varepsilon^2$$

qu'aux termes indépendants de ε.

On peut étendre la même considération aux intégrales triples et parvenir à la conclusion que les termes proportionnels à $\frac{1}{\varepsilon^3}$ dans la fonction $f(a+\varepsilon x,\ b+\varepsilon y,\ c+\varepsilon z)$, sont les seuls qui empêchent de transporter les caractéristiques des intégrales les unes après les autres, a, b, c étant les quantités qui vérifient l'équation $f(a,b,c) = \frac{1}{0}$.

Pour donner une application de notre formule (3) prenons d'abord le cas que Mr. Cauchy avait consideré; supposons

$$f(x, y) = \frac{d\,f(x+y\sqrt{-1})}{dy} = \sqrt{-1}\,\frac{d\,f(x+y\sqrt{-1})}{dx}$$

désignons pour abréger $x+y\sqrt{-1}$ par z, $a+b\sqrt{-1}$ par c et supposons

$$f(c+\varepsilon z) = \frac{A_n}{\varepsilon^n z^n} + \frac{A_{n-1}}{\varepsilon^{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \frac{A_2}{\varepsilon^2 z^2} + \frac{A_1}{\varepsilon z} + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n-1}\int_0^1 \frac{d^n z^n f(c+\varepsilon z t)}{dz^n}$$
$$\times\, t^n\,(1-t)^{n-1}\,dt$$

nous aurons en effaçant les termes qui dépendent de ε

$$\Delta = -A_1\sqrt{-1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{1}{(x+y\sqrt{-1})^2} - \frac{1}{(y+x\sqrt{-1})^2}\right\}dx\,dy$$

ou

$$\Delta = -2A_1\sqrt{-1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx$$

et en effectuant les intégrations indiquées

$$\Delta = 2\pi A_1\sqrt{-1}$$

de plus

$$A_1 = \frac{d^{n-1}\varepsilon^n f(a+b\sqrt{-1}+\varepsilon)}{1\cdot2\cdot3\cdots n-1\; d\varepsilon^{n-1}}$$

en faisant $\varepsilon = o$ après la différentiation; donc

$$\Delta = -2\pi\sqrt{-1}\cdot\frac{d^{n-1}\varepsilon^n f(a+b\sqrt{-1}+\varepsilon)}{1\cdot2\cdot3\cdots n-1\; d\varepsilon^{n-1}}$$

et par suite

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\frac{d f(x+y\sqrt{-1})}{dy}\,dy\,dx = \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\frac{d f(x+y\sqrt{-1})}{dx}\,dx\,dy$$
$$-\pi\sqrt{-1}\;\frac{d^{n-1}\varepsilon^n f(a+b\sqrt{-1}+\varepsilon)}{1\cdot2\cdot3\cdots n-1\; d\varepsilon^{n-1}}$$

ou

$$\int_{x_0}^{X}[f(x+Y\sqrt{-1})-f(x+y_0\sqrt{-1}]dx = \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})]dy$$
$$-2\pi\sqrt{-1}\;\frac{d^{n-1}\varepsilon^n f(a+b\sqrt{-1}+\varepsilon)}{1\cdot2\cdot3\cdots n-1\; d\varepsilon^{n-1}}$$

cette formule est due à M. CAUCHY qui en a donné de nombreuses applications.

Pour donner un exemple qui put nous conduire à un nouveau résultat, supposons

$$f(x,y) = \frac{f(x,y)}{F(x,y)}$$

et admettons que $f(x,y)$, $F(x,y)$ sont des fonctions finies et continues et que $F(x,y)$ ainsi que $\frac{dF(x,y)}{dx}$, $\frac{dF(x,y)}{dy}$ deviennent zéro pour $x=a$ et $y=b$, nous aurons

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\frac{f(x,y)}{F(x,y)}\,dy\,dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\frac{f(x,y)}{F(x,y)}\,dx\,dy + \Delta$$

$$\Delta = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left[\frac{f(a+\varepsilon x,\ b+\varepsilon y)}{F(a+\varepsilon x,\ b+\varepsilon y)} - \frac{f(a+\varepsilon y,\ b+\varepsilon x)}{F(a+\varepsilon y,\ b+\varepsilon x)}\right]\varepsilon^2\,dy\,dx$$

en faisant converger ε vers zéro, nous aurons

$$\Delta = 2f(a,b)\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{1}{\frac{d^2F(a,b)}{da^2}x^2+2\frac{d^2F(a,b)}{da\,db}xy+\frac{d^2F(a,b)}{db^2}y^2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\frac{d^2F(a,b)}{db^2}x^2+2\frac{d^2F(a,b)}{da\,db}xy+\frac{d^2F(a,b)}{db^2}y^2}\right\}dy\,dx$$

en sorte qu'en désignant pour abréger $\frac{d^2F(a,b)}{da^2}$, $\frac{d^2F(a,b)}{da\,db}$, $\frac{d^2F(a,b)}{db^2}$ respectivement par A, B, C et faisant

$$\varrho = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{1}{Ax^2+Bxy+Cy^2}-\frac{1}{Cx^2+Bxy+Ay^2}\right\}dy\,dx$$

on aura

$$\Delta = 2\varrho f(a,b).$$

Supposons que la quantité $AC-B^2$ soit une quantité positive et désignons la par k^2 nous aurons, en intégrant par rapport à y et en observant qu'on peut doubler le résultat et écrire $\int_0^1$ à la place de $\int_{-1}^{+1}$;

$$k\varrho = 2\int_0^1\left\{\text{arc. tg.}\frac{C+Bx}{kx}+\text{arc. tg.}\frac{C-Bx}{kx}-\text{arc. tg.}\frac{A+Bx}{kx}-\text{arc. tg.}\frac{A-Bx}{kx}\right\}\frac{dx}{x}$$

en faisant varier A et B on aura

$$d(k\varrho)=d\left(l\frac{C}{A}\right)\int_0^1\left(\frac{1}{Ax^2+2Bx+C}+\frac{1}{Ax^2-2Bx+C}+\frac{1}{Cx^2+2Bx+A}+\frac{1}{Cx^2-2Bx+A}\right)k\,dx$$

$l\frac{C}{A}$ désigne le logarithme nepérien de $\frac{C}{A}$; en intégrant par rapport à x on aura

$$d(k\varrho)=d\left(l\frac{C}{A}\right)\left\{\text{arc. tg.}\frac{A+B}{k}+\text{arc. tg.}\frac{A-B}{k}+\text{arc. tg.}\frac{C+B}{k}+\text{arc. tg.}\frac{C-B}{k}\right\}.$$

Soit

$$r = \text{arc. tg.}\frac{A+B}{k}+\text{arc. tg.}\frac{A-B}{k}+\text{arc. tg.}\frac{C+B}{k}+\text{arc. tg.}\frac{C-B}{k}$$

on aura

$$dk\varrho = r\cdot l\frac{C}{A};$$

or j'ai

$$\frac{dr}{dB}=o,$$

donc r est indépendant de B, et en faisant $B=o$ j'ai

$$r = 2 \text{ arc. tang. } \frac{A}{k} + 2 \text{ arc. tang. } \frac{B}{k} = \pi$$

donc quel que soit B $$d(k\varrho) = \pi\, d\, l\, \frac{C}{A}.$$

De là en observant que ϱ est zéro quand $A = C$

$$k\varrho = \pi\, l\, \frac{C}{A}$$

par conséquent

$$\varrho = \frac{\pi\, l\, \frac{C}{A}}{\sqrt{(AC - B^2)}}$$

donc

$$\Delta = \frac{2\, FD\,(a, b)\, l \left(\dfrac{\dfrac{d^2 F(a, b)}{db^2}}{\dfrac{d^2 F(a, b)}{da^2}} \right)}{\sqrt{\left[\dfrac{d^2 F(a, b)}{da^2}\, \dfrac{d^2 F(a, b)}{db^2} - \left(\dfrac{d^2 F(a, b)}{da\, db}\right)^2\right]}}$$

ainsi l'on aura, dans l'hypothèse admise relativement aux fonctions $f(x, y)$ et $F(x, y)$

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{f(x, y)}{F(x, y)}\, dy\, dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} \frac{f(x, y)}{F(x, y)} + \frac{2\pi\, f(a, b)\, l \left(\dfrac{\dfrac{d^2 F(a, b)}{db^2}}{\dfrac{d^2 F(a, b)}{da^2}} \right)}{\sqrt{\left[\dfrac{d^2 F(a, b)}{da^2}\, \dfrac{d^2 F(a, b)}{db^2} - \left(\dfrac{d^2 F(a, b)}{da\, db}\right)^2\right]}}.$$

Après avoir trouvé une intégrale telle que $\int_{x_0}^{X} f(x, z)\, dx$ on l'intégre souvent de nouveau, par rapport à la quantité z pour avoir d'autres intégrales c'est-à-dire en supposant

$$\int_{x_0}^{Y} f(x, z)\, dx = \varphi(z)$$

$$\int_{z_0}^{Z} f(x, z)\, dz = \psi(x)$$

on admet souvent $$\int_{x_0}^{X} \psi(x)\, dx = \int_{z_0}^{Z} \varphi(z)$$

cette équation pouvant être inexacte, la formule précédente peut être souvent employée pour en corriger l'inexactitude.

DEUXIÈME NOTE *)

SUR LA

THÉORIE DE LA CHALEUR,

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 8 Juillet 1829.)

Considérons un corps solide terminé par une surface convexe, primitivement échauffé d'une manière arbitraire et rayonnant dans un milieu dont la température est variable. Désignons par x, y, z les coordonnées rectangulaires du corps, par $L = o$ l'équation de sa surface, par v la température au point x, y, z, par λ, μ, ν les angles que la partie extérieure de la normale à la surface $L = o$ fait avec les demi-axes des coordonnées positives; par $f(x, y, z)$ la température initiale, par t le tems, par T enfin une fonction de x, y, z et t dépendante de la température du milieu dans lequel le corps est placé.

La quantité v satisfera, comme on le sait, aux équations différentielles

$$\frac{dv}{dt} = k\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dx}\cos.\lambda + \frac{dv}{dy}\cos.\mu + \frac{dv}{dz}\cos.\nu + hv = T$$

$$v = f(x, y, z).$$

Notre objet est de ramener l'intégration de ces équations au cas où T est nul. Pour cela on recherchera par un moyen quelconque une quantité ψ telle qu'on aît

$$\frac{d\psi}{dx}\cos.\lambda + \frac{d\psi}{dy}\cos.\mu + \frac{d\psi}{dz}\cos.\nu + h\psi = T$$

pour tous les points de la surface $L = o$. Cette quantité trouvée on supposera

$$v = \psi + u$$

---

*) Voyez la première note ci-après à la page 129 de ce même volume.

ce qui donnera $\frac{du}{dt} = k\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \varphi(x, y, z, t)$

$$\frac{du}{dx}\cos.\lambda + \frac{du}{dy}\cos.\mu + \frac{du}{dz}\cos.\nu + hu = o$$

$$u = f(x, y, z) - F(x, y, z)$$

$F(x, y, z)$ étant la valeur de ψ, pour $t = o$, et $\varphi(x, y, z, t)$ celle de

$$k\left(\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2}\right) - \frac{d\psi}{dt}.$$

Cela posé désignons par r une quantité constante, par Y une fonction de x, y, z qui vérifie les équations différentielles

$$o = \frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{d^2Y}{dz^2} + r^2 Y$$

$$o = \frac{dY}{dx}\cos.\lambda + \frac{dY}{dy}\cos.\mu + \frac{dY}{dz}\cos.\nu + hY$$

la première pour tous les points du corps, la seconde pour tous les points situés à la surface $L = o$, et supposons

$$u = \Sigma Y,$$

la somme Σ se rapportant à toutes les fonctions Y qui satisfont aux conditions précédentes; nous aurons

$$\varphi(x, y, z, t) = \Sigma\left(\frac{dY}{dt} + k r^2 Y\right)$$

$$f(x, y, z) = F(x, y, z) = \Sigma Y$$

la dernière équation n'a lieu que pour $t = o$.

Supposons que, pour $t = o$, $Y = X$, et que pour t quelconque

$$\frac{dY}{dt} + k r^2 Y = Z, \text{ on aura}$$

$$Y = \left(X + \int_0^t e^{kr^2 t} Z\, dt\right) e^{-k^2 r t}$$

donc

$$u = \Sigma\left(X + \int_0^t e^{\lambda r^2 t} Z\, dt\right) e^{-k r^2 t}$$

tout se réduit à trouver les quantités X et Z. Or on a évidemment pour tous les points du corps

$$o = \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{d^2X}{dy^2} + \frac{d^2X}{dz^2} + r^2 X$$

$$o = \frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} + \frac{d^2Z}{dz^2} + r^2 Z$$

$$f(x, y, z) - F(x, y, z) = \Sigma X$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \Sigma Z$$

et

$$o = \frac{dX}{dx}\cos.\lambda + \frac{dX}{dy}\cos.\mu + \frac{dX}{dz}\cos.\nu$$

$$o = \frac{dZ}{dx}\cos.\lambda + \frac{dZ}{dy}\cos.\mu + \frac{dZ}{dz}\cos.\nu$$

pour tous les points situés à la surface.

Donc il suffit de trouver une quantité U qui satisfait aux équations

$$o = \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} + r^2 U$$

$$\varphi(x, y, z, t) + f(x, y, z) - F(x, y, z) = \Sigma U$$

pour tous les points du corps, et à l'équation

$$o = \frac{dU}{dx}\cos.\lambda + \frac{dU}{dy}\cos.\mu + \frac{dU}{dz}\cos.\nu + hU$$

pour les points situés à la surface; car cette quantité U trouvée on aura, en y supposant $\varphi(x, y, z, t) = o$, la valeur de X, on aura celle de Z en supposant $f(x, y, z) - F(x, y, z) = o$.

On sait que dans le cas d'un corps échauffé arbitrairement et rayonnant dans l'espace à la température zéro, la détermination de la température du corps au bout d'un tems quelconque se réduit à la recherche d'une quantité déterminée par les conditions tout-à-fait pareilles à celles qui déterminent la quantité U.

Pour ce qui regarde la quantité ψ, qui doit satisfaire à l'équation

$$\frac{d\psi}{dx}\cos.\lambda + \frac{d\psi}{dy}\cos.\mu + \frac{d\psi}{dz}\cos.\nu + h\psi = T$$

pour tous les points de la surface $L = o$, on la trouvera facilement de cette manière:

On supposera

$$\psi = L\varphi$$

on aura au point quelconque (x, y, z)

$$\frac{d\psi}{dx}\cos.\lambda+\frac{d\psi}{dy}\cos.\mu+\frac{d\psi}{dz}\cos.\nu+h\psi=L\left(\frac{d\varphi}{dx}\cos.\lambda+\frac{d\varphi}{dy}\cos.\mu+\frac{d\varphi}{dz}\cos.\nu+h\varphi\right)$$
$$+\varphi\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}$$

et pour un point situé à la surface

$$\frac{d\psi}{dx}\cos.\lambda+\frac{d\psi}{dy}\cos.\mu+\frac{d\psi}{dz}\cos.\nu+h\psi=\varphi\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}=T$$

partant

$$\varphi=\frac{T}{\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}}$$

donc on peut supposer

$$\psi=\frac{LT}{\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}}.$$

LONGITUDE DE RIO JANEIRO

DÉTERMINÉE PAR L'OBSERVATION DE L'OCCULTATION D'ANTARÈS LE 7 MAI 1822;

PAR

M. TARKHANOFF.

(Lu le 1 Sept. 1824.)

Quoique la longitude géographique de ce lieu, où relâchent ordinairement tous les vaisseaux, qui vont aux Indes Orientales, ou qui vont doubler le Cap Horn, pour passer dans la mer du Sud, ait été bien déterminée par plusieurs célèbres navigateurs: mais leurs déterminations sont tirées des observations des distances du soleil à la lune, ou des occultations des satellites de Jupiter. Ayant eu l'honneur d'être employé en qualité d'Astronome à une expédition maritime, exécutée par ordre de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE pour explorer le passage nord-ouest, et qui s'arrêta deux fois à Rio-Janeiro, je m'appliquai particulièrement à déterminer la longitude de ce lieu par les occultations des étoiles, et je suis parvenu à observer cinq occultations. Or n'ayant pas encore trouvé dans les journaux astronomiques les occultations correspondantes, ni d'autres observations par lesquelles on pourrait déterminer l'erreur des tables de la lune, je n'hésite plus de présenter à l'Académie Impériale le calcul de l'occultation d'Antarès, par le moyen duquel la longitude déterminée est moins exposée à des erreurs provenantes des tables lunaires, vu que l'étoile passa très près du centre de la lune.

L'immersion de cette étoile a été au bord éclairé de la lune à $8^h 52' 34'', 93$ tems moyen, et l'émersion du bord obscur à $10^h 5' 27'', 8$ tems moyen. L'un et l'autre de ces phénomènes ont été bien marqué.

Le tems a été aussi bien déterminé par les hauteurs correspondantes du soleil observées le jour précédent et le jour suivant.

J'ai calculé pour cette occultation le lieu de la lune sur les tables de BURCKHARDT, et les parallaxes dans l'hypothèse de l'aplatissement $= \frac{1}{308,65}$. La position apparente de l'étoile a été à l'époque de l'observation

Longitude = $8^s\ 7^\circ\ 17'\ 26''$, 60.
Latitude = — $4^\circ\ 32'\ 46''$, 96.

La place de mes observations a été dans l'île des Serpens au cap nord-est, dont la latitude tirée de 86 hauteurs circum-méridiennes du soleil, observées avec un cercle de réflexion de Dollond = $22^\circ\ 53'\ 54''$, 15.

Calcul de l'occultation d'Antarès, observée le 7 May 1822.

		Immersion.	Émersion.
Tems moyen solaire de l'observation		$8^h\ 52'\ 34''$, 93	$10^h\ 5'\ 27''$, 80
Longitude supposée de Rio-Janeiro		$3^h\ 2'\ 10''$, 0	
Longitude vraie	de la lune	$246^\circ\ 19'\ 24''$, 52	$246^\circ\ 55'\ 28''$, 51
Latitude vraie		$-4^\circ\ 48'\ 49''$, 65	$-4^\circ\ 47'\ 58''$, 58
Parallaxe équat.		$53'\ 57''$, 25	$53'\ 57''$, 57
Demi-diamètre		$14'\ 42''$, 15	$14'\ 42''$, 23
Latitude corrigée de Rio-Janeiro		$22^\circ\ 45'\ 55''$, 38	
Parallaxe horizontale de la lune		$53'\ 55''$, 77	$53'\ 56''$, 10
Ascension droite	du Zénith	$178^\circ\ 23'\ 23''$, 55	$196^\circ\ 39'\ 36''$, 25
Longitude		$188^\circ\ 2'\ 49''$, 53	$204^\circ\ 10'\ 35''$, 90
Latitude		$-21^\circ\ 25'\ 28''$, 44	$-14^\circ\ 27'\ 33''$, 08
Parrall. de la Longitude	de la lune . . .	$43'\ 10''$, 94	$35'\ 58''$, 48
Latitude apparente		$-4^\circ\ 31'\ 15''$, 0	$-4^\circ\ 37'\ 37''$, 94
Demi-diamètre apparent		$14'\ 49''$, 3	$14'\ 52''$, 33
Différence des longit. appar. de la lune et de l'étoile		$885''$, 30	$844''$, 15
Différence des longit. vraies de la lune et de l'étoile		$3476''$, 24	$1314''$, 33

Conjonction vraie en tems moyen solaire à Rio-Janeiro :

Par l'immersion = $10^h\ 49'\ 39''$, $39 + 2{,}0233\, d\alpha - 0{,}2097\, d\beta + 1{,}6183\, d\pi$.

Par l'émersion = $10^h\ 49'\ 43''$, $67 - 2{,}1373\, d\alpha + 0{,}6966\, d\beta + 1{,}3478\, d\pi$.

Si on fait usage de la correction du demi-diamètre de la lune trouvée par M. l'Académicien Wisniewsky $d\alpha = 0''{,}45 - 0{,}10\, \varpi$ (Mém. de l'Acad. T. VIII. p. 123.) on aura la conjonction vraie

par l'immersion = $10^h\ 49'\ 40''$, $30 - 0{,}2097\, d\beta + 1{,}4160\, d\pi$.

par l'émersion = $10^h\ 49'\ 42$, $76 + 0{,}6966\, d\beta + 1{,}5501\, d\pi$.

La vraie conjonction à Paris, d'après les tables de la lune, a été à $13^h\ 52'\ 1''$, 27 tems moyen, par conséquent la longitude de Rio-Janeiro

par l'immersion = $3^h\ 2'\ 20''$, $97 + 0{,}2097\, d\beta - 1{,}4160\, d\pi$

par l'émersion = $3\ \ 2\ \ 18$, $51 - 0{,}6966\, d\beta - 1{,}5501\, d\pi$.

NOTE

SUR LA

THÉORIE DE LA CHALEUR.

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lue le 5 Novembre 1828.)

Les questions de physique mathématique, conduisent le plus souvent 1° à intégrer une équation aux différences partielles qui a lieu pour tous les points de l'espace où le phénomène s'accomplit; 2°, à satisfaire à une équation différentielle qui ne subsiste qu'à la limite de cet espace, c'est-à-dire à la superficie de l'étendue où le phénomène se passe; 3°, on connaît toutes les particularités du phénomène à un instant donné.

On cherche d'abord une solution particulière qui satisfasse à l'équation relative à l'intérieur comme à celle relative à la surface; il arrive qu'on en trouve une infinité; chacune d'elles renferme, comme facteur, une constante arbitraire; on ajoute ensemble toutes les solutions particulières, et l'on cherche à déterminer les facteurs arbitraires de manière à satisfaire à l'état connu du phénomène correspondant à l'instant donné. C'est à remplir cette dernière partie du problème que cette note est destinée.

Imaginons dans l'intérieur d'un espace terminé par une surface quelconque, un élément différentiel ω, désignons par x, y, z les coordonnées rectangulaires de cet élément et par p, q, r, des fonctions de x, y, z qui restent finies dans toutes l'étendue de l'espace que nous venons d'imaginer.

Considérons l'intégrale triple

$$\int \left(\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dy}+\frac{dr}{dz}\right)\omega$$

on peut supposer $\omega = dz\,dy\,dx$.

Prenons d'abord l'intégrale

$$\int dx\,dy \int \frac{dr}{dz}\,dz\,.$$

Pour l'évaluer imaginons un prisme quadrangulaire perpendiculaire au plan des xy, ayant pour base, sur ce plan, le parallélogramme $dy\,dx$; ce prisme traversera entièrement le volume, et pénètrera sa surface en plusieurs points; le nombre de ces points sera nécessairement pair, attendu que le volume est supposé limité de toutes parts. Désignons par z_1, z_2, $z_3 \cdots z_{2n}$ les valeurs de z correspondantes aux points où le prisme pénètre la surface, ces quantités nous les supposerons rangées par ordre de leur grandeur, z étant la plus petite. Soient R_1, R_2, $R_3 \cdots R_{2n}$ ce que devient r lorsqu'on y fait successivement $z = z_1$, $z = z_2$, $\cdots\cdots$ $z = z_{2n}$. Nous aurons,

$$\int dy\,dx \int \frac{dr}{dz}\,dz = \int (R_2 + R_4 + \cdots + R_{2n})dy\,dx - \int (R_1 + R_3 + \cdots R_{2n-1})\,dy\,dx$$

désignons par ν l'angle que la normale à la surface, prolongée en dehors du volume, fait avec les demi-axes des z positifs, et par s, un élément différentiel de la même surface: on aura,

$$\int \frac{dv}{dz}\,\omega = \int R \cos.\,\nu \cdot s\,;$$

l'intégrale du second membre de la dernière équation ne se rapporte qu'aux points de la surface.

Si l'on désigne par P et Q ce que deviennent p et q à la superficie du volume par μ et λ les angles que la normale à la surface, prolongée du dedans au dehors du sphéroïde, fait avec les demi-axes des x et des y positifs, on aura aussi:

$$\int \frac{dp}{dx}\,\omega = \int P \cos.\lambda\, s$$

$$\int \frac{dq}{dy}\,\omega = \int Q \cos.\mu\, s,$$

et par suite

$$(1) \qquad \int \left(\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz}\right)\omega = \int (P\cos.\lambda + Q\cos.\mu + R\cos.\nu)\, s.$$

L'intégrale du second membre de cette équation ne doit être étendue qu'aux points de la surface.

Cela posé, désignons par u et u' deux fonctions de x, y et z; par α, β, γ, α', β', γ' les caractéristiques telles que le produit

$$\alpha^k\ \beta^m\ \gamma^n\ \alpha'^{k'}\ \beta'^{m'}\ \gamma'^{n'}\ uu'$$

représentera la différentielle

$$\frac{d^{k+m+n}u}{dx^k\,dy^m\,dz^n}\cdot\frac{d^{k'+m'+n'}u'}{dx^{k'}\,dy^{m'}\,dz^{n'}};$$

en sorte que α et α' représentent les signes des différentiations relativement à x, β et β' relativement à y, γ et γ' relativement à z; de plus α, β, γ ne se raportent qu'à la fonction u et α', β', γ' à la fonction u'. Désignons par

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'), \quad F(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$$

deux fonctions rationnelles et entières de α, β, γ, α', β', γ', dont la première a la propriété de s'évanouir en posant à la fois

$$\alpha + \alpha' = 0, \quad \beta + \beta' = 0, \quad \gamma + \gamma' = 0,$$

et considérons l'équation différentielle

$$(2) \qquad 0 = [f(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') - \vartheta F(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')]\, uu';$$

ϑ étant une constante arbitraire, supposons

(3) $f(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = (\alpha + \alpha') f_1 + (\beta + \beta') f_2 + (\gamma + \gamma') f_3$

f_1, f_2, f_3 seront, par la propriété de $f(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ des fonctions rationnelles et entières de $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$. En multipliant l'équation précédente par $uu'\omega$ et en intégrant le résultat dans toute l'étendue du corps, on aura en vertu de l'équation (1)

$$\int f(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma',) \, uu'\omega = \int (\cos. \lambda \, f_1 + \cos. \mu \, f_2 + \cos. \nu \, f_3) \, uu's$$

$\cos. \lambda$, $\cos. \mu$, $\cos. \nu$ doivent être mis avant les fonctions f_1, f_2, f_3 pour que les différentielles que ces fonctions renferment n'affectent pas ces cosinus ; il résulte de la dernière équation que, si l'on multiplie l'équation (2) par ω et qu'on l'intégre dans toute l'étendue du sphéroïde, on obtiendra

(4) $\vartheta \int F(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') \, uu'\omega = \int (\cos. \lambda \, f_1 + \cos. \mu \, f_2 + \cos. \nu \, f_3) \, s.$

Pour montrer une application de cette équation, désignons par $f(\alpha, \beta, \gamma)$ une fonction rationnelle et entière de α, β, γ, et supposons que l'on ait l'équation différentielle

(5) $[f(\alpha, \beta, \gamma) - \vartheta] \, u = o$

pour tous les points d'un volume, supposons de plus que la quantité u doit vérifier des équations aux différences partielles linéaires pour une relation donnée entre x, y et z; cette relation, dans les questions physiques est, le plus souvent, l'équation de la surface du volume. Désignons par

(6) $\nabla_1 u = o \quad \nabla_2 u = o \cdots\cdots$

ces équations à la surface.

La quantité u est une fonction de x, y, z et de la quantité constante ϑ, il est important de trouver une fonction $u' = \varphi(x, y, z, \vartheta')$ des mêmes quantités x, y, z et d'une quantité ϑ' fonction telle que l'intégrale $\int uu'\omega$, prise dans toute l'étendue du sphéroïde, est nulle toutes les fois qu'on attribue à la quantité ϑ' une valeur différente de ϑ, et que cette intégrale soit différente de zéro si l'on fait $\vartheta' = \vartheta$.

Il n'est pas difficile de voir que cette fonction u' doit satisfaire à l'équation différentielle

$$(7) \qquad [f(-\alpha', -\beta', -\gamma') - \vartheta']\, u' = o;$$

car multipliant l'équation (5) par u', l'équation (7) par u, et retranchant le dernier résultat du premier, on aura d'abord

$$[f(\alpha, \beta, \gamma) - f(-\alpha', -\beta', -\gamma')]\, uu' = (\vartheta - \vartheta')\, uu',$$

ensuite, comme la fonction $f(\alpha, \beta, \gamma) - f(-\alpha', -\beta' - \gamma')$ s'évanouit en faisant $\alpha + \alpha' = o$, $\beta + \beta' = o$, $\gamma + \gamma' = o$, on pourra supposer

$$(8) \quad f(\alpha, \beta, \gamma) - f(-\alpha', -\beta', -\gamma') = (\alpha + \alpha') f_1 + (\beta + \beta') f_2 + (\gamma + \gamma') f_3;$$

f_1, f_2, f_3 seront des fonctions entières de $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$; on aura en vertu de l'équation (4)

$$(\vartheta - \vartheta') \int uu'\omega = \int (\cos. \lambda f_1 + \cos. \mu f_2 + \cos. \nu f_3)\, uu's;$$

λ, μ, ν sont les angles que la normale à la surface exprimée par la relation donnée entre x, y, z, fait avec les demi-axes des coordonnées positives, l'intégrale du second membre se rapporte à toutes les valeurs des x, y, z qui satisfont à la relation donnée.

Comme la quantité u n'est pas entièrement déterminée par l'équation (7), on peut encore supposée que cette quantité vérifié l'équation suivante

$$(9) \qquad (\cos. \lambda f_1 + \cos. \mu f_2 + \cos. \nu f_3)\, uu'$$

pour toutes les valeurs de x, y, z qui satisfont à la relation donnée. On aura alors

$$o = (\vartheta - \vartheta') \int uu'\omega$$

donc: si ϑ' est différent de ϑ

$$(10) \qquad o = \int uu'\omega$$

$$(\vartheta - \vartheta') \int uu'\omega = \int (\cos. \lambda f_1 + \cos. \mu f_2 + \cos. \nu f_3)\, uu's$$

disparaissent à la fois, mais le rapport

$$\frac{(\cos. \lambda f_1 + \cos. \mu f_2 + \cos. \nu f_3)\, uu'}{\vartheta - \vartheta'},$$

dans les problèmes de physique mathématique, converge vers une limite finie différente de zéro à mesure que $\vartheta - \vartheta'$ et $(\cos. \lambda f_1 + \cos. \mu f_2 + \cos. \nu f_3)\, uu'$

l'une et l'autre s'approchent de zéro, et cette limite est la valeur de l'intégrale définie $\int uu'\omega$.

Appliquons ces résultats généraux à la théorie de la chaleur. Désignons par v la température d'un sphéroïde solide au bout du temps t écoulé depuis que le sphéroïde rayonne dans l'air atmosphérique; on sait que la quantité v est déterminée par les équations suivantes:

(11) $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}$ (pour tous les points du sphéroïde)

(12) $\frac{dv}{dx}\cos.\lambda+\frac{dv}{dy}\cos.\mu+\frac{dv}{dz}\cos.\nu+hv=o$ (pour la surface du sphéroïde)

(13) $v=f(x, y, z)$ (pour $t=o$);

λ, μ, ν sont les angles que la normale à la surface, prolongée au dehors du sphéroïde, fait avec les demi-axes des coordonnées positives, h est une quantité constante, on a supposé que la température de l'air ambiant est $=$ à zéro.

Supposons, pour trouver une valeur particulière de v,

(14) $v=e^{-\vartheta^2 t}u$

nous aurons, en nous servant des notations que nous avons admises,

(15) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\vartheta^2)u=o$ (pour tous les points)

(16) $(\cos.\lambda\,\alpha+\cos.\mu\,\beta+\cos.\nu\,\gamma+h)u$ (pour les points à la surface).

Il est impossible que la quantité u, $u=o$ exceptée, puisse vérifier les deux équations (15) et (16) en laissant ϑ quelconque; ϑ sera, en général, une fonction de trois quantités p, q, r déterminées par trois équations transcendentes. Ces équations auront une infinité de racines p, q, r, il y aura donc une infinité de quantités u correspondantes aux différentes valeurs de ϑ, valeurs qui elles-mêmes répondront aux diverses racines p, q, r.

En désignant par ϑ_1 ϑ_2 ϑ_3, etc. les valeurs de ϑ dont nous parlons, et par u_1, u_2, $u_3\cdots$ les valeurs correspondantes de u, on pourra supposer

$$v=e^{-\vartheta_1^2 t}u_1+e^{-\vartheta_2^2 t}u_2+e^{-\vartheta_3^2 t}u_3+\cdots$$

D'après la forme des équations qui déterminent les quantités u, on voit que si l'on satisfait à ces équations en faisant

$$u = \varphi\,(x, y, z, \vartheta)$$

la valeur

$$u = A\,\varphi\,(x, y, z, \vartheta)$$

leur satisfera encore, A étant une quantité constante; donc les quantités u ne seront pas entièrement déterminées; car, chacune d'elles renfermera comme facteur, une constante arbitraire.

Supposons $t = o$, nous aurons $f\,(x, y, z) = u_1 + u_2 + u_3$, etc.
C'est ici le lieu de chercher une quantité u', telle qu'en multipliant la série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.}$$

par cette quantité, et intégrant le résultat dans toute l'étendue du sphéroïde, l'intégration fasse disparaître tous les termes à l'exception d'un seul.

Laissons toujours ϑ désigner une quelconque des quantités ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, etc. la quantité correspondante u de la série u_1, u_2, u_3, etc. sera déterminée par les équations

$$o = \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} + \vartheta^2\right) u \text{ (pour tous les points du sphéroïde)}$$

$$o = \frac{du}{dx}\cos.\lambda + \frac{du}{dy}\cos.\omega + \frac{du}{dz}\cos.\nu + hu \text{ (pour la surface)}$$

donc en faisant attention aux équations (7), (8) et (9), la quantité u' qui rend égale à zéro l'intégrale $\int uu'\omega$, vérifie les équations

$$o = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \vartheta'^2)\,u \text{ (pour tous les points)}$$

$$o = [\cos.\lambda\,(\alpha - \alpha') + \cos.\mu\,(\beta - \beta') + \cos.\nu\,(\gamma - \gamma')]\,uu' \text{ (pour les points à la surface)}$$

or, puisque

$$(\cos.\lambda\cdot\alpha + \cos.\mu\cdot\beta + \cos.\nu\cdot\gamma)\,u = -hu,$$

on aura pour les points à la surface

$$(\cos.\lambda\cdot\alpha' + \cos.\mu\cdot\beta + \cos.\nu\cdot\gamma' + h)\,u'$$

en d'autres termes la quantité u' doit vérifier les équations

$$(17) \qquad o = \frac{d^2u'}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dy^2} + \frac{d^2u'}{dz^2} + \vartheta'^2 u \text{ (pour tous les points)}$$

(18) $$o = \frac{du}{dx}\cos.\lambda + \frac{du'}{dy}\cos.\mu + \frac{du'}{dz}\cos.\nu + hu' \text{ (pour la surface)};$$

donc les valeurs de ϑ seront également représentées par ϑ_1, ϑ_2, $\vartheta_3 \cdots$ quant aux quantités correspondantes u', nous les désignerons par u'_1, u'_2, u'_3, etc., ces quantités ne différeront de u_1, u_2, u_3, etc. que par des facteurs constants.

Il résulte de ce que nous avons dit, que l'on aura

$$\int\int(x, y, z)\, u'\omega = \int uu'\omega$$

ou

(19) $$1 = \frac{\int\int(x, y, z)\, u'\omega}{\int uu'\omega}$$

Désignons par $\Sigma\, e^{-\vartheta^2 t} u$ la somme $e^{-\vartheta_1^2 t} u_1 + e^{-\vartheta_2^2 t} u_2 + e^{-\vartheta_3^2 t} u_3 +$ etc.

on pourra écrire à cause de l'équation (19)

(20) $$\nu = \Sigma\, \frac{u\, e^{-\vartheta^2 t} \int\int(x, y, z)\, u'\omega}{\int uu'\omega}$$

le signe Σ s'étend à toutes les valeurs de ϑ.

Les facteurs constants qui sont renfermés dans les quantités u et u' disparaissent dans l'équation (20) et par cela même l'état initial du problème est rempli. En faisant $t = o$, on aura cette équation remarquable

(21) $$f(x, y, z) = \Sigma\, \frac{u \int\int(x, y, z)\, u'\omega}{\int uu'\omega}$$

qui renferme, d'une manière générale, presque tout ce qu'on connaît relativement aux séries, et qui donne le moyen de développer en série une fonction $f(x, y, z)$ des trois quantités x, y, z, de manière que chaque terme u de la série satisfait aux équations

$$o = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} + \vartheta^2 u \text{ (pour tous les points du corps)}$$

$$o = \frac{du}{dx}\cos.\lambda + \frac{du}{dy}\cos.\mu + \frac{du}{dz}\cos.\nu + hu \text{ (pour les points à la surface)}$$

de plus, le développement ne donnera, en général, la valeur de la fonction que pour les points du corps, la fonction peut ne pas être représentée par ce développement si l'on considère un point situé hors du corps ou même à sa surface.

Je pense que la série $\Sigma \frac{u\int\int(x,y,z)\,u'\omega}{\int uu'\omega}$ est toujours convergente, mais la démonstration de cette propriété remarquable est fort difficile en général, on peut constater la convergence dans quelques cas particuliers, par exemple dans le cas de la série $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\,da + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\,da \sum_{i=1}^{i=\infty} \cos. i\,(x-a)$ qui est une des plus simples et des plus utiles qui soient renfermées dans la série générale, en effet il n'y a qu'à considérer la limite vers laquelle converge la fonction

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\,da + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a)\,da \sum_{i=1}^{i=n} \cos. i\,(a-a)$$

à mesur que n augmente, or comme

$$\sum_{i=1}^{i=n} \cos. i\,(x-a) = \frac{\sin. (n-\frac{1}{2})\,(x-a)}{2 \sin. \frac{x-a}{2}} - \frac{1}{2}$$

la fonction précédente peut être remplacée par la suivante

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a) \sin. \left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)}{\sin. \left(\frac{x-a}{2}\right)}\,da,$$

ε étant une très petite quantité $= \frac{2}{2n-1}$, il est facile de voir que la portion de la dernière intégrale dans laquelle a diffère sensiblement de x est nulle, à cause que l'arc $\frac{x-a}{\varepsilon}$ varie très rapidement et passe de o à 2π avant que la fonction $\frac{f(a)}{\sin. \left(\frac{x-a}{2}\right)}$ soit variée sensiblement, donc on peut ne pas avoir égard à la variabilité du facteur $\frac{f(a)}{\sin. \left(\frac{x-a}{2}\right)}$, dans tous les éléments de l'intégrale où a diffère sensiblement de x, on peut de plus regarder comme constante la fonction $f(a)$ quand même a ne diffère de x que d'une quantité insensible : mais la quantité $\frac{1}{\sin. \left(\frac{x-a}{2}\right)}$ varie alors très rapidement et il sera impossible de la regarder comme constante, on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(a)\sin.\left(\frac{x-a}{\epsilon}\right)}{\sin.\left(\frac{x-a}{2}\right)}da=\frac{f(x)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin.\left(\frac{x-a}{\epsilon}\right)}{\sin.\left(\frac{x-a}{2}\right)}da=f(x)$$

et par suite

$$(22)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a)\,da+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(a)\,da\sum_{i=1}^{i=\infty}\cos.\,i\,(x-a).$$

Je remarquerai en finissant que la quantité ϑ^2 qui entre dans l'équation (20) est nécessairement réelle, c'est une conséquence du principe de la communication de la chaleur, mais une vérité aussi générale doit être mise en évidence par l'analyse mathématique; ce qui arrive en effet, car

$$v=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}f(a,b,c)\cos.(x\text{-}a)\alpha\cos.(y\text{-}b)\beta\cos.(z\text{-}c)\gamma\, e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}d\alpha d\beta d\gamma\, da db dc$$

ou bien: en faisant pour abréger $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2$

$$(23)\qquad v=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}e^{-r^2t}r\,dr\int_{-\infty}^{+\infty}f(a,b\,c)\,\frac{\sin.\,r\rho}{\rho}\,da db dc$$

or il est évident que dans ces équation les quantités $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ et r^2 sont reelles et positives. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(a,\,b,\,c)\,\frac{\sin.\,r\rho}{\rho}\,da db dc$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\,(x+\rho\cos.p\sin.q,\;y+\rho\sin.p\sin.q,\;z+\rho\cos.q)\,\rho\sin.r\rho\sin.q\,dp\,dq\,d\rho$$

en sorte qu'en supposant

$$(24)\quad \Delta=\rho\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\,(x+\rho\cos.p\sin.q,\;y+\rho\sin.p\sin.q,\;z+\rho\cos.q)\sin.q\,dp\,dq,$$

$$(25)\quad u=\int_0^{\infty}\Delta\,\sin.\,r\rho\,d\rho$$

on aura

$$(26)\quad v=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}e^{-r^2t}\,u\,v\,d\,v$$

tout se réduit à trouver la quantité Δ laquelle satisfait à l'équation

$$(22)\qquad \frac{d^2\Delta}{d\rho^2}=\frac{d^2\Delta}{dx^2}+\frac{d^2\Delta}{dy^2}+\frac{d^2\Delta}{dz^2}$$

qui se présente dans la théorie du son.

RECHERCHES NUMÉRIQUES.

PAR

M. BOUNIAKOWSKY.

(Lu le 1 Avril 1829.)

THÉORÈME. *Si la différence de deux nombres entiers $a-b$, est divisible par un nombre premier p, la différence $a^{p^{n-1}}-b^{p^{n-1}}$* (n désignant un entier positif quelconque) *sera divisible par p^n.*

La condition de $a-b$ divisible par p, donne

$$a=b+pk$$

k étant un entier. On aura donc

$$a^{p^{n-1}}=b^{p^{n-1}}+p^{n-1}\cdot p\cdot k\cdot b^{p^{n-1}-1}+\frac{p^{n-1}(p^{n-1}-1)}{1\cdot 2}\cdot p^2\cdot k^2\cdot b^{p^{n-1}-2}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{p^{n-1}(p^{n-1}-1)(p^{n-1}-2)\cdots(p^{n-1}-r)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(r+1)}\cdot p^{r+1}\cdot k^{r+1}\cdot b^{p^{n-1}-(r+1)}+\cdots$$

équation qui donne immédiatement:

$$\frac{a^{p^{n-1}}-b^{p^{n-1}}}{p^n}=kb^{p^{n-1}-1}+\frac{p(p^{n-1}-1)}{1\cdot 2}k^2\cdot b^{p^{n-1}-2}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{p^r(p^{n-1}-1)(p^{n-1}-2)\cdots(p^{n-1}-r)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(r+1)}k^{r+1}\cdot b^{p^{n-1}-(r+1)}+\cdots\cdots$$

Or il est évident que pour démontrer la divisibilité de $a^{p^{n-1}}-b^{p^{n-1}}$ par p^n, il suffit de faire voir que chacun des coëfficients des différentes puissances de b est un nombre entier, ou ce qui revient au même, que le terme général

$$\frac{p^r(p^{n-1}-1)(p^{n-1}-2)\cdots(p^{n-1}-r)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(r+1)}$$

qui exprime ces mêmes coëfficients, se réduit pour toutes les valeurs de r à un entier.

D'abord observons que si l'on remplaçait dans le numérateur p^r par p^{n-1}, ce numérateur serait évidemment divisible par le dénominateur; mais comme certaines valeurs de r seront plus petites que $n-1$, il faut démontrer que le produit $1\cdot 2\cdot 3\cdots(r+1)$ ne peut d'aucune manière contenir plus de r facteurs égaux à p. Pour y parvenir exprimons combien dans le produit des nombres depuis 1 jusqu'à $r+1$, il y a de fois le facteur p; en représentant par x ce nombre, on aura d'après la notation adoptée:

$$(1) \qquad x = E\left(\frac{r+1}{p}\right) + E\left(\frac{r+1}{p^2}\right) + E\left(\frac{r+1}{p^3}\right) + \cdots\cdots + E\left(\frac{r+1}{p^q}\right)$$

avec la condition

$$\frac{r+1}{p^q} > \text{ ou } = 1.$$

Il s'agit donc actuellement de faire voir que x est, ou plus petit que r, ou tout au plus égal à r. A cet effet, remplaçons dans l'équation (1) la somme

$$E\left(\frac{r+1}{p}\right) + E\left(\frac{r+1}{p^2}\right) + E\left(\frac{r+1}{p^3}\right) + \cdots + E\left(\frac{r+1}{p^q}\right)$$

par la suivante:

$$\frac{r+1}{p} + \frac{r+1}{p^2} + \frac{r+1}{p^3} + \cdots\cdot + \frac{r+1}{p^q}$$

ce qui est permis, puisque cette supposition se rapporte évidemment au cas le plus défavorable pour la démonstration. Nous aurons par conséquent

$$x = \frac{r+1}{p} + \frac{r+1}{p^2} + \frac{r+1}{p^3} + \cdots + \frac{r+1}{p^q} = \frac{r+1}{p^q}\left(\frac{p^q-1}{p-1}\right) = \frac{r+1}{p-1} \cdot \frac{p^q-1}{p^q}.$$

De plus, comme le facteur $\frac{p^q-1}{p^q}$ est nécessairement plus petit que 1, il s'ensuit qu'on aura dans tous les cas $x < \frac{r+1}{p-1}$; de là il est facile de conclure que x ne saurait jamais être plus grand que r. En effet, si l'on suppose $v = 2$, on trouvera $x < r+1$, et comme x est essentiellement un

nombre entier, l'on aura tout-au-plus $x = r$. Cette conclusion subsistera à plus forte raison lorsqu'on attribuera à p une valeur supérieure à 2; il faudra donc conclure d'aprés ce qui a été dit plus haut que l'expression

$$\frac{p^r(p^{n-1}-1)(p^{n-1}-2)\cdots(p^{n-1}-r)}{1\cdot2\cdot3\cdots(r+1)}$$

est un nombre entier, et par suite la verité du théorème énoncé.

On démontrera d'une manière tout-à-fait semblable que *si la somme* $a+b$ *est divisible par un nombre premier* p (2 excepté), *la somme* $a^{p^{n-1}} + b^{p^{n-1}}$ *sera divisible par* p^n, n *désignant comme auparavant un nombre entier positif quelconque*.

On aura donc généralement, en supposant $a \pm b$ divisible par p,

$$(2) \qquad \frac{a^{p^{n-1}} \pm b^{p^{n-1}}}{p^n} = c$$

c désignant un entier.

Si l'on représente par p', p'', $p'''\cdots$ des nombres premiers différents les uns des autres et par n, n', $n''\cdots$ des entiers positifs quelconques, l'on aura en vertu de la formule (2) l'équation

$$(3) \qquad \frac{a^{p^{n-1}\cdot p'^{n'-1}\cdot p''^{n''-1}\cdots} \pm b^{p^{n-1}\cdot p'^{n'-1}\cdot p''^{n''-1}\cdots}}{p^n\cdot p'^{n'}\cdot p''^{n''}\cdots} = \text{entier},$$

pourvu que la condition de $a \pm b$ divisible par le produit $p\cdot p'\cdot p''\cdots$ soit remplie, et qu'aucun des nombres premiers p, p', $p''\cdots$ ne soit égal à 2 pour le premier cas de cette dernière formule.

En vertu de l'équation (3), et du théorème de Fermat exprimé par l'équation

$$\frac{a^{p-1}-1}{p} = \text{entier},$$

on aura d'abord

$$\frac{a^{(p-1)p^{n-1}}-1}{p^n} = \text{entier};$$

et en étendant cette formule au cas d'un diviseur quelconque $N = p^n \cdot p'^{n'} \cdot p''^{n''} \dots$ l'on obtiendra

$$(4) \qquad \frac{a^{\varphi(N)} - 1}{N} = \text{entier}$$

après avoir posé pour abréger:

$$(5) \quad \varphi(N) = \frac{N}{p \cdot p' \cdot p'' \dots} = (p-1)(p'-1)(p''-1) \dots p^{n-1} \cdot p'^{n'-1} \cdot p''^{n''-1} \dots$$

En effet, pour obtenir la formule (4) il n'y a qu'à remplacer dans l'équation (3) a par a^{p-1} et b par l'unité.

Le théorème connu de Wilson, généralisé au moyen du thèorème (3) donne

$$\frac{[1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)]^{p^{n-1}} + 1}{p^n} = E$$

E désignant un entier.

L'on obtiendra de la même manière les deux formules suivantes:

$$\frac{\left(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{p-1}{2}\right)^{2p^{n-1}} + 1}{p^n} = E$$

pour les cas où p est de la forme $4k+1$ et la formule

$$\frac{\left(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \frac{p-1}{2}\right)^{2p^{n-1}} - 1}{p^n} = E$$

quand $p = 4k - 1$.

Nous omettons plusieurs autres formules analogues à celles-ci pour passer de suite à la résolution des équations indéterminées du premier degré, au moyen de la formule (4). L'on sait que ces équations se présentent toujours sous l'une des deux formes:

$$ax - by = c$$

ou

$$ax + by = c$$

a, b, c, désignant des nombres entiers positifs premiers entr'eux. Examinons séparément les deux cas.

1er Cas. *Resolution de l'équation indeterminée* $ax - by = c$.

En représentant par α et β deux nombres entiers qui satisfont à l'équation proposée, la solution générale de cette même équation sera comprise dans les deux formules

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \alpha + bm \\ y = \beta + am \end{cases}$$

m désignant un entier quelconque soit positif soit négatif. Ainsi la solution complète de l'équation $ax - by = c$, se reduit à trouver une seule valeur de $x = \alpha$ et la valeur correspondante de $y = \beta$ qui satisfasse à l'équation donnée. La formule (4) offre un moyen très simple de déterminer ces valeurs. En effet, il est aisé de voir qu'en mettant l'équation $ax - by = c$ sous la forme

$$\frac{ax - c}{b} = y$$

on y satisfait par les valeurs

$$x = c \cdot a^{\varphi(b) - 1}$$

$$y = c \cdot \frac{a^{\varphi(b)} - 1}{b}.$$

où $\varphi(b)$ représente la fonction numérique de b indiquée dans l'équation (5) pour le nombre entier N. La valeur de $y = c \cdot \frac{a^{\varphi(b)} - 1}{b}$, quoique se présentant sous forme fractionnaire, sera évidemment entière en vertu du théorème exprimé par la formule (4). On pourra donc d'après ce qui a été dit plus haut poser

$$\alpha = c \cdot a^{\varphi(b) - 1}$$

$$\beta = c \cdot \frac{a^{\varphi(b)} - 1}{b},$$

et d'après les équations (6) les valeurs générales de x et de y seront représentées par les formules

$$(7)\qquad \begin{cases} x = c \cdot a^{\varphi(b) - 1} + bm \\ y = c \cdot \dfrac{a^{\varphi(b)} - 1}{b} + am \end{cases}$$

La plus petite valeur de x s'obtiendra en cherchant le reste de la division de $c \cdot a^{\varphi(b)-1}$ par b. La valeur corréspondante de y s'en déduira immédiatement au moyen de l'équation $y = \frac{ax - c}{b}$.

Exemple. Soit l'équation :

$$11x - 8y = 5$$

dans la quelle

$$a = 11;\quad b = 8 = 2^3;\quad c = 5$$

et par consequent

$$\varphi(b) = (2 - 1)\, 2^{3-1} = 4.$$

On aura en premier lieu

$$\alpha = 5 \cdot 11^3 = 6655$$

$$\beta = \frac{11 \cdot 6655 - 5}{8} = 9150$$

et par suite les valeurs générales (7) deviendront

$$x = 6655 + 8m$$

$$y = 9150 + 11m.$$

Les plus petites valeurs de x et de y qui satisfont à l'équation $11x - 8y = 5$, peuvent être déterminées de la manière indiquée plus haut. On trouvera $x = 7$ et $y = 9$.

2 Cas. *Résolution de l'équation $ax + by = c$.*

En répresentant par α et β deux nombres qui mis à la place de x et de y satisfont à l'équation proposée, la solution générale de cette équation sera renfermée dans les deux formules

$$(8)\qquad \begin{cases} x = \alpha - bm \\ y = \beta + am \end{cases}$$

m représentant comme dans le premier cas un entier quelconque, soit positif, soit négatif. Il suffit donc de trouver une seule solution; or il est évident qu'en supposant

$$x = c \cdot a^{\varphi(b)-1}$$

et

$$y = -c \cdot \frac{a^{\varphi(b)} - 1}{b}$$

l'équation $ax+by=c$ est satisfaite et les valeurs de x et y sont toutes deux entières. Les équations (8) prendront donc la forme suivante:

$$(9)\quad \begin{cases} x = c\cdot a^{\varphi(b)-1} - bm \\ y = am - c\cdot\dfrac{a^{\varphi(b)}-1}{b}. \end{cases}$$

Telle est la solution générale de l'équation $ax+by=c$. Si l'on ne veut avoir que les solutions positives de cette équation, il est évident qu'il ne faudra prendre pour m que des valeurs comprises entre les limites

$$c\cdot\frac{a^{\varphi(b)-1}}{b} \quad \text{et} \quad c\cdot\frac{a^{\varphi(b)}-1}{ab}$$

c'est-à-dire il faudra que l'on ait

$$m < \frac{c\cdot a^{\varphi(b)-1}}{b} \text{ et } m > c\cdot\frac{a^{\varphi(b)}-1}{ab}.$$

Exemple. *Trouver toutes les solutions positives de l'équation* $3x+2y=23$?

L'on a

$$a=3;\ b=2;\ c=23;\ \varphi(b)=1.$$

En vertu de quoi l'on trouve

$$\alpha = 23$$
$$\beta = -23$$

et les valeurs générales (9) de x et de y seront les suivantes:

$$x = 23 - 2m$$
$$y = 3m - 23$$

Pour avoir toutes les solutions positives il faudra attribuer à m dans ces dernières formules toutes les valeurs entières comprises entre les limites

$$\frac{23}{2} \text{ et } \frac{23}{3},$$

par conséquent il faudra que l'on ait

$$m < 12 \text{ et } m > 7$$

ce qui suppose à m les quatres valeurs suivantes:

$$m=8;\ m=9;\ m=10;\ m=11.$$

On trouvera donc quatre solutions positives de l'équation $3x + 2y = 23$. Elles seront

pour $m = 8$ .... $x = 7$ et $y = 1$;
pour $m = 9$ .... $x = 5$ et $y = 4$
pour $m = 10$ .... $x = 3$ et $y = 7$
pour $m = 11$ .... $x = 1$ et $y = 10$.

La solution des équations indéterminées du premier degré que nous venons d'exposer est fondée sur les principes qui n'ont aucun rapport avec la considération des fractions continues. Ceci donne un moyen de trouver les fractions principales convergentes vers $\frac{a}{b}$ sans recourir au développement de $\frac{a}{b}$ et fraction continue. A la verité le moyen dont nous parlons conduirait le plus souvent à des calculs très prolixes lorsque les termes de la fraction $\frac{a}{b}$ seraient un peu grands; aussi ce n'est que comme un rapprochement assez curieux de la méthode exposée plus haut et de la théorie des fractions continues, que je vais exposer ce procédé.

Soit l'équation $ax - by = 1$. On sait qu'en représentant par r et s les plus petites valeurs de x et de y qui satisfont à cette équation, la fraction $\frac{s}{r}$ représentera la penultième fraction principale provenant du dévéloppement de $\frac{a}{b}$ en fraction continue, si le nombre des fractions principales ($\frac{a}{b}$ y compris) est pair. Nous supposons $a > b$. Si au contraire le nombre des fractions principales est impair, la penultième fraction sera exprimée par $\frac{a-s}{b-r}$. De là il suit, en vertu des formules (7) en y supposant $c = 1$, que dans le premier cas, la penultième fraction principale que nous représenterons par $\frac{a_1}{b_1}$, aura pour expression:

$$(10) \qquad \frac{a_1}{b_1} = \frac{R\left(\dfrac{a^{\varphi(b)}-1}{ab}\right)}{R\left(\dfrac{a^{\varphi(b)}-1}{b}\right)} \cdots (*)$$

et dans le second cas

$$(11) \qquad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a - R\left(\dfrac{a^{\varphi(b)}-1}{ab}\right)}{b - R\left(\dfrac{a^{\varphi(b)}-1}{b}\right)}.$$

Pour déterminer la fraction principale qui vient immédiatement avant $\frac{a}{b}$ et que nous représenterons par $\frac{a_2}{b_2}$, il suffit de trouver les plus petites solutions de l'équation

$$a_1 x - b_1 y = 1,$$

et comme le nombre des termes du développement de $\frac{a_1}{b_1}$ en fraction continue sera d'une unité moindre que pour la fraction $\frac{a}{b}$, et par conséquent impair pour le premier cas, on aura

$$(12) \qquad \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 - R\left(\dfrac{a_1^{\varphi(b_1)}-1}{a_1 b_1}\right)}{b_1 - R\left(\dfrac{a_1^{\varphi(b_1)}-1}{b_1}\right)}$$

et pour le second

$$(13) \qquad \frac{a_2}{b_2} = \frac{R\left(\dfrac{a_1^{\varphi(b_1)}-1}{a_1 b_1}\right)}{R\left(\dfrac{a_1^{\varphi(b_1)}-1}{b_1}\right)}.$$

Continuant de cette manière, il sera toujours possible d'obtenir la valeur de toute fraction principale quelque soit son quantième; pour connaître *à priori* la quelle

*) Nous désignons par la lettre R mise devant une fraction le reste de la division du numérateur par le dénominateur.

des deux formules, la (10) ou la (11) doit être employée la première, il suffira de voir si $s < \frac{1}{2}a$ ou $s > \frac{1}{2}a$. Si $s < \frac{1}{2}a$, il faudra admettre la formule (10); dans le cas contraire c'est la formule (11) qu'il faudra employer. Cette proposition se démontre très facilement de la manière suivante: on sait que si dans la fraction continue

$$\frac{a}{b} = \mu_0 + \cfrac{1}{\mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cdots + \cfrac{1}{\mu_{n-1} + \cfrac{1}{\mu_n}}}}$$

on designe par $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3} \ldots$ les fractions principales en commençant par l'avant dernière, l'on aura les équations:

$$a = a_1 \mu_n + a_2\,;\quad a_1 = a_2 \mu_{n-1} + a_3\,;\quad \text{etc.}$$
$$b = b_1 \mu_n + b_2\,;\quad b_1 = b_2 \mu_{n-1} + b_3\,;\quad \text{etc.}$$

La première de ces équations donne

$$(14) \qquad a_1 = \frac{a - a_2}{\mu_n},$$

et comme μ_n, qui designe le dénominateur de la dernière fraction du développement de $\frac{a}{b}$, ne peut jamais être egal à l'unité sans quoi $\mu_{n-1} + \frac{1}{\mu_n}$ pourrait être immédiatement remplacé par $\mu_{n-1} + 1$, il s'ensuit qu'on aura au moins $\mu_n = 2$; et en vertu de l'équation (14) on sera conduit à la conclusion $a_1 < \frac{1}{2}a$, ce qui confirme la règle prescrite plus haut. Remarquons que cette dernière inégalité n'exclut pas le cas de $a_1 = \frac{1}{2}a$, qui n'aurait lieu au reste qu'autant que a serait égal à 2.

Appliquons présentement ces principes à la recherche des fractions principales convergentes vers $\frac{43}{39}$. Pour cela il faudra d'abord former l'équation

$$43x - 30y = 1,$$

dont la plus petite solution sera

$$x = R\left(\frac{43^7}{30}\right) = 7 \text{ et } y = 10.$$

De plus la fraction $\frac{43}{30}$ se rapporte à la formule (10) puisque $10 < \frac{43}{2}$; nous aurons donc

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{10}{7}.$$

Formant ensuite l'équation

$$10x - 7y = 1$$

l'on aura

$$x = R\left(\frac{10^5}{7}\right) = 5 \text{ et } y = 7,$$

et en vertu de l'équation (12)

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{10 - 7}{7 - 5} = \frac{3}{2}.$$

La fraction $\frac{a_3}{b_3}$ se déterminera par la résolution de l'équation

$$3x - 2y = 1$$

qui donne

$$x = 1 \text{ et } y = 1$$

donc

$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{1}{1}.$$

par conséquent les fractions convergentes vers $\frac{43}{30}$ seront :

$$\frac{10}{7}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{1}.$$

Prenons encore la fraction $\frac{19}{11}$ qui conduit à l'équation :

$$19x - 11y = 1.$$

On aura d'abord

$$x = R\left(\frac{19^9}{11}\right) = 7 \text{ et } y = 12,$$

et comme $12 > \frac{19}{2}$, il faudra admettre la formule (11) ; par conséquent

$$\frac{a_1}{1} = \frac{19-12}{11-7} = \frac{7}{4}.$$

On déterminera la fraction $\frac{a_2}{b_2}$ en resolvant l'équation

$$7x - 4y = 1;$$

et comme

$$x = R\left(\frac{7}{4}\right) = 3 \text{ et } y = 5,$$

on aura

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{5}{3}.$$

On trouvera ensuite que la fraction $\frac{a_3}{b_3} = \frac{2}{1}$ et enfin $\frac{a_4}{b_4} = \frac{1}{1}$; d'où il suit que les fractions convergentes vers $\frac{19}{11}$ seront

$$\frac{7}{4}; \quad \frac{5}{3}; \quad \frac{2}{1}; \quad \frac{1}{1}.$$

Nous terminerons ce mémoire par une autre application du théorème exprimé par l'équation (4).

M. Legendre dans son second supplément à la théorie des nombres, année 1825, consacré particulièrement à la démonstration de l'impossibilité du théorème de Fermat dans le cas de la cinquième puissance, montre aussi une méthode par la quelle M[lle] Sophie Germain est parvenue à démontrer que si le théorème de Fermat était possible, l'une des indéterminées serait nécessairement divisible par l'exposant, pour toutes les valeurs de cet exposant inférieures à 100. On pourrait étendre la même méthode à des valeurs du même exposant suppérieures à 100. Je vais établir un théorème analogue. Mais au lieu de considerer une seule des indéterminées, je ferai voir qu'une certaine fonction symétrique de ces trois quantités est nécessairement divisible, non plus par l'exposant, mais par une certaine fonction numérique de cette puissance.

Soit l'équation $x^m + y^m + z^m = o$, dans la quelle on peut toujours supposer qu'il n'existe aucun commun diviseur entre x, y, z. De plus il est visible qu'une de ces trois quantités, z par exemple, sera négative. Choisissons présen-

tement un nombre N tel que l'on ait, en conservant la notation dont nous avons fait usage plus haut,

$$(15) \qquad m = \varphi(N) - 1;$$

on pourra remplir cette condition de plusieurs manières différentes pour un grand nombre de valeurs de m, et nous donnerons une table qui indiquera ces nombres pour les valeurs de m inférieures à 31. Il y a cependant quelques valeurs de m qui se refusent à être décomposées de la sorte, 13 par exemple; nous ferons abstraction de ces cas.

Réprenons actuellement l'équation $x^m + y^m + z^m = o$, et supposons que les diviseurs communs des trois variables x, y, z avec l'entier N, soient réspectivement représentés par λ_1, λ_2, λ_3; on pourra poser

$$N = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot N_0$$

N_0 étant un nombre entier.

Cela posé, il sera toujours possible de former les équations suivantes:

$$(16) \qquad \begin{cases} x\alpha' - N\beta' = \lambda_1 \\ y\alpha'' - N\beta'' = \lambda_2 \\ z\alpha''' - N\beta''' = \lambda_3 \end{cases}$$

α', α'', α''', β', β'', β''' représentant des nombres entiers indéterminés. Ces trois équations étant résolues par rapport à α', α'', α''', par la méthode exposée plus haut, donnent

$$(17) \qquad \alpha' = \lambda_1 \cdot x^{\varphi(N) - 1}; \quad \alpha'' = \lambda_2\, y^{\varphi(N) - 1}; \quad \alpha''' = \lambda_3\, z^{\varphi(N) - 1}.$$

Remarquons que la condition de z négatif ne change en rien le signe de la valeur de α''' puisque $\varphi(N) - 1$ est toujours impair.

L'équation $x^m + y^m + z^m = o$, jointe aux équations (15) et (17), conduit à la suivante

$$\frac{\alpha'}{\lambda_1} + \frac{\alpha''}{\lambda_2} + \frac{\alpha'''}{\lambda_3} = o$$

qui combinée avec (16) donne

$$\frac{N\beta' + \lambda_1}{\lambda_1 x} + \frac{N\beta'' + \lambda_2}{\lambda_2 y} + \frac{N\beta''' + \lambda_3}{\lambda_3 z} = 0$$

et par suite

$$N(\lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \beta' \cdot y \cdot z + \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \beta'' \cdot x \cdot z + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \beta''' \cdot x \cdot y) + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (yz + xz + xy) = 0.$$

Or, cette dernière équation montre que le produit $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (yz + xz + xy)$ est divisible par N, et puisque xyz est divisible par $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$, il faut en conclure que le produit $xyz\,(xy + xz + yz)$ sera divisible par N; parconséquent si l'on represente par K un nombre entier, l'on aura le théorème

$$\frac{xyz\,(xy + xz + yz)}{N} = K.$$

On trouverait des théorèmes analogues pour une somme quelconque de puissances. Voici la table des valeurs de N pour toutes les valeurs de m inférieures à 31. Le plus grand diviseur de $xyz\,(xy + xz + yz)$, déduit des differents diviseurs partiels N et que nous représenterons par M est aussi indiqué dans cette table.

m.	N.	M.	m.	N.	M.
3	5, 8, 10, 12	120	17	19, 27, 38, 54	1026
5	7, 9, 14, 18	126	19	25, 33, 44, 50, 66	3300
7	15, 16, 20, 24, 30	240	23	35, 39, 45, 52, 56, 70	
11	13, 21, 26, 28, 36, 42	3276		72, 78, 84, 90	32760
13	Le nombre N manque.		29	31, 62	62

MÉMOIRE

SUR UNE

NOUVELLE CONSTRUCTION POUR LES MÂTS DE VAISSEAUX;

PAR

M. PARROT.

Avec une planche.

(Présenté et lu le 4 Février 1829.)

PRÉFACE.

Plus d'un auteur en mécanique et en morale nous à dit et répété que nous ne pouvons nous trouver mieux qu'en imitant la nature. Cependant nos machines et notre genre de vie sont affectés de tant de complications engendrées par le luxe de l'esprit et de la mollesse, qu'il semble que nous avons complètement oublié ce conseil de nos sages. J'entreprends de le suivre dans cette nouvelle construction des mâts. Que ne puis-je le faire en tout!

La tibia de nos jambes et celle de tous les quadrupèdes et de tous les oiseaux, destinée à porter toute la masse du corps et à résister à des chocs venant de tous côtés, sont des cylindres creux. L'aile de l'oiseau, qui doit exercer en tous sens une grande résistance, et joindre en même tems la légèreté à la force, est composée de plumes qui offrent dans la partie où le moment de la résistance doit être le plus grand, un tube d'une matière dure et élastique, dont l'épaisseur fait à peine $\frac{1}{20}$ du diamètre de ce tube; plus loin cette même matière se prolonge en deux lames parallèles, éloignées l'une de l'autre

d'une quantité toujours plus petite à mesure qu'on s'éloigne du point d'appui. Ces deux lames, dont l'épaisseur diminue également, ne sont réunies que par une matière celluleuse, qui offre si peu de résistance qu'on peut dire qu'elle ne sert qu'à retenir ces lames sans effort aux distances prescrites.

J'ai appliqué il ya trois ans avec succès ce principe aux douze piliers qui forment la partie principale de la carcasse du bâtiment mobile qui protége contre les intempéries de l'air le superbe Réfracteur de FRAUENHOFER, ce télescope unique, qui orne l'observatoire de Dorpat. Je l'applique aux mâts de vaisseaux pour produire un levier, qui, à force égale, n'ait qu'environ la moitié de la matière et du poids des mâts ordinaires. Nous verrons ensuite que cette grande légèreté n'est pas le seul avantage qu'offre cette nouvelle construction. Elle en fournit entre autres un qui est de grande importance pour les vaisseaux de guerre, c'est que les mâts construits sur le nouveau principe ne peuvent pas être abattus par un, deux et même trois coups de canon.

Le mât étant un levier au quel on applique sur divers points de sa longueur plusieurs forces, qui, selon les circonstances, peuvent prendre toutes les directions possibles, doit offrir dans tous les sens une résistance égale. Cette résistance doit être un maximum pour une quantité donnée de matière, ou bien cette quantité de matière doit être un minimum pour une résistance requise, et cela à tous les points de la longueur du levier. Le conoïde creux est, de toutes les formes possibles, la seule qui puisse satisfaire à cette condition, et c'est à la solution de ce problème, à la détermination de toutes les dimensions des mâts qu'est voué le mémoire suivant. Il contiendra d'abord la théorie et ensuite les moyens de pratique.

RAMSDEN a employé le principe des leviers creux dans la construction de sa balance qui eut de son tems un grande réputation. Mais ce célèbre mécanicien avait tort; car, les poids de la balance n'agissant que dans la seule direction verticale, il est aisé de prouver qu'un fléau solide et plat dans la proportion 1 : 5 de l'épaisseur à la hauteur, est plus avantageux que le cône creux. En outre RAMSDEN

ne pouvait donner à son fléau la courbe longitudinale requise pour satisfaire au problème de la plus petite quantité de matière, y eût-il même songé.

L'idée des nouveaux mâts que je propose n'est pas neuve pour moi. Je l'ai déjà travaillée il y a 35 ou 36 ans (j'écris en janvier 1829) à l'occasion d'une question de prix. La société de Londres pour le perfectionnement de la construction des vaisseaux, avait proposé une douzaine de questions de prix à la fois. J'en travaillai quatre (j'étais alors jeune et entreprenant). La première concernait les moyens de faire marcher un vaisseau surpris par un long calme. Ma solution consistait à appliquer une machine à vapeur et j'indiquai deux mécanismes pour en employer la force, dont l'un consistait en deux roues hydrauliques comme nos roues de moulins, ainsi précisément celui des pyroscaphes d'aujourd'hui, l'autre en deux grandes rames dont le mouvement imitait celui des rames ordinaires. Le second problème consistait à donner aux mâts de vaisseaux la plus grande légèreté sans diminuer la force qu'ils doivent avoir. Le troisième problème consistait à trouver les moyens d'étancher un vaisseau qui a fait une voie d'eau trop considérable pour que les pompes puissent en arrêter les progrès. Le quatrième enfin consistait à inventer un cabestan pour lever l'ancre, plus commode et plus expéditif que les cabestans ordinaires. Le nouveau mécanisme que je proposai alors serait applicable surtout aujourd'hui que l'on commence à substituer les chaînes aux cables.

Je n'ai rien appris du sort de ces quatre mémoires; mais mon idée pour le premier problème a été réalisée quelque tems après en Amérique par l'exécution du bateau à vapeurs, de sorte que je crois pouvoir prétendre de droit à la priorité de l'invention des pyroscaphes.

Quant au second problème, je l'ai cru assez important pour en publier aujourd'hui la solution. Comme je m'en occupai il y a 36 ans, il est naturel que je travaillai alors en jeune homme, dénué de connaissances pratiques. J'ai dû pour cet effet refaire ce mémoire à neuf, pour profiter des nombreuses expériences que j'ai été à même de faire depuis sur tant de parties de la mécanique.

CHAPITRE I.

Theorie des mâts creux.

§. 1.

Soit A (Fig. 1.) un levier cylindrique ou conique, fixé irrévocablement en CD. Nous supposons une force E appliquée au point B et tirant dans une direction perpendiculaire à l'axe cd du levier. Cette force tend à comprimer le côté cb et à déchirer le côté ac. Si la résistance de compression est égale à la résistance d'extension, et si ces deux résistances cèdent, la moitié cb se comprimera d'une certaine quantité et la moitié ac s'allongera d'autant, en sorte que tout le levier s'inclinera autour du centre c ou plutôt autour de la droite qui passe par c et est perpendiculaire à la direction de la force. Toute autre tranche infiniment mince $a'b'$, $a''b''$ se trouvera dans le même cas et il se fermera en b', b'' une compression et en $a'a''$ une extension, l'une et l'autre ayant leur c pour centre de mouvement. Si nous admettons que chacune de ces tranches horizontales sur toute la longueur du levier puisse céder dans le sens de la compression et de l'extension, les centres de mouvement formeront une surface composée de tous les diamètres perpendiculaires à l'axe, surface qui prendra la figure d'une courbe élastique, et chaque point de cette surface ne sera ni comprimé ni distendu par la force E.

Si par contre la résistance de compression (que nous supposons toujours en réquisition du côté bB) est plus petite que la résistance d'extension, alors la surface des centres de mouvement ne passera plus par le milieu ou l'axe du levier, mais se trouvera plus éloignée de bB, comme en ee'. Le contraire arriverait si la résistance de pression était plus grande que la résistance d'extension. Le premier cas a lieu dans les corps élastiques mous, tel que le bois de sapin où la résistance de pression n'est, d'après les expériences de M. Camus de Mézières,

probablement que $\frac{1}{4}$ aussi grande que la résistance d'extension. Le second cas a lieu vraisemblablement pour le verre, corps élastique dur. La position de la surface des centres de mouvement est déterminée par le point le plus bas e, puisque pour tous les autres points e' l'on aura toujours $a''e' : e'b'' = ae : eb$.

Ainsi, lorsque nous chercherons les moments de résistance des mâts de matière homogène et dont toutes les tranches sont circulaires ou seulement, semblables et semblablement posées, nous pouvons prendre à volonté pour centre de mouvement un point quelconque c ou e, pourvu que nous conservions dans tout le calcul la proportion une fois admise. Nous admettons les points c, c', c'', etc. qui se trouvent dans l'axe du mât.

§. 2.

Problème. Trouver le moment de résistance de la coupe horizontale d'un levier creux, dont la couronne seule est massive. Fig. II.

Soit $AC = a$, $BC = b$, $CP = x$; on aura $AP = a - x$, $DP = a + x$, $Pb = b - x$, $PE = b + x$, et par conséquent $AP \cdot DP = \overline{PM}^2 = a^2 - x^2$; d'où

$$PM = \sqrt{a^2 - x^2}$$
$$\text{et } Pm = \sqrt{b^2 - x^2}.$$

Soit $N'M$ une tranche infiniment étroite du grand cercle, et nm du petit, nous aurons pour expressions de ces tranches

$N'M = 2dx\sqrt{a^2 - x^2}$ et $nm = 2dx\sqrt{b^2 - x^2}$; donc la tranche infiniment étroite de la couronne est $= 2dx(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{b^2 - x^2})$. Nous prenons, en vertu de ce qui a été dit au §. 1, le diamètre FG, parallèle à la tranche, pour axe de mouvement. Ainsi le moment de la tranche de la couronne sera $= 2xdx$ $(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{b^2 - x^2})$; valeur facile à intégrer par la formule du binome

$$(p - q)^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{q}{2p} + \frac{q^2}{8p^2} - \frac{q^3}{16p^3} - \frac{5q^4}{128p^4} \ldots\ldots\right)$$

En faisant $a^2 = p$, $x^2 = q$, l'on a

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\left(1-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^4}{8a^4}-\frac{x^6}{16a^6}+\frac{5x^8}{128a^8}\cdots\cdots\right)$$

$$\sqrt{(b^2-x^2)}=b\left(1-\frac{x^2}{2b^2}+\frac{x^4}{8b^4}-\frac{x^6}{16b^6}+\frac{5x^8}{128b^8}\cdots\cdots\right) \text{ et}$$

$$\sqrt{(a^2-x^2)}-\sqrt{b^2-x^2}=a-b+\frac{a-b}{2ab}\cdot x^2-\frac{a^3-b^3}{8a^3b^3}\cdot x^4+\frac{a^5-b^5}{16a^5b^5}\cdot x^6-\frac{5(a^7-b^7)}{128a^7b^7}\cdot x^8\cdots \text{etc.}$$

Dont le moment sera

$$2(a-b)\,xdx+\frac{a-b}{ab}\cdot x^3dx-\frac{a^3-b^3}{4a^3b^3}\cdot x^5dx+\frac{a^5-b^5}{8a^5b^5}\cdot x^7dx-\frac{5(a^7-b^7)}{64a^7b^7}\cdot x^9dx\cdots\cdots$$

En se contentant de ces cinq termes l'on a pour l'intégrale de ce moment

$$(a-b)\,x^2+\frac{a-b}{4ab}\cdot x^4-\frac{a^3-b^3}{24a^3b^3}\cdot x^6+\frac{a^5-b^5}{64a^5b^5}\cdot x^8-\frac{5(a^7-b^7)}{640a^7b^7}\cdot x^{10}$$

et en faisant $a=x$, on a pour le moment de la demi-zone

$$(a-b)\,a^2+\frac{(a-b)\,a^3}{4b}-\frac{(a^3-b^3)a^3}{24b^3}+\frac{(a^5-b^5a^3}{64b^5}-\frac{(a^7-b^7)a^3}{128b^7},$$

et en faisant $b=\frac{a}{n}$

(A) $$a^3\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{4}-\frac{n^3-1}{24}+\frac{n^5-1}{64}-\frac{n^7-1}{128}\right).$$

§. 3.

Problème. Trouver le moment d'un demi-cercle plein, le diamètre FG étant également pris pour axe de mouvement.

Soit le rayon $=a$ et l'élément $NM=\sqrt{a^2-x^2}$, on a pour le moment de cet élément

$$2a\cdot xdx-\frac{1}{a}\cdot x^3dx+\frac{1}{4a^3}\cdot x^5dx-\frac{1}{8a^5}\cdot x^7dx+\frac{5}{64a^7}\cdot x^9dx,$$

dont l'intégrale est

$$ax^2-\frac{x^4}{4a}+\frac{x^6}{24a^3}-\frac{x^8}{64a^5}+\frac{5x^{10}}{640a^7};\ \text{et en faisant } x=a,$$

(B) $$a^3\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}\right).$$

Il suit de ces deux valeurs (A) et (B) que, pour une couronne et pour un cercle plein, les moments des résistances sont en raison des cubes des rayons.

§. 4.

Problème. Trouver les dimensions d'un mât creux qui offre autant de résistance qu'un mât solide d'un diamètre donné, et la proportion de matière contenue dans les deux espèces de mâts, dans la supposition que la courbe génératrice des contours soit la même dans l'une et l'autre.

Pour résoudre ce problème il suffit de mettre en équation les valeurs trouvées (A) et (B) dans les problèmes précédents. Pour cet effet soit a le rayon du mât solide, et x le grand rayon du mât creux; on a

$$x^3\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{4}-\frac{n^3-1}{24}+\frac{n^6-1}{64}-\frac{n^7-1}{128}\right)=a^3\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}\right),$$

ce qui donne

$$x=a\cdot\frac{\sqrt[3]{301}}{\sqrt[3]{384}\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n-1}{4}-\frac{n^3-1}{24}+\frac{n^5-1}{64}-\frac{n^7-1}{128}\right.}.$$

§. 5.

Il suit de cette équation que la valeur de x varie avec la valeur de $n=\frac{a}{b}$ et que plus n croît, c'est-à-dire plus b s'éloigne de a, et plus la valeur de x diminue, sans jamais offrir de maximum. Ainsi nous pourrions diminuer à l'infini l'épaisseur de l'enveloppe qui forme le mât creux dont le moment de résistance serait égal à celui du mât solide d'un diamètre donné, et toujours gagner en légèreté. Cependant la formule prouve en même tems que, comme les termes du dénominateur de la fraction sont alternativement positifs et négatifs et ne pouvant jamais être $=1$, le gain qu'on pourrait faire hors certaines limites des valeurs possibles de n en augmentant x ou en diminuant l'épaisseur de l'enveloppe, sera très petit.

§. 6.

Deux considérations pratiques viennent à l'apui de ce résultat théorique. L'une est que sur les vaisseaux l'on doit épargner la place autant que possible et qu'en

poussant la valeur de n jusques fort près de l'unité, x peut devenir si grand qu'il occuperait toute la largeur du pont. L'autre considération est que la résistance de compression cesserait bientôt d'être suffisante, l'enveloppe devenant très mince et en outre incapabla de soutenir les plus petits chocs fortuits auxquels les mâts sont exposés.

§. 7.

Il suit de là que la proportion des diamètres des mâts creux ne doit pas excéder certaines bornes et que n doit être dans certains cas plus petit pour de très petits mâts, plus grand pour les gros mâts. Pour diriger en ceci la pratique nous voulons calculer pour différentes valeurs de n celle du grand diamètre et en déduire la grandeur des surfaces coronnaires, comme solution de la seconde partie de notre problème. Les résultats se trouvent dans la table suivante:

Valeurs de n	Valeurs de x, a étant = 1	Rapport des surfaces du cercle plein à la couronne	diminution de la masse
$\frac{5}{4}$	1, 5123	1 : 0, 816	0, 184
$\frac{6}{5}$	1, 6170	1 : 0, 806	0, 194
$\frac{7}{6}$	1, 6886	1 : 0, 785	0, 215
$\frac{8}{7}$	1, 7634	1 : 0, 729	0, 271
$\frac{9}{8}$	1, 8330	1 : 0, 705	0, 295
$\frac{10}{9}$	1, 8573	1 : 0, 675	0, 343

Nous verrons à la suite quelle valeur de n on doit choisir pour la pratique; la quatrième colonne nous indique en attendant le gain que l'on peut faire sur la masse, à l'avantage des mâts creux.

§. 8.

Problème. Déterminer la figure de la coupe des mâts creux. Supposons pour un instant que tout l'effort, qui tend à rompre le mât, soit appliqué à son ex-

trémité supérieure. Pour déterminer le moment de cet effort sur chaque tranche horizontale infiniment mince, il faut considérer celle qui se trouve immédiatement au-dessous comme inébranlable, comme un point d'appui. Il résulte de là que la résistance de chaque élément du conoïde qui formera le mât, divisée par la longueur du bras de levier prise du point où se trouve la tranche considérée comme point d'appui, doit être une constante, si le mât doit offrir sur toute sa longueur une résistance égale au moment de l'effort qui tend à rompre le mât. Or nous avons vu au §. 3. que pour tous les conoïdes, creux ou massifs, les moments de résistance pour chaque tranche sont proportionnels aux cubes des rayons ou diamètres des tranches, si n est invariable pour le conoïde qu'on considère. Nous obtenons par là la formule $\frac{pR^3}{c} = C$, où p est le coefficient du rayon dans la formule des moments de résistance des éléments du conoïde, et l la longueur du conoïde du sommet jusqu'à l'élément en question. Si donc l'on considère l comme une abscisse, et le rayon comme la semi-ordonée de la courbe génératrice qui se meut autour de l'axe, nous aurons pour équation à cette courbe $\frac{py^3}{x} = C$ et $y^3 = \frac{C}{p} \cdot x$, équation à une parabole cubique qui servira également pour la courbe intérieure, n étant invariable *).

§. 9.

Les constructeurs ont une autre courbe génératrice qui se forme de la manière suivante: Sur la droite AB (Fig. III.), qui représente le plus grand diamètre

*) Pour les leviers plats, comme par exemple les fléaux de balances, s'ils ont la même épaisseur sur toute leur longueur, on aura $y^2 = \frac{C}{p} \cdot x$, qui est l'équation à la parabole ordinaire. Mais si l'on fait varier l'épaisseur dans ces leviers plats comme dans les conoïdes, la courbe sera de nouveau notre parabole cubique. La théorie que nous venons de présenter est générale, applicable à tous les cas où un moment de force tend à rompre un corps qui agit comme levier. J'ai eu souvent occasion de l'appliquer aux tourillons de grandes roues pour diminuer la moment des frottements. Peut-être traiterai-je un jour ce sujet à part.

du conoïde solide, on décrit avec le rayon AB les deux arcs AC, BC, de 60 degrés et l'on tire les parallèles ab, ab, ab, etc. à des distances égales. Si l'on s'imagine la perpendiculaire DC (considérée comme axe du conoïde) prolongée jusqu'à ce qu'elle ait la longueur du mât entier, on partage cette longueur en autant de parties égales que DC l'a été et transporte sur les points de divisions homologues les droites ab, ab, ab, etc., qui seront les diamètres du conoïde à ces points, et dont les extrémités forment la courbe génératrice de ces mâts.

§. 10.

Voyons de combien cette courbe s'écarte de la vraie, en calculant les diamètres pour quelques points homologues dans l'une et l'autre courbe. Si on prolonge les droites ab et l'un des axes jusqu'à AF, élevée parallèlement à l'axe DC, il est clair que les demi-diamètres ne sont autre chose que les sinus des arcs Cb moins une constante égale à AD, qui elle-même est le sinus de l'angle de 30 degrés. En faisant dans la parabole cubique le rayon de la base $= 1$, nous avons pour tous les autres rayons l'expression simple $y = \sqrt[3]{x}$. Nous partageons la longueur du mât pour l'une et l'autre courbe en 8 parties égales et calculerons les ordonnées pour ces 8 divisions, la dernière étant considérée comme le diamètre du cône au point d'appui. Ce qui fournit la table suivante:

Points de division	Diamètres		Cubes ou résistances		Rapport des résistances en petits nombres
	Parabole	Courbe usit.	Par.	Courbe usitée	
I	1, 000	0, 606	1	0, 222545016	1 : 0, 223
II	1, 260	1, 038	2	1, 118386872	1 : 0, 559
III	1, 442	1, 358	3	2, 504374712	1 : 0, 835
IV	1, 586	1, 600	4	4, 096000000	1 : 1, 024
V	1, 710	1, 798	5	5, 812581592	1 : 1, 162
VI	1, 816	1, 902	6	6, 880682808	1 : 1, 147
VII	1, 912	1, 972	7	7, 668682048	1 : 1, 095
VIII	2, 000	2, 000	8	8, 000000000	1 : 1, 000

§. 12.

Cette table fait voir qu'au N°. IV, c'est-à-dire au milieu de la hauteur, les deux courbes livrent à peu près les mêmes diamètres et les mêmes résistances, et que le point d'égalité se trouve un peu au-dessus. Toute la partie supérieure de la courbe usitée a de trop petits diamètres, et toute la partie inférieure en a de trop grands. Ainsi les mâts de la construction usitée sont trop faibles dans leur partie supérieure et trop forts et par conséquent trop pesants dans leur partie inférieure. Ce surplus de matière inutile est en raison du carré des diamètres et peut être évalué à $\frac{1}{12}$.

§. 13.

L'avantage de légèreté qu'offre la moitié supérieure n'est qu'apparent et dégénère en désavantage; car si le mât construit sur la courbe usitée a assez de force par exemple au N°. II, il en a beaucoup trop et beaucoup trop de matière au N°. III. Ce trop est encore bien plus considérable, si l'on suppose que le mât soit assez fort au N°. I. Dans le premier cas le diamètre N°. III devrait avoir 1,187 au lieu de 1,358; dans le second 0,873 au lieu de 1,358. Dans le premier cas le diamètre effectif est de 0,14 trop grand, et sa masse de 0,30. Dans le second cas le diamètre effectif est de 0, 55, et sa masse de 1, 4 trop grande. Ces considérations sont appuyées par des considérations de pratique très importantes que nous allons ajouter.

§. 14.

Les mâts de grande taille (et c'est principalement pour eux que nous travaillons) sont composés de deux on trois mâts à part entés l'un au-dessus de l'autre. Prenons pour exemple le grand-mât d'un vaisseau de ligne. Il est composé du *bas-mât* que nous supposons commencer au niveau du pont, parce qu'en effet c'est là qu'il a son point d'appui, du *mât de hune* et du *mât de per-*

*

roquet. Le bas-mât s'élève jusqu'à un peu au-dessus de la moitié de la hauteur entière et se trouve par conséquent dans la moitié inférieure de notre table du §. 10., de sorte que son diamètre supérieur se trouve à très peu de chose près de même grandeur soit qu'on le construise sur la parabole cubique, soit qu'on ait employé la courbe usitée. Ainsi toute cette partie du mât entier (et c'est la plus considérable) est de $\frac{1}{12}$ trop lourde.

§. 15.

Le mât de hune a une longueur à peu près égale à 0,64, c'est-à-dire à plus de $\frac{5}{8}$ du reste. Ainsi, si l'on considère le reste entier comme un seul mât dont le diamètre inférieur est le point d'appui, comme cela doit être, ses $\frac{4}{8}$ pris de bas en haut se trouveront dans la partie inférieure de notre table, et le cinquième dans la partie supérieure. Ainsi pour les premiers $\frac{4}{8}$ il aura, comme le bas mât $\frac{1}{12}$ de masse de trop et si l'espace entre $\frac{4}{8}$ et $\frac{5}{8}$ est d'une force suffisante, il s'en suit, par le §. 13, que le diamètre inférieur de ce mât est trop grand, et par conséquent le mât par cette seconde raison encore trop lourd.

§. 16.

Le mât de perroquet ne se termine pas en pointe; mais son diamètre supérieur a de règle $\frac{1}{3}$ de l'inférieur. Donc il s'étend dans notre table du §. 10. depuis le N°. VIII jusqu'au N°. I. Il a donc, depuis VIII à IV, $\frac{1}{12}$ de poids de trop; et si de IV à I il est assez fort, il s'en suit, par le §. 13, qu'il a trop de masse au moins dans la proportion de 5 : 12 *).

§. 17.

On doit donc conclure de ces considérations que les mâts construits sur la

*) Le mât de perroquet étant très petit comparé au reste, on pourrait penser qu'on peut négliger sa masse et les épargnes qu'on peut y faire ; mais comme ce mât est la partie la plus élevée du vaisseau (il se trouve sur un vaisseau de 100 canons à plus de 200 pieds au-dessus du pont), sa masse devient très importante dans les moments de tourmente.

courbe décrite au §. 9. ont en vertu de cette courbe plus de $\frac{1}{12}$ de matière de trop. Nous voulons nous en tenir à $\frac{1}{12}$ pour le présent, et considérer de plus près les mâts composés de plusieurs mâts entés l'un sur l'autre.

§. 18.

Problème. Trouver les grands diamètres des trois mâts qui composent le grand mât d'un vaisseau de ligne. Fig. IV.

La force de la voile G est la seule qui agisse sur le mât. La moitié agit sur le point D, l'autre moitié, appliquée en C, n'agit que sur le mât inférieur. Donc l'effort en D est $= \frac{1}{2} G$. (X)

Pour le mât BD, composé de BC et CD, l'effort sera: 1) $\frac{1}{2} G$, qui agit en D. 2) $\frac{1}{2} G$ appliquée en C, et qui, réduite au point D, est $= \frac{\frac{1}{2} G \cdot b}{b+c}$. 3) $\frac{1}{2} F$, appliquée en C et qui, réduite au point D, est $= \frac{\frac{1}{2} F \cdot b}{b+c}$. Donc la somme des efforts qui sont censés appliqués en D pour rompre le mât BD est $= \frac{1}{2} G + \frac{\frac{1}{2} G \cdot b}{b+c} + \frac{\frac{1}{2} F \cdot b}{b+c} = \frac{1}{2} G + \frac{1}{2} (G+F) \frac{b}{b+c}$ (Y)

Pour le mât AD, composé des trois longueurs, nous aurons 1) toutes les forces qui agissent sur le mât BD, telles que nous venons de les déterminer, 2) $\frac{1}{2} F$ appliquée en B et qui, réduite au point D, est $= \frac{\frac{1}{2} F \cdot a}{a+b+c}$. 3) $\frac{1}{2} E$ appliquée en B et qui, réduite au point D, est $= \frac{\frac{1}{2} E \cdot a}{a+b+c}$. Donc la somme des efforts appliqués en D pour rompre le mât AD est $= \frac{1}{2} G + \frac{1}{2} (G+F) \frac{b}{b+c} + \frac{1}{2} (F+E) \frac{a}{a+b+c}$. (Z)

L'effort de chaque voile étant supposé connu, de même que les longueurs a, b, c, l'on a par les formules Z, Y, X les moments de ces efforts sur les points A, B, C comme points d'apui des mâts AD, BD, CD, dont il n'existe en effet que les portions AB, BC, CD. Si donc l'expérience a appris quel grand diamètre le mât solide AD doit avoir pour résister suffisamment, on trouvera avec facilité les diamètres inférieurs des deux autres mâts BD et CD par la loi que

les diamètres sont en raison des racines cubiques des forces; et quand on a les diamètres des mâts solides, l'on trouve, par la formule du §. 4, les diamètres des mâts creux.

Prenons pour exemple le grand mât d'un vaisseau de 100 canons. Son bas-mât AB (le pont étant représenté par PQ) a 115 pieds de hauteur (pieds de Paris) son mât de hune a 87 pieds et son mât de perroquet 48 pieds. Ainsi les mâts théoriques sont: $CD = 48'$, $BD = 135'$, $AD = 250'$. Le grand diamètre A, pour un tel mât, est $= 4'$. Si donc l'on calcule dabord l'effort entier du vent sur le mât AD, exprimé par les proportions des voiles et au moyen de la formule (Z), puis celui du vent sur le mât BD, exprimé par les proportions des voiles qui agissent sur lui et au moyen de la formule (Y), enfin celui du vent sur le mât CD, exprimé par la proportion de la voile G et au moyen de la formule (X), on trouvera aisément les grands diamètres des deux derniers mâts au moyen de la loi que nous venons de citer.

§. 19.

Les constructeurs ont résolu ce problème à tâtons. Mais il vaut mieux le résoudre de la manière qui vient d'être décrite, faisant néanmoins attention que le vent étant plus fort à certaines hauteurs que près de la surface de la mer, il faut ajouter, avant le calcul, à la voile de hune $\frac{1}{10}$ de sa surface, et à la voile de perroquet $\frac{1}{5}$ de sa surface. Les constructeurs admettent pour règle que le grand diamètre du mât de perroquet doit être $\frac{1}{48}$ de sa longueur et donnent en effet au perroquet d'un vaisseau de 100 canons un grand diamètre de 1 pied. Pour le mât de hune $\frac{7}{288}$ de sa longueur, ainsi $2' \cdot 1\frac{1}{2}''$. Pour le bas-mât le grand diamètre doit être $\frac{1}{36}$ de sa longueur; ce qui donne $3' \cdot 2\frac{1}{3}''$; mais ils ont admis $4'$ pour ce diamètre, ce qui ne cadre que dans la supposition que l'on ajoute au bas-mât AB les 30 pieds qu'il a au-dessous du pont. Or, on ne peut concevoir comment ces 30 pieds au-dessous du pont peuvent être une fonction du diamètre A, qui doit être déterminé par l'effort du vent, qui n'a lieu qu'au-dessus du pont. Quelle foi peut-on accorder à ces règles?

§. 20.

Il appartient au constructeurs instruits de corriger ces erreurs, si elles existent encore en pratique. Pour nous, qui n'en sommes pas à même, nous poursuivons notre travail en admettant les dimensions fondamentales que la pratique a fournies, pour calculer les autres, posant en outre en principe que les cordages, au moyen desquels on fixe le bout supérieur du bas-mât aux bords du vaisseau et les autres au mât de hune, n'augmentent pas la résistance des mâts. En effet, l'angle sous lequel ces cordages agissent n'étant qu'environ de $14\frac{1}{2}$ degrés et moins, et l'humidité les allongeant et raccourcissant tour à tour, on ne doit compter sur d'autre effet de leur part que sur celui de diminuer les vibrations causées par les coups de vent et leur élasticité.

§. 21.

Pour se décider sur la proportion des rayons de cercles d'un mât creux, ou sur la valeur de n à choisir, considérons la table du §. 7, et prenons un vaisseau de ligne de 100 canons pour exemple, conservant pour cet examen les diamètres que la pratique a fixés pour le bas-mât, le mât de hune et celui de perroquet, cités au §. 19. Si nous faisons $n = \frac{10}{9}$; les diamètres de la circonférence extérieure seront $7'\cdot5''\cdot1\frac{3}{4}'''$; $3'\cdot11''\cdot3'''$; $1'\cdot10''\cdot3\frac{1}{2}'''$; les épaisseurs des couronnes pour ces diamètres seront $4''\cdot5\frac{1}{2}'''$; $2''\cdot4\frac{1}{3}'''$; $1''\cdot1\frac{1}{3}'''$. Ces résultats font voir que, si l'on a de bon bois de sapin, la proportion $\frac{10}{9}$ est très praticable, et qu'il ne se trouvera probablement pas de cas où il faille en choisir une plus petite. Au contraire, pour les grand mâts d'un vaisseau de 120 canons, on pourra employer la proportion $\frac{11}{10}$ et même $\frac{12}{11}$.

§. 22.

La valeur de n étant admise, nous pouvons évaluer le gain en légèreté qu'on fera par les mâts solides. La table du §. 7, fixe ce gain à 0,343. La courbe

génératrice nous offre un second gain évalué à $\frac{1}{12}$ ou 0,083. Ainsi notre théorie nous fournit déjà une diminution de matière qui se monte à 0,426 du poids du mât solide. Mais ce n'est pas tout.

§. 23.

Nos conoïdes creux seront composés de 16 fuseaux, dont la plus grande épaisseur pour un vaisseau de 100 canons sera $4''.5\frac{1}{2}'''$. Ce bois peut être choisi avec le plus grand soin, et l'on pourra s'assurer qu'il est le plus ferme et de la meilleure qualité possible, sans défaut intérieur. Les grands mâts ordinaires sont par contre composés de plusieurs gros quartiers, dont on ne voit pas l'intérieur, qui peut avoir des noeuds considérables et un commencement de pourriture, outre que de gros quartiers sont toujours composés de bois moins ferme à l'extérieur qu'à l'intérieur.

§. 24.

Ces gros quartiers sont entés sur la longueur; ce qui affaiblit considérablement la force du mât et force de placer à ces endroits faibles de grosses jumelles, qui augmentent le poids du mât sans lui donner cependant toute la force requise, parce que si même le bois des jumelles offre une résistance suffisante, les boulons, au moyen desquels on joint un quartier aux autres, ne peuvent pas la fournir. Par contre les jointures semblables dans un mât creux ne diminuent la solidité que de $\frac{1}{16}$, et nous verrons au chapitre suivant comment l'on peut réparer parfaitement cette perte.

§. 25.

Si nous ajoutons à ces deux considérations celles des §. 13, 14, 15 et 16, on concevra sans peine que l'on peut donner aux mâts creux encore plus de légèreté sans les rendre plus faibles que les mâts solides, et l'on ne risquera sûrement rien à diminuer le diamètre de ceux-ci de $\frac{1}{25}$, et de calculer celui des mâts creux sur ce diamètre diminué. On effectuera par là une diminution du poids

= 0,085, qui ajouté aux diminutions précédentes rendra notre mât de 0,511 plus léger que le mât solide de même force.

§. 26.

Les mâts creux auront, outre l'avantage de la légèreté, celui de résister mieux aux boulets de canon. Un boulet de 24 ou 36 livres, qui frappe presque directement un mât solide, le fracasse, par ce que la masse du bois est trop épaisse pour se laisser percer de part en part; et s'il le frappe obliquement il le fait trémousser avec telle violence que le mât de hune et de perroquet ne peuvent résister. Le mât creux au contraire offre au boulet une si petite épaisseur, que, si le boulet le frappe directement ou à peu près, il le perce de part en part, comme une balle de fusil une planche ordinaire et lui laisse encore beaucoup plus de force qu'il n'en faut pour la manoeuvre. S'il le frappe obliquement, un seul fuseau est fracassé et le boulet ricochète. Le bas-mât creux peut être ainsi frappé de deux et trois boulets sans être mis hors de service et sans que les mâts supérieurs soient abattus. Ainsi, quoique le nombre des chances soit pour les mâts creux presque double de celui des chances pour le mât solide, cependant le mât creux conserve à cet égard un grand avantage.

Chapitre III.

Considérations de pratique

---

§. 27.

Les mâts creux étant composés de fuseaux, le premier problème de pratique à résoudre est la construction d'un fuseau qui serve d'étalon sur le quel on construira tous les autres. Pour cet effet il faut calculer les ordonnées; et afin que cette série d'ordonnées puisse servir à tous les mâts, de quelle hauteur et gros-

seur qu'ils puissent être, et fournir le nombre suffisant de ces ordonnées pour servir aux plus grands mâts, dans la supposition que les abscisses croissent de 2 pieds, on supposera la hauteur du plus grand mât au dessus du pont jusqu'à la pointe du perroquet = 300 pieds. La table des ordonnées contiendra donc 150 semi-ordonnées, dont les valeurs seront $\sqrt[3]{}$ 1, 2, 3, 4, 5 et jusqu'à 150.

Ces valeurs seront donc générales et pourront représenter non seulement les différents diamètres d'un mât quelconque, mais aussi les largeurs décroissantes de chaque fuseau et les épaisseurs. Pour les faire servir immédiatement à la construction, l'on divisera en 1000 parties égales la moitié de la plus grande largeur du fuseau de ce mât de 300 pieds de hauteur, largeur qui est censée représentée par 1000. Cette table de 150 nombres étant calculée immédiatement pour le grand-mât d'un vaisseau de 120 canons, il suffira de multiplier par 1000 tous les nombres dont on aura besoin pour avoir toutes les demi-largeurs des fuseaux.

§. 28.

Cette table dont les termes sont ainsi multipliés par 1000, servira de base pour trouver graphiquement les semi-ordonnées de tous les autres cônoïdes ou mâts creux de moindre grosseur au moyen de l'instrument suivant:

ABD est un triangle équilatéral (Fig. V.), en laiton, dont chaque côté intérieur aura une longueur égale à la largeur entière d'un fuseau du grand-mât de 120 canons (à peu près 21″) et que l'on partage en 2000 parties égales, dont chacune aura presque $\frac{1}{8}$‴. Le côté *BD;* ou la base, se partagera de manière à ce que le zéro soit en *J* (milieu de la base) et les divisions à droite et à gauche de *J*. On peut même se dispenser de diviser une des moitiés. Pour les deux autres côtés du triangle, le zéro se trouve précisément au sommet et les 2000 divisions s'étendent de là vers le bas. Une Alhidade *CE* se meut autour de ce sommet *C* de l'angle *C*. Une règle *FG* sera également partagée en 1000 des mêmes parties de chaque côté de son milieu *H*, où se trouve le zéro. Enfin l'on marquera d'un signe particulier les divisions de la base qui correspondent aux nombres de la table.

Le grand diamètre d'un mât quelconque étant donné, on exprimera la plus grande demie largeur de son fuseau en millièmes des échelles du triangle et cherchera ce nombre des deux côtés du milieu *H* de la règle et celui de toute la largeur sur les côtés *CB* et *CD* du triangle, à compter du sommet *C*. Cela étant fait, on placera la règle *FG* sur le triangle paralèlement à *BD*, de sorte que les points marqués sur la règle coïncident avec les points marqués sur les côtés du triangle. La règle étant ainsi fixée à demeure, l'on fera marcher l'alhidade de *E* en *B*; et à chaque division notée comme comme congruente avec les nombres de la table on note la division correspondante de la règle; ce qui fournira les semi-ordonnées des fuseaux. Comme chaque partie de la règle est à peu près $\frac{1}{8}'''$ et qu'on pourra en évaluer la moitié au coup-d'oeil, il est clair que les fautes ne peuvent pas aller à $\frac{1}{16}'''$. Pour les petits mâts il ne sera pas nécessaire de prendre toutes les semi-ordonnées désignées dans les tables, mais seulement la 1e, la 3e, la 5e, la 7e etc.

§. 29.

Pour transporter ces semi-ordonnées sur le bois qui fournira le fuseau-étalon, on se servira de l'instrument suivant:

AB (Fig. VI.) est une règle de laiton égale à *FG* de la fig. V. et divisée précisement comme elle. Cette règle est fixée à angles droits sur une tige *CD* et retenue par deux tringles *AD* et *BC*, vissées sur la tige et la règle. Le bois, dont on fera le fuseau étalon, étant preparé partout de même épaisseur on fera dans le milieu et sur toute la longueur une rainure dans la quelle la tige pourra s'enfoncer à frottement de façon que lorsqu'on fera marcher l'instrument, la règle *AB* touche toujours la planche et marche toujours parallèlement à elle même.

Cela étant fait on marquera au fond de la rainure les points qui déterminent la distance d'une ordonnée à l'autre. On fera marcher l'instrument dans la rainure et à chaque distance marquée on tirera les parallèles le long de *AB* et marquera les deux extrémités des ordonnées, telles que le triangle fig. V. les a livrés. Après quoi l'on joint ces points par des droites qui formeront assez exactement la parabole cu-

bique. Cette courbe étant décrite, l'on retournera le fuseau et décrira de la même manière la parabole cubique intérieure.

A présent l'ouvrier enlèvera, d'abord avec une scie à dents fines, puis avec le rabot, tout le bois superflu, aussi exactement que possible; ce qui fournit un fuseau, mais d'égale épaisseur sur toute sa longueur. Les deux côtés ont d'eja leur biais et l'on pourra s'assurer qu'il a été bien observé partout au moyen d'une équerre en fer, dont l'angle intérieur a exactement $78\frac{3}{4}$ degrés. Cela étant fait, cet étalon peut servir à dessiner les côtés paraboliques des seize faseaux.

§. 30.

Pour donner à ces fuseaux les épaisseurs variables qu'ils doivent avoir, on construira une table particulière d'ordonnées en ajoutant à chaque nombre $\frac{1}{200}$ de sa valeur, égal à la différence du sinus de $78° 45'$ au rayon, par ce que nous serons obligés de porter les ordonnées sur le biais des fuseaux. On trouvera la grandeur de ces ordonnées par la méthode précédente au moyen du triangle et de son alhidade. Pour transporter ces ordonnées l'on aura une équerre semblable à la précédente, dont le manche aura un pouce en carré et sera bien écarissé; L'angle intérieur sera de $78\frac{3}{4}$ degrés et la branche (qui aura un peu plus de la longueur de la plus grande épaisseur d'un plus grand fuseau) portera une division de même espèce que celle des instruments précédents. On construira par là une seule parabole, laissant droit le côté extérieur; qui doit avoir été rabotté autant que possible selon le fil du bois. En enlevant le surplus de matière seulement du coté de l'intérieur, on tranchera à la vérité le fil du bois. Mais comme il faudra à la suite courber les fuseaux vers le dedans pour les assembler, on ne risquera pas que les fibres se détachent les unes des autres; au contraire la courbure les comprimera et en augmentera la résistance de pression.

§. 31.

On donne de règle trop de grosseur à la partie des bas-mâts sous le pont, ou plutôt on diminue de beaucoup trop peu leurs diamètres; il en est de même de la

partie intérieure des mâts de beaupré. L'on croit apparemment augmenter par là leur solidité; mais c'est une erreur qui ne produit qu'une augmentation de poids. Si l'on donne à cette partie intérieur du mât tout nettement la forme parabolique cubique, à compter du pont pour les mâts verticaux et du bord de la proue pour les mâts de beaupré, il est certain qu'ils auront toute la force de résistance nécessaire avec une masse beaucoup moindre. Nous verrons plus bas comment, sous cette supposition, l'on peut affermir très solidement la pointe du conoïde.

§. 32.

Les mâts creux étant composés de fuseaux, il sera facile de trouver le bois nécessaire de la meilleure qualité et d'une longueur considérable. Mais cette longueur ne suffira pourtant pas pour bien des cas, sur tout pour les bas-mâts, dont la partie supérieure (au dessus du pont) doit faire corps avec la partie inférieure (au dessous du pont). En ce cas il faudra enter un fuseau sur l'autre de la manière qui sera décrite ci après. Dans tous les cas on ne doit pas réunir plusieurs de ces jointures dans le même plan horizontal, mais les partager toutes à distances égales sur toute la hauteur du mât qu'on veut composer, de sorte qu'il ne s'en trouve jamais deux dans le même plan horizontal. A cet effet le constructeur dessinera sur une feuille de papier ses 16 fuseaux, et, consultant la longueur de son bois, il disposera les joints sous la condition énoncée. Si, par exemple, la longueur totale (extérieure et intérieure) d'un bas-mât est de 150 pieds, et qu'il ait du bois de 50 pieds de longueur, alors chaque fuseau sera composé de trois brins et aura trois joints. Pour le mât de hune il n'aura que deux brins et deux joints; pour le mât de perroquet un seul brin et un seul joint.

Le constructeur dessinera les joints sur le premier fuseau à distances égales; puis il partagera les intervalles entre deux joints en 15 parties égales, qu'il notera sur le premier fuseau et transportera ces quinze successivement en échelons sur les quinze autres fuseaux. Des parallèles tirées par tous ces points indiqueront les joints pour tous les fuseaux.

§. 33.

Les fuseaux étant construits tel qu'il a été décrit, leur assemblage se fait de la manière suivante:

1) Après avoir numéroté les pièces qui seront contigues l'une à l'autre, l'on mettra toutes ces pièces dans une caisse de bois parallèlipipédique, capable de les contenir. Cette caisse, munie d'un couvercle, doit pouvoir contenir de l'eau chaude. A deux pouces du fond on établit un fond postiche percé de plusieurs raugs de très petits trous. Auprès de cette caisse se trouve une chaudière sur un fourneau pour produire de la vapeur qu'on introduira entre les deux fonds de la caisse. L'appareil étant ainsi disposé, on y place toutes les pièces du mât à assembler et ensuite le couvercle qui au bout opposé à celui où est la chaudière, a une grande ouverture, par la quelle on verse de l'eau dans la caisse jusqu'à ce qu'elle soit presque pleine. Alors on fait entrer la vapeur entre les deux fonds, qui, au moyen des trous du fond postiche se répand dans toute la caisse et l'échauffe. Dès que cette eau eau est en ébullition on rallentit l'introduction de la vapeur en diminuant le feu sous la chaudière, de sorte qu'elle ne produise que ce qu'il faut de vapeur pour tenir l'eau de la caisse au degré de l'ébullition. On laisse l'appareil dans cet état pendant 6, 12 ou 18 heures selon la grosseur des pièces afin d'être sûr que tout le bois a acquis la chaleur de l'eau bouillante jusques dans son intérieur et que ses sucs gommeux ont été délayés par l'eau.

2) Le bois ayant subi cette opération il est devenu très flexible et l'on procède à l'assemblage pendant qu'il a toute sa chaleur. Pour cet effet l'on a une espèce de chantier composé d'un fort chassis de la longueur du mât à construire. Ce chassis porte de 6 en 6 pieds de distance des parois verticales placées en travers du chassis et échancrées sur la courbure de 180 degrés d'un cercle un peu plus grand que celui du mât aux points où il reposera sur les parois. Les fuseaux étant assemblés sur ce chantier comme ils doivent l'être, on les serrera ensemble dabord avec des cordes qu'on tordra avec un bâton, puis avec les cercles de fer destinés à ce bût.

§. 34.

Ces cercles sont composés de deux moitiés *ABD* et *EFG* (Fig. VII.), dont chacune est de 8 degrés plus petite que le demi-cercle. A chaque bout de ces moitiés est une mâchoire, *ab*, *cd*, perpendiculaire à l'élément et joint au demi-cercle par un grossissement de la masse de celui-là, qui s'étend en diminuant jusqu'en *e* et *f*, à environ 16 degrés du point *a* ou *c*. Ces mâchoires sont percées de trous pour recevoir un boulon à vis et écrou *gh* ou *ik*, au moyen du quel on serre les deux demi-cercles et comprime par là les fuseaux les uns contre les autres, en sorte qu'ils se touchent par tout. Les dimensions de ces cercles sont:

La largeur égale à	1	épaisseur du fuseau à ce point.
L'épaisseur	$\frac{1}{10}$	— — — —
L'épaisseur de la machoire	$\frac{5}{10}$	— — — —
L'epaisseur du renfort *ac* près de la mâchoire	$\frac{4}{10}$	— — — —
Le diamètre du boulon *hg*	$\frac{4}{10}$	— — — —
L'épaisseur ou hauteur de l'écrou . . .	$\frac{5}{10}$	— — — —

Pour les mâts dont le grand diamètre extérieur n'aura que 2 pieds ou moins, l'on augmentera toutes les épaisseurs d'un tiers.

§. 35.

Les cercles seront placés par tout où il se trouvera une jointure, de façon que le cercle la couvre. Dans les mâts qui n'ont pas de jointure on les placera à 4 ou 5 pieds l'un de l'autre *). Le serrement des cercles comprimera les angles des arêtes; ce qui aura le double avantage de durcir le bois à ces points et de fixer irrévocablement la place des cercles pour le cas où le bois se dessécheroit. Voilà pourquoi il n'a pas été prescrit d'enlever ces arêtes au rabot.

---

*) Si l'on compare la masse de tous ces cercles de fer à celle des cercles et boulons des mâts massifs tels qu'on les construit ordinairement, on trouvera celle-là d'environ $\frac{1}{4}$ moindre.

§. 36.

Les fuseaux ayant été assemblés et serrés par les cercles de fer sur le chantier décrit au §. 32, on laissera sécher le mât sur le chantier, ayant soin de le tourner chaque jour une fois sur son axe pour présenter successivement chaque moitié de sa surface à la lumière. On le placera dans la direction du vent de manière à ce que celui-ci s'engoufre par la base, afin que le mât sèche intérieurement comme extérieurement. Pour atteindre ce but avec plus de succès on placera le chantier sur des roues afin de le tourner au vent. De quatre en quatre heures on serrera toutes les vis autant que possible afin de tenir les fuseaux toujours serrés. De nuit, pour arrêter la rosée et chaque fois qu'il commencera à pleuvoir on couvrira le mât d'une toile goudronnée.

Si l'on a lieu de croire que la partie intérieure du mât ne sèche pas aussi vite que l'extérieure, ce dont on pourra s'assurer en observant les joints longitudinaux, on établira devant la grande embouchure du mât un petit poële de tôle, dont la chaleur sera introduite par le vent dans l'intérieur du mât.

Après s'être bien assuré que le mât est aussi sec qu'il peut l'être à l'air, alors on le placera sur le vaisseau et le goudronnera. Mais même lorsqu'il sera en place, on aura soin pendant un an entier d'essayer de semaine en semaine de serrer les cercles davantage, pour le cas où il séchât encore.

§. 37.

Quant aux jointures horizontales des fuseaux, on les traitera de la manières suivante pour restituer à ces points la force du mât. Soit (Fig. VIII.) *RQ* la jonction de deux fuseaux *ORQP* et *SRQT*. On placera sur cette jonction un crampon à quatre branches *ACBDEE*, muni à chaque branche de 6 trous pour y passer des vis qu'on fera entrer dans le bois. Le crampon aura les dimensions suivantes:

La largeur de la partie $c = \frac{3}{4}$ de l'épaisseur du fuseau à ce point.

La longueur de la partie $c = 1\frac{1}{2}$ — — — —

L'épaisseur de la partie $c = \frac{1}{8}$ de l'épaisseur du fuseau à ce point.

La longueur d'une branche $= 5$ — — — —

La largeur des branches $= \frac{3}{8}$ — — — — *)

L'épaisseur des branches à l'origine sera la même que celle du milieu c et diminuera en s'éloignant de c, de sorte qu'au bout elles n'aient que la moitié de cette épaisseur. Le diamètre des vis sera $= \frac{1}{7}$ de l'épaisseur des fuseaux à la jointure. La place des crampons est représentée par o, dans la fig. VII.

§. 38.

Ces crampons fournissant la résistance longitudinale requise, il faut encore pourvoir à la résistance de compression, qui manquerait à ces jointures, au moins en partie, par ce qu'en assemblant les fuseaux l'on n'a aucun moyen pour en presser les bouts l'un sur l'autre avec la force requise, et parce qu'en les serrant par les cercles on les courbe et forme par là un petit hiatus à la jonction horizontale. Pour atteindre ce but et même rehausser la résistance de compression, l'on enfoncera avec beaucoup de force des coins de fer minces dans les parties des jonctions qui ne sont pas couvertes par les crampons. Cette forte tension se transférera au bois, là où les vis des crampons sont appliquées, et donnera à ces vis des points d'apui d'une

---

*) Ces dimensions ne sont pas fixées au harard; le calcul prouve aisément qu'elles fournissent une résistance longitudinale de plus de $\frac{1}{3}$ qu'il ne faut.

Soit l'épaisseur du fuseaux $= 1, 00$.
La largeur du fuseau sera $= 2, 68$.
La coupe horizontale sera . . . . . . $= 2, 68$, nombre qui peut exprimer la force que le fuseau, aurait à ce point s'il était entier.
La largeur du fer c . . $= 0, 750$.
L'épaisseur du fer c . . $= 0, 125$.
La coupe horizontale du fer c sera . . $= 0, 0937$.

Mais la force du fer forgé est environ 8, 8 de celle du bois de sapin; donc la force de la coupe horizontale du fer c . . . $= 0, 8245$. Mais le mât n'a besoin que de $\frac{1}{4}$ de sa force longitudinale, comme nous l'avons vu plus haut. Donc la force requise ici est $\frac{2, 68}{4} = 0, 67$, force réellement de $\frac{1}{3}$ moindre que celle que le crampon nous fournit.

résistance d'autant plus grande, pour soutenir leur effet relativement à la résistance d'extension.

On ne placera ces coins de fer que lorsque le mât sera en place. Pour cet effet on élèvera un peu le cercle de fer en l'élargissant et le resserrant ensuite. Après avoir enfoncé les coins on remettra le cercle à sa place, qui couvrira les coins et les retiendra à leur place.

§. 39.

Avant de quitter cet article des jonctions horizontales, il faut dire encore un mot des vis qui arrêtent ces crampons aux fuseaux et en forment proprement la jonction. Ordinairement on donne aux vis à bois (vis de métal qu'on introduit dans le bois) tant de pas qu'il ne reste qu'un petit espace cylindrique entre le dernier pas et la tête, de sorte que cet espace est à peine aussi long que la plaque (de bois ou de métal) qu'on veut fixer à la masse principale est épaisse. Cela n'a pas d'inconvénient lorsque l'on n'a d'autre but que de fixer une pareille plaque de sorte qu'un effort agisse perpendiculairement ou dans la direction de la longueur de la vis, auquel cas l'on fait bien de multiplier les pas de la vis. Mais dans les cas où, comme pour nos crampons, l'effort agit dans une direction perpendiculaire à la longueur de la vis, où par conséquent la vis fait l'effet de levier, alors il ne faut donner que peu de pas à la vis, pour que sa partie entière (non affaiblie par la taille des pas) soit plus longue et appuie sur le bois par une surface parfaitement cylindrique. Ce n'est qu'à cette condition qu'on tirera tout le parti possible de la masse de la vis. Il faut encore ajouter que l'on percera les trous dans les branches des crampons en direction perpendiculaire à la surface de ces branches, c'est-à-dire inclinée dans le sens vertical à l'axe du mât, et que les trous percés dans le bois doivent être assez étroits pour que la vis n'y entre qu'avec force, sans cependant risquer de fendre le bois.

§. 40.

Il nous reste encore à considérer la jonction des mâts de hune aux bas-mâts et des mâts de perroquet aux mâts de hune. On peut adopter deux méthodes.

La première est du genre de celle qui a ordinairement lieu et consiste à enter les bouts des deux mâts l'un à côté de l'autre, et de les serrer l'un contre l'autre par des cercles de fer et des vis. Soient (Fig. IX.) *A* et *B* les deux mâts à joindre. On flanquera chacun d'eux, aux points qui doivent se toucher, de jumelles *acdf* et *bcdg*. Leur épaisseur sera égale à la double somme des épaisseurs d'un fuseau du mât *A*, et d'un fuseau du mât *B* à leurs extrémités. On attachera chacune de ces jumelles à son mât par quelques vis. Pour la réunion des deux mâts on emploiera deux demi-cerceaux de fer *iahfi* et *ibkgi*, qu'on serrera par un boulon à écrou comme les demi-cercles des mâts. Leur largeur sera la même que celle du dernier cercle du mât *A*, et leur épaisseur double. Pour empêcher que les mâts ne se compriment à cette jonction par la violence des coups de vent, au point de s'applatir, on placera dans l'intérieur des planches *lmno* et *pqrs*, qui tiennent les parties opposées à leur distance naturelle. L'épaisseur de ces planches est double de l'épaisseur des fuseaux du mât *B*. Enfin, pour ne pas se fier uniquement au frottement des faces des jumelles à leur jonction *cd*, on appliquera une vis *uv* qui traversera les fuseaux et les jumelles; leur diamètre sera égal au triple de l'épaisseur des cerceaux *iahfi*. Chaque jonction de ce genre sera double. L'une sera placée à la plus grande hauteur du mât inférieur, et l'auteur au plus bas point du mât supérieur. La distance de l'une à l'autre, que l'on nomme *le ton*, sera pour le mât de hune $\frac{1}{6}$ de la longueur de ce mât et pour le mât, de perroquet également $\frac{1}{6}$ de sa longueur *).

La séconde méthode, que je propose, consiste à enter les mâts *l'un dans l'autre*. Le ton aura ici la même longueur que dans la première méthode. Il suffit de considérer la fig. X. pour comprendre la chose. Les mâts sont, sur la longueur du ton l'un dans l'autre; le petit a aux deux extrémités du ton ses cercles de fer, et vis-à-vis de ces cercles on visse dans les fuseaux du grand mât 8 vis à tête perdues,

*) Dans la construction ordinaire on donne des dimensions toutes différentes, dont je ne conçois pas la raison. Ce qui est certain, c'est que les dimensions qui viennent d'être fixées pour les mâts creux seront suffisantes.

ah, *ab*, *ab*, etc. qui appuient sur le cercle de fer du petit mât. Ici les vis ne peuvent avoir trop de pas. Un cercle de fer *aaaa* s'applique ensuite sur le mât extérieur de sorte qu'il couvre et presse les têtes de ces vis et leur sert d'appui. Le diamètre de ces vis sera le même que celui de la vis *uv* (fig. IX.) et l'épaisseur et la largeur de ce cercle *aaaa* seront les mêmes que celle du cerceau *iahfgkb* (fig. IX).

§. 41.

Je ne puis terminer ce mémoire sans communiquer une idée touchant cette jonction des mâts. Il ne serait pas difficile d'imaginer un mécaninisme au moyen duquel, au lieu de caler les mâts de hune et de perroquet dans le tems d'une violente tempête, de les emboîter, celui de perroquet dans le mât de hune et celui-ci dans le bas mât. La tempête étant passée on pourrait les faire ressortir et les fixer à leur place. Des constructeurs éclairés pourront apprécier cette idée.

Il suit de tout ce qui a été dit dans ce mémoire, que les mâts creux construits dans les principes énoncés, ne sont que de moitié aussi pesants et ont cependant un peu plus de force que les mâts solides construits dans les principes ordinaires.

RECHERCHES GÉNÉRALES

SUR LA

TRANSFORMATION DES FONCTIONS PAR SUBSTITUTION

PAR

M. COLLINS.

(Lu le 4 Octobre 1826.)

1) Soit $\psi(u)$ une fonction quelconque de la variable u, et supposons qu'en y substituant à u une autre fonction φx, on en obtienne la transformée $X = \psi(\varphi x)$. En différentiant successivement cette équation, on en tire:

$$X' = \psi'(\varphi x)\cdot\varphi' x$$

$$X'' = \psi''(\varphi x)\cdot(\varphi' x)^2 + \psi'(\varphi x)\cdot\varphi'' x$$

$$X''' = \psi'''(\varphi x)\cdot(\varphi' x)^3 + 3\psi''(\varphi x)\cdot\varphi' x\cdot\varphi'' x + \psi'(\varphi x)\cdot\varphi''' x$$

$$X^{IV} = \psi^{IV}(\varphi x)\cdot(\varphi' x)^4 + 6\psi'''(\varphi x)\cdot(\varphi' x)^2\cdot\varphi'' x + \psi''(\varphi x)[3(\varphi'' x)^2 + 4\varphi' x\cdot\varphi''' x] + \psi'(\varphi x)\cdot\varphi^{IV} x$$

etc. etc.

En désignant, suivant KRAMP, la *faculté numérique:* $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$ par $n!$, on pourra présenter ces équations sous cette forme:

$$\frac{X'}{1!} = \frac{\psi'(\varphi x)}{1!}\cdot\frac{\varphi' x}{1!}$$

$$\frac{X''}{2!} = \frac{\psi''(\varphi x)}{2!}\cdot\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^2 + \frac{1!}{1!}\,\frac{\psi'(\varphi x)}{1!}\cdot\frac{\varphi'' x}{2!}$$

$$\frac{X'''}{3!} = \frac{\psi'''(\varphi x)}{3!}\cdot\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^3 + \frac{2!}{1!1!}\,\frac{\psi''(\varphi x)}{2!}\cdot\frac{\varphi' x}{1!}\cdot\frac{\varphi'' x}{2!} + \frac{1!}{1!}\,\frac{\psi'(\varphi x)}{1!}\cdot\frac{\varphi''' x}{3!}$$

$$\frac{X^{IV}}{4!} = \frac{\psi^{IV}(\varphi x)}{4!}\cdot\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^4 + \frac{3!}{2!1!}\cdot\frac{\psi'''(\varphi x)}{3!}\cdot\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^2\cdot\frac{\varphi'' x}{2!} + \frac{\psi''(\varphi x)}{2!}\left[\frac{2!}{2!}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^2 + \frac{1!1!}{2!}\,\frac{\varphi' x}{1!}\cdot\frac{\varphi''' x}{3!}\right] + \frac{1!}{1!}\,\frac{\psi'(\varphi x)}{1!}\cdot\frac{\varphi^{IV} x}{4!}$$

et ainsi de suite.

Enfin, le symbolisme proposé par ROTHE *) nous fournit le moyen d'exprimer la loi générale de ces relations par l'équation suivante:

$$[A]\ \frac{X^\mu}{m!} = S\left[\frac{(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{m}{a})!}{\overset{1}{a}!\ \overset{2}{a}!\cdots\cdots\overset{m}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\cdots\left(\frac{\varphi^{\mu} x}{m!}\right)^{\overset{m}{a}}\frac{\psi^{\overset{1}{\alpha}+\overset{2}{\alpha}+\cdots+\overset{m}{\alpha}}(\varphi x)}{(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{m}{a})!}\right]$$
$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}+\cdots+m\overset{m}{a}=m$$

les signes $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$, etc. étant les variables du calcul combinatoire, c'est-à-dire, o et les nombres entiers et positifs, qui remplissent la condition exprimée par l'équation: $\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+m\overset{m}{a}=m$; tandis que les lettres grecques $\overset{1}{\alpha}$, $\overset{2}{\alpha}$, etc. et μ servent à désigner les nombres d'accents correspondants aux nombres représentés par les lettres a et m.

Voici la démonstration de notre proposition générale. Supposons que l'existence de l'équation $[A]$ soit reconnue pour un cas déterminé: $m=p$, et désignons, dans le développement de $\frac{X^\pi}{p!}$, les multiplicateurs respectifs de $\frac{\psi^\nu(\varphi x)}{n!}$ et $\frac{\psi^{\nu+1}(\varphi x)}{(n+1)!}$ par $(N)_p$ et $(N+1)_p$, de sorte qu'il soit:

$$(N)_p = S\left[\frac{n!}{\overset{1}{a}!\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi} x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}\right]$$
$$\begin{cases}\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+p\overset{p}{a}=p\\ \overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p}{a}=n\end{cases}$$

$$(N+1)_p = S\left[\frac{(n+1)!}{\overset{1}{a}!\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi} x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}\right]$$
$$\begin{cases}\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+p\overset{p}{a}=p\\ \overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p}{a}=n+1\end{cases}$$

*) Voyez à ce sujet:

H. A. Rothe, Theorie der combinatorischen Integrale, u.s.w. Nürnberg 1820.

Dr. Martin Ohm, Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysis. Berlin 1822. (Zweite Ausgabe, 1829. Th. 2. S. 54. ff.)

Il est évident que le multiplicateur $(N+1)_{p+1}$ de $\frac{\psi^{\nu+1}(\varphi x)}{(n+1)!}$, dans le développement de $\frac{X^{\pi+1}}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}\, d\cdot\left(\frac{X^{\pi}}{p!}\right)$ devra se composer de deux parties, dont l'une sera l'expression $(N)_p$ multipliée par $\frac{1}{p+1} \times (n+1)\,\varphi' x$ (à cause de $\frac{d\cdot\frac{\psi^{\nu}(\varphi x)}{n!}}{dx} = \frac{\psi^{\nu+1}(\varphi x)}{n!} \times \varphi' x = \frac{\psi^{\nu+1}(\varphi x)}{(n+1)!} \times (n+1)\,\varphi' x$), et l'autre $\frac{1}{p+1}$ de la différentielle de $(N+1)_p$, que nous désignerons par $(N+1)'_p$. Il faudra donc démontrer que

$$\frac{(n+1)\,N_p\cdot\varphi' x + (N+1)'_p}{p+1} = (N+1)_{p+1} =$$

$$S\left[\frac{(n+1)!}{\overset{1}{a}!\cdots\overset{p+1}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi+1}x}{(p+1)!}\right)^{\overset{p+1}{a}}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a} + \cdots + (p+1)\overset{p+1}{a} = p+1 \\ \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \cdots + \overset{p+1}{a} = n+1\end{array}\right.$$

et il s'ensuivra que l'équation $[A]$ étant vraie pour $m = p$, elle le sera aussi pour $m = p+1$, et partant pour toutes les valeurs entières et positives de m.

Pour ce qui concerne d'abord *la première partie* de l'expression $(N+1)_{p+1}$, nous aurons :

$$(n+1)\,N_p\cdot\varphi' x = (n+1)\,\varphi' x \cdot S\left[\frac{n!}{\overset{1}{a}!\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi}x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a} + \cdots + p\overset{p}{a} = p \\ \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \cdots + \overset{p}{a} = n\end{array}\right.$$

$$= S\left[\frac{(n+1)!}{\overset{1}{a}!\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}+1}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi}x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}\right] =$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a} + \cdots + p\overset{p}{a} = p \\ \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \cdots + \overset{p}{a} = n\end{array}\right.$$

$$S\left[\frac{(\overset{1}{a}+1)\cdot(n+1)!}{(\overset{1}{a}+1)!\,\overset{2}{a}!\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}+1}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi} x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}\right]$$

$$\begin{cases}\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+p\overset{p}{a}=p\\ \overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p}{a}=n.\end{cases}$$

Or, il est facile à concevoir, qu'en remplaçant $(\overset{1}{a}+1)$ par la simple caractéristique $\overset{1}{a}$, on n'aura qu'à augmenter d'une seule unité le second membre de chacune des deux équations de condition, vu que pour tous les cas, où ce nouveau $\overset{1}{a}$ sera $=o$, le facteur $\overset{1}{a}\cdot(n+1)!$, mis à la place de $(\overset{1}{a}+1)\cdot(n+1)!$, s'évanouira et ne produira par conséquent aucun terme dans le développement de la somme S. Donc

$$(I)\quad (n+1)\,N_p\cdot\varphi' x = S\left[\frac{\overset{1}{a}\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\,\overset{2}{a}!\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi} x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}\right]$$

$$\begin{cases}\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+p\overset{p}{a}=p+1\\ \overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p}{a}=n+1.\end{cases}$$

Pour former également *la seconde partie* de $(N+1)_{p+1}$, différentions l'équation établie ci-dessus:

$$(N+1)_p = S\left[\frac{(n+1)!}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi} x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}\right]$$

$$\begin{cases}\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+p\overset{p}{a}=p\\ \overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p}{a}=n+1\end{cases}$$

et nous obtiendrons:

$$(N+1)'_p = S\left[\frac{2\overset{1}{a}\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}-1}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}+1}\left(\frac{\varphi''' x}{3!}\right)^{\overset{3}{a}}\left(\frac{\varphi^{IV} x}{4!}\right)^{\overset{4}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi-1} x}{(p-1)!}\right)^{\overset{p-1}{a}}\left(\frac{\varphi^{\pi} x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}\right.$$

$$+\frac{3\overset{2}{a}\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi''x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}-1}\left(\frac{\varphi'''x}{3!}\right)^{\overset{3}{a}+1}\left(\frac{\varphi^{IV}x}{4!}\right)^{\overset{4}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi-1}x}{(p-1)!}\right)^{\overset{p-1}{a}}\left(\frac{\varphi^{\pi}x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}+$$

$$\frac{4\overset{3}{a}\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi''x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\left(\frac{\varphi'''x}{3!}\right)^{\overset{3}{a}-1}\left(\frac{\varphi^{IV}x}{4!}\right)^{\overset{4}{a}+1}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi-1}x}{(p-1)!}\right)^{\overset{p-1}{a}}\left(\frac{\varphi^{\pi}x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{p\overset{p-1}{a}\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi''x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\left(\frac{\varphi'''x}{3!}\right)^{\overset{3}{a}}\left(\frac{\varphi^{IV}x}{4!}\right)^{\overset{4}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi-1}x}{(p-1)!}\right)^{\overset{p-1}{a}-1}\left(\frac{\varphi^{\pi}x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}+1}$$

$$\left.+\frac{(p+1)\overset{p}{a}\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi''x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\left(\frac{\varphi'''x}{3!}\right)^{\overset{3}{a}}\left(\frac{\varphi^{IV}x}{4!}\right)^{\overset{4}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi-1}x}{(p-1)!}\right)^{\overset{p-1}{a}}\left(\frac{\varphi^{\pi}x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}-1}\left(\frac{\varphi^{\pi+1}x}{(p+1)!}\right)\right]$$

$$=S\left[\frac{2(\overset{2}{a}+1)\cdot(n+1)!}{(\overset{1}{a}-1)!\,(\overset{2}{a}+1)!\,\overset{3}{a}!\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}-1}\left(\frac{\varphi''x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}+1}\left(\frac{\varphi'''x}{3!}\right)^{\overset{3}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi}x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}+\right.$$

$$\frac{3(\overset{3}{a}+1)\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\,(\overset{2}{a}-1)!\,(\overset{3}{a}+1)!\,\overset{4}{a}!\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi''x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}-1}\left(\frac{\varphi'''x}{3!}\right)^{\overset{3}{a}+1}\left(\frac{\varphi^{IV}x}{4!}\right)^{\overset{4}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi}x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}+$$

$$\frac{4(\overset{4}{a}+1)\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\,\overset{2}{a}!\,(\overset{3}{a}-1)!\,(\overset{4}{a}+1)!\,\overset{5}{a}!\cdots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi''x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\left(\frac{\varphi'''x}{3!}\right)^{\overset{3}{a}-1}\left(\frac{\varphi^{IV}x}{4!}\right)^{\overset{4}{a}+1}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi}x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}+\cdots$$

$$+\frac{p(\overset{p}{a}+1)\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\,\overset{2}{a}!\,\overset{3}{a}!\cdots(\overset{p-1}{a}-1)!\,(\overset{p}{a}+1)!}\left(\frac{\varphi'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi''x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\left(\frac{\varphi'''x}{3!}\right)^{\overset{3}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi-1}x}{(p-1)!}\right)^{\overset{p-1}{a}-1}\left(\frac{\varphi^{\pi}x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}+1}+$$

$$\left.\frac{(p+1)\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\,\overset{2}{a}!\,\overset{3}{a}!\cdots\overset{p-1}{a}!\,(\overset{p}{a}-1)!}\left(\frac{\varphi'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi''x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi-1}x}{(p-1)!}\right)^{\overset{p-1}{a}}\left(\frac{\varphi^{\pi}x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}-1}\left(\frac{\varphi^{\pi+1}x}{(p+1)!}\right)\right]$$

(Les équations de condition restant toujours les mêmes que ci-dessus.)

En regardant cette expression comme la somme de plusieurs sommes ou intégrales combinatoires, et en en examinant une quelconque, par exemple celle-ci:

$$S\left[\frac{k\,(\overset{k}{a}+1)\cdot(n+1)\,!}{\overset{1}{a}\,!\;\overset{2}{a}\,!\cdots(\overset{k-1}{a}-1)\,!\;(\overset{k}{a}+1)\,!\cdots\overset{p}{a}\,!}\left(\frac{\varphi' x}{1\,!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi'' x}{2\,!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{k-1} x}{(k-1)\,!}\right)^{\overset{k-1}{a}-1}\left(\frac{\varphi^{k} x}{k\,!}\right)^{\overset{k}{a}+1}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi} x}{p\,!}\right)^{\overset{p}{a}}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{a}+2\,\overset{2}{a}+\cdots+p\,\overset{p}{a}=p\\ \overset{1}{a}+\;\overset{2}{a}+\cdots+\;\overset{p}{a}=n+1\end{array}\right.$$

nous remarquons que la somme des exposans: $\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+(\overset{k-1}{a}-1)+(\overset{k}{a}+1)+\cdots+\overset{p}{a}$ est toujours encore $n+1$, mais que cette autre: $\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}+\cdots+(k-1)(\overset{k-1}{a}-1)+k(\overset{k}{a}+1)+\cdots+p\overset{p}{a}$ doit être $=p+1$. Donc, en remplaçant $\overset{k-1}{a}-1$ et $\overset{k}{a}+1$ respectivement par $\overset{k-1}{a}$ et $\overset{k}{a}$ et en prenant pour équations de condition:

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{a}+2\,\overset{2}{a}+\cdots\cdots+p\,\overset{p}{a}=p+1\\ \overset{1}{a}+\;\overset{2}{a}+\cdots\cdots+\;\overset{p}{a}=n+1,\end{array}\right.$$

nous ne changeons en rien la valeur totale de la somme S, vû que le nouveau numérateur: $k\,\overset{k}{a}\cdot(n+1)\,!$, s'évanouissant chaque fois que $\overset{k}{a}=o$, ne produit en ce cas aucun nouveau terme. Or, comme le même raisonnement s'applique à tous les termes compris dans l'expression trouvée ci-dessus par la différentiation de $(N+1)_p$, nous obtenons:

$$(N+1)'_p=S\left[\frac{(2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}+\cdots+p\overset{p}{a})\cdot(n+1)\,!}{\overset{1}{a}\,!\;\overset{2}{a}\,!\;\overset{3}{a}\,!\;\ldots\ldots\ldots\;\overset{p}{a}\,!}\left(\frac{\varphi' x}{1\,!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi'' x}{2\,!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi} x}{p\,!}\right)^{\overset{p}{a}}+\right.$$

$$\left.\frac{(p+1)\cdot(n+1)\,!}{\overset{1}{a}\,!\;\overset{2}{a}\,!\ldots\overset{p}{a}\,!}\left(\frac{\varphi' x}{1\,!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi'' x}{2\,!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi} x}{p\,!}\right)^{\overset{p}{a}}\left(\frac{\varphi^{\pi+1} x}{(p+1)\,!}\right)^{1}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{a}+2\,\overset{2}{a}+\cdots+p\,\overset{p}{a}=p+1\\ \overset{1}{a}+\;\overset{2}{a}+\cdots+\;\overset{p}{a}=n+1.\end{array}\right.$$

Mais, puisque dans des équations de cette forme :

$$\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a} + \cdots + (p+1)\overset{p+1}{a} = p+1$$
$$\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \cdots + \overset{p+1}{a} = n+1$$

$\overset{p+1}{a}$ doit toujours être $=o$ lorsque $n<p$ et que ce n'est que pour $n=p$, que $\overset{p+1}{a}$ devient $=1$, il doit être permis d'ajouter aux variables, contenues dans la somme ci-dessus, une nouvelle $\overset{p+1}{a}$, en substituant aux équations de condition précédentes celles que nous venons d'écrire, afin de pouvoir réunir le dernier terme :

$$\frac{(p+1)\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi}x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}\left(\frac{\varphi^{\pi+1}x}{(p+1)!}\right)^{1}$$

isolé jusqu'ici, à ceux qui le précèdent. Cela posé, nous aurons :

$$(II)\ (N+1)'_p = S\left[\frac{(2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}+\cdots+(p+1)\overset{p+1}{a})(n+1)!}{\overset{1}{a}!\ \overset{2}{a}!\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ \overset{p+1}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi+1}x}{(p+1)!}\right)^{\overset{p+1}{a}}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a} + \cdots + (p+1)\overset{p+1}{a} = p+1 \\ \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \cdots + \overset{p+1}{a} = n+1\end{array}\right.$$

En joignant maintenant les deux équations (I) et (II), nous trouvons :

$$(p+1)\ (N+1)_{p+1} = (n+1)\cdot N_p\cdot\varphi' x + (N+1)'_p =$$

$$S\left[\frac{\overset{1}{a}\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\cdots\overset{p+1}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi+1}x}{(p+1)!}\right)^{\overset{p+1}{a}} + \frac{(2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}+\cdots+(p+1)\overset{p+1}{a})}{\overset{1}{a}!\ \overset{2}{a}!\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ \overset{p+1}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{a}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi+1}}{(p+1)'}\right)^{\overset{p+1}{a}}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a} + \cdots + (p+1)\overset{p+1}{a} = p+1 \\ \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \cdots + \overset{p+1}{a} = n+1\end{array}\right.$$

$$= S\left[\frac{(\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}+\cdots+(p+1)\overset{p+1}{a})\,(n+1)!}{\overset{1}{a}!\;\overset{2}{a}!\;\overset{3}{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\overset{p+1}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi+1} x}{(p+1)!}\right)^{\overset{p+1}{a}}\right]$$

$$= S\left[\frac{(p+1)\cdot(n+1)!}{\overset{1}{a}!\;\overset{2}{a}!\ldots\overset{p+1}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi+1} x}{(p+1)!}\right)^{\overset{p+1}{a}}\right] =$$

$$(p+)\cdot S\left[\frac{(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p+1}{a})!}{\overset{1}{a}!\;\overset{2}{a}!\ldots\overset{p+1}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi+1} x}{(p+1)!}\right)^{\overset{p+1}{a}}\right]$$

et partout:
$$\begin{cases}\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+(p+1)\overset{p+1}{a}=p+1\\ \overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p+1}{a}=n+1.\end{cases}$$

Nous pouvons donc conclure que, si

$$\frac{X^{\pi}}{p!} = S\left[\frac{(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p}{a})!}{\overset{1}{a}!\;\overset{2}{a}!\ldots\overset{p}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi} x}{p!}\right)^{\overset{p}{a}}\frac{\psi^{\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p}{a}}(\varphi x)}{(\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{p}{a})!}\right]$$

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+p\overset{p}{a}=p,$$

on aura également:

$$\frac{X^{\pi+1}}{(p+1)!} = S\left[\frac{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{p+1}{a})!}{\overset{1}{a}!\ldots\ldots\overset{p+1}{a}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\cdots\left(\frac{\varphi^{\pi+1} x}{(p+1)!}\right)^{\overset{p+1}{a}}\frac{\psi^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{p+1}{a}}(\varphi x)}{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{p+1}{a})!}\right]$$

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+(p+1)\overset{p+1}{a}=p+1$$

et voilà tout ce qu'il fallait prouver, pour démontrer la proposition exprimée par l'équation [*A*].

Eclaircissons par un exemple le procédé à suivre dans l'application de notre formule générale. Pour cela, soit à trouver la valeur de $X^{V} = \frac{d^6[\psi(\varphi x)]}{dx^6}$. On représentera d'abord par le tableau suivant les différentes valeurs à donner aux variables du calcul combinatoire, pour satisfaire à l'équation de condition:

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}+4\overset{4}{a}+5\overset{5}{a}=5$$

$\overset{1}{a}$	$\overset{2}{a}$	$\overset{3}{a}$	$\overset{4}{a}$	$\overset{5}{a}$
5	0	0	0	0
3	1	0	0	0
2	0	1	0	0
1	2	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	0	0	1

et l'on en tirera :

$$\frac{X^V}{5!}=\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^5\frac{\psi^V(\varphi x)}{5!}+\frac{4!}{3!\,1!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^3\frac{\varphi'' x}{2!}\,\frac{\psi^{IV}(\varphi x)}{4!}+$$
$$\frac{3!}{2!\;1!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^2\frac{\varphi''' x}{3!}\,\frac{\psi'''(\varphi x)}{3!}+\frac{3!}{1!\;2!}\,\frac{\varphi' x}{1!}\left(\frac{\varphi'' x}{2!}\right)^2\frac{\psi'''(\varphi x)}{3!}+$$
$$\frac{2!}{1!\;1!}\,\frac{\varphi' x}{1!}\,\frac{\varphi^{IV} x}{4!}\,\frac{\psi''(\varphi x)}{2!}+\frac{2!}{1!\;1!}\,\frac{\varphi'' x}{2!}\,\frac{\varphi''' x}{3!}\,\frac{\psi''(\varphi x)}{2!}+$$
$$\frac{1!}{1!}\,\frac{\varphi^V x}{5!}\,\frac{\psi'(\varphi x)}{1!}$$

et de là :

$$X^V=(\varphi' x)^5\psi^V(\varphi x)+10(\varphi' x)^3\varphi'' x\,\psi^{IV}(\varphi x)+[10(\varphi' x)^2\varphi''' x+15\varphi' x(\varphi'' x)^2]\,\psi'''(\varphi x)$$
$$+[5\varphi' x\,\varphi^{IV} x+10\varphi'' x\,\varphi''' x]\,\psi''(\varphi x)+\varphi^V x\,\psi'(\varphi x).$$

Observons en même tems que, lorsque la fonction φx est telle que sa dérivée du $k^{ième}$ ordre, que nous désignons par $\varphi^k x$, est $=o$, et que $k<m$, il faudra changer l'équation de condition en celle-ci :

$$\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+(k-1)\overset{k-1}{a}=m$$

Note. Si, dans une fonction à deux variables, $f(t, u)$, on substitue, respectivement, les fonctions $X=\varphi\,(x, y)$ et $Y=\psi\,(x, y)$ aux variables primitives t et u, des différentiations successives conduiront à un résultat analogue à celui de l'équation $[A]$ et dont nous ferons part une autre fois.

2) En désignant par X^{μ}_{o}, φo, $\varphi' o$, $\varphi'' o$, etc. les valeurs que prennent les fonctions X^{μ}, φx, $\varphi' x$, $\varphi'' x$, etc., lorsqu'on y fait $x = o$, on aura par le théorème de Maclaurin :

$$[B] \qquad \psi(\varphi x) = S\left[\frac{X^{\beta}_{o}}{\mathfrak{b}!}\cdot x^{\mathfrak{b}}\right] =$$

$$S\left[\frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}})!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\cdots\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{\varphi' o}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\beta} o}{\mathfrak{b}!}\right)^{\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}\frac{\psi^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}(\varphi o)}{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}})!}\cdot x^{\mathfrak{b}}\right]$$

$$\mathfrak{a} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \mathfrak{b}\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}$$

proposition générale, qui servira à développer la transformée $\psi(\varphi x)$ en série suivant les puissances de la variable x, et dont les théorèmes de Taylor et de Maclaurin ne sont évidemment que des cas particuliers.

Observons en-outre que l'équation $[B]$ peut encore être présentée sous cette forme :

$$[C]\ \psi(\varphi x) = S\left[\frac{\left(\frac{\varphi' o}{1!}x\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!}\times\frac{\left(\frac{\varphi'' o}{2!}x^{2}\right)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}}{\overset{2}{\mathfrak{a}}!}\times\frac{\left(\frac{\varphi''' o}{3!}x^{3}\right)^{\overset{3}{\mathfrak{a}}}}{\overset{3}{\mathfrak{a}}!}\times\frac{\cdots\left(\frac{\varphi^{\beta} o}{\mathfrak{b}!}x^{\mathfrak{b}}\right)^{\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}}{\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}!}\times\psi^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}(\varphi o)\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \mathfrak{b}\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}$$

Les numéros suivans contiendront quelques applications de notre proposition générale.

3) Considérons d'abord les cas suivans :

1. Soit $\varphi x = x + a$; on aura $\frac{\varphi' o}{1!} = 1$, $\frac{\varphi'' o}{2!} = \frac{\varphi''' o}{3!} = \cdots = o$, et l'équation de condition : $\overset{1}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}$, donc :

$$\psi(x + a) = S\left[\frac{\psi^{\mathfrak{b}}(a)}{\mathfrak{b}!}\,x^{\mathfrak{b}}\right]$$

et, pour $a = o$, $\psi x = S\left[\frac{\psi^{\mathfrak{b}}(o)}{\mathfrak{b}!}\,x^{\mathfrak{b}}\right]$, théorème de Maclaurin. Mais, puisque $x + a = a + x$, on tirera de la première de ces deux équations encore celle-ci :

$$\psi(x + a) = S\left[a^{\mathfrak{b}}\cdot\frac{\psi^{\mathfrak{b}} x}{\mathfrak{b}!}\right], \text{ théorème de Taylor.}$$

2. Soit $\varphi x = ax + b$, ou $\varphi x = ax^2 + bx + c$, ou $\varphi x = ax^3 + bx^2 + cx + d$, etc., l'équation $[C]$ nous donnera successivement:

$$\psi\,(ax+b) = S\left[\frac{(ax)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\,\psi^{\mathfrak{a}}(b)\right]$$

$$\psi\,(ax^2 + bx + c) = S\left[\frac{(ax^2)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}}{\overset{2}{\mathfrak{a}}!}\,\frac{(bx)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!}\,\psi^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}}c\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\,\overset{2}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}$$

$$\psi\,(ax^3 + bx^2 + cx + d) = S\left[\frac{(ax^3)^{\overset{3}{\mathfrak{a}}}}{\overset{3}{\mathfrak{a}}!}\,\frac{(bx^2)^{\overset{2}{\mathfrak{a}}}}{\overset{2}{\mathfrak{a}}!}\,\frac{(cx)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!}\,\psi^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\overset{2}{\mathfrak{a}}+\overset{3}{\mathfrak{a}}}d\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\,\overset{2}{\mathfrak{a}} + 3\,\overset{3}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}$$

3. Si la fonction φx contient, outre la variable x, une constante a, et qu'elle est symétrique par rapport à x et a, c'est-à-dire, que $\varphi x = \chi\,(x, a) = \chi\,(a, x)$, on aura toujours:

$$\psi\,(\varphi x) = S\left[\frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}})!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\cdots\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{\varphi' x}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\mathfrak{b}} x}{\mathfrak{b}!}\right)^{\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}\frac{\psi^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}(\varphi x)}{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}})!}\,a^{\mathfrak{b}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}} + 2\,\overset{2}{\mathfrak{a}} + \cdots + \mathfrak{b}\,\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}$$

en faisant $a = o$ dans les fonctions φx, $\varphi' x$, $\varphi'' x$, etc. du second membre.

4. Je désignerai par l'expression $\varphi^2 x$, que je nommerai une *puissance fonctionale du second degré*, ou un *carré fonctional*, la fonction, qu'on obtient en substituant à la variable x d'une fonction quelconque φx la fonction φx elle-même, de sorte que $\varphi^2 x = \varphi\,(\varphi x)$. Soit de même $\varphi^3 x$, *puissance fonctionale du troisième degré* ou *cube fonctional*, la fonction, qu'on obtient en écrivant dans $\varphi^2 x$, au-lieu de la variable x, la même fonction φx, ou, ce qui revient au même, en substituant dans la fonction φx, $\varphi^2 x$ à x; et ainsi de suite.

Si, par exemple, $\varphi x = ax + b$, on aura:

$$\varphi^2 x = a\,(ax+b) + b = a^2 x + b\,(a+1) = a^2 x + \frac{b(a^2-1)}{a-1}$$

$$\varphi^3 x = a^2(ax+b)+b(a+1) = a^3 x + b(a^2+a+1) = a^3 x + \frac{b(a^3-1)}{a-1}$$

et plus généralement:

$$\varphi^n x = a^n x + \frac{b(a^n-1)}{a-1}$$

La notion de l'élévation aux puissances fonctionales conduit nécessairement à celle de deux autres opérations, opposées à la primitive et dont le calcul est très analogue à celui des racines et des logarithmes. Nous avons essayé d'en établir les règles fondamentales, mais quelqu'utile que ce calcul puisse être dans la solution de certains problèmes très intéressans, nous nous abstenons pour le moment d'en communiquer quelque chose, vu que cela nous éloignerait trop de l'objet de nos présentes recherches, et nous n'avons fait mention ici des puissances fonctionales que pour montrer l'application de la proposition du N°. 2 au développement de ce genre particulier de fonctions, en séries suivant les puissances de la variable.

Soit h la valeur (ou une des valeurs, s'il y en a plusieurs) de x, tirée de l'équation $\varphi x = x$, de sorte qu'on ait: $\varphi h = h$; on aura également $\varphi^2 h = \varphi(\varphi h) = h$, $\varphi^3 h = \varphi(\varphi^2 h) = h$, et, en général, $\varphi^n h = h$. Désignons en-outre par ${}^nH$, ${}^nH'$, ${}^nH''$, $\ldots {}^nH^\mu$ les valeurs respectives de la fonction $\varphi^n x$ et de ses différentielles du premier jusqu'au $m^{\text{ième}}$ ordre, pour le cas où $x = h$. Il en suit d'abord qu'à cause de:

$$\frac{d\cdot\varphi^n x}{dx} = \frac{d\cdot\varphi(\varphi^{n-1}x)}{dx} = \varphi'(\varphi^{n-1}x)\cdot\frac{d\cdot(\varphi^{n-1}x)}{dx} = \varphi'(\varphi^{n-1}x)\cdot\frac{d\cdot\varphi(\varphi^{n-2}x)}{dx} =$$

$$\varphi'(\varphi^{n-1}x)\cdot\varphi'(\varphi^{n-2}x)\cdot\frac{d\cdot(\varphi^{n-2})}{dx} = \cdots\cdots\cdots\cdots =$$

$$\varphi'(\varphi^{n-1}x)\cdot\varphi'(\varphi^{n-2}x)\cdot\varphi'(\varphi^{n-3}x)\cdots\varphi'(\varphi x)\cdot\varphi' x$$

il doit être:

$${}^nH = h$$

$${}^nH' = (\varphi' h)^n$$

Maintenant, puisqu'en vertu de la définition d'une puissance fonctionale, on peut obtenir la fonction $\varphi^n x$ de deux manières, savoir: ou en écrivant dans la fonction

$\varphi^{n-1}x$, φx à la place de x, ou en substituant, dans φx, $\varphi^{n-1}x$ à x, nous tirerons de l'équation $[A]$ (N°. 1) cette relation:

$$\frac{{}^{(n+1)}H^{\mu}}{m!} = \left\{\begin{array}{l} = S\left[\dfrac{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m}{a})!}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{m}{a}!}\left(\dfrac{\varphi' h}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\dfrac{\varphi^{\mu} h}{m!}\right)^{\overset{m}{a}}\dfrac{{}^{n}H^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m}{a}}}{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m}{a})!}\right] \\ \qquad\qquad \overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+m\overset{m}{a}=m \\ = S\left[\dfrac{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m}{a})!}{\overset{1}{a}!\cdots\overset{m}{a}!}\left(\dfrac{{}^{n}H'}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\cdots\left(\dfrac{{}^{n}H^{\mu}}{m!}\right)^{\overset{m}{a}}\dfrac{\varphi^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m}{a}}h}{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m}{a})!}\right] \\ \qquad\qquad \overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+m\overset{m}{a}=m \end{array}\right.$$

Or, en détachant de chacune de ces deux sommes le premier et le dernier terme, on aura:

$$\frac{{}^{n}H^{\mu}}{m!}\left(\frac{\varphi' h}{1!}\right)^{m} + S\left[\frac{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a})!}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{m-1}{a}!}\left(\frac{\varphi' h}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\mu-1}h}{(m-1)!}\right)^{\overset{m-1}{a}}\frac{{}^{n}H^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}}{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a})!}\right] + \frac{\varphi^{\mu}h}{m!}\cdot\frac{{}^{n}H'}{1!}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+(m-1)\overset{m-1}{a}=m \\ \qquad \overset{1}{a}+\mathfrak{b}=m-2\end{array}\right.$$

$$=$$

$$\left(\frac{{}^{n}H'}{1!}\right)^{m}\frac{\varphi^{\mu}h}{m!} + S\left[\frac{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a})!}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{m-1}{a}!}\left(\frac{{}^{n}H'}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{{}^{n}H^{\mu-1}}{(m-1)!}\right)^{\overset{m-1}{a}}\frac{\varphi^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}h}{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a})!}\right] + \frac{{}^{n}H^{\mu}}{m!}\cdot\frac{\varphi' h}{1!}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+(m-1)\overset{m-1}{a}=m \\ \qquad \overset{1}{a}+\mathfrak{b}=m-2\end{array}\right.$$

donc: $\left[(\varphi' h)^{m-1}-1\right]\varphi' h\cdot\frac{{}^{n}H^{\mu}}{m!} = \left[({}^{n}H')^{m-1}-1\right]\cdot{}^{n}H'\cdot\frac{\varphi^{\mu}h}{m!} +$

$$S\left[\frac{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a})!}{\overset{1}{a}!\cdots\overset{m-1}{a}!}\left\{\left(\frac{{}^{n}H'}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{{}^{n}H^{\mu-1}}{(m-1)!}\right)^{\overset{m-1}{a}}\frac{\varphi^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}h}{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a})!}-\left(\frac{\varphi' h}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\mu-1}h}{(m-1)!}\right)^{\overset{m-1}{a}}\frac{{}^{n}H^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}}{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a})!}\right\}\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+(m-1)\overset{m-1}{a}=m \\ \qquad \overset{1}{a}+\mathfrak{b}=m-2\end{array}\right.$$

formule qui servira à déterminer, par recurrence, les quotiens $\frac{{}^{n}H^{\mu}}{m!}$, à l'aide desquels on construira l'équation:

$$\varphi^n(x+h) = S\left[\frac{{}^nH^{\alpha}}{\alpha!}\,x^{\alpha}\right]$$

ou bien celle-ci:

$$\varphi^n x = S\left[\frac{{}^nH^{\alpha}}{\alpha!}\,(x-h)^{\alpha}\right].$$

Voici le développement des six premières valeurs de $\frac{{}^nH^{\mu}}{m!}$:

$$\frac{{}^nH'}{1!} = \left(\frac{\varphi'h}{1!}\right)^n; \qquad (\varphi'h - 1)\,\varphi'h\cdot\frac{{}^nH''}{2!} = ({}^nH' - 1)\,{}^nH'\cdot\frac{\varphi''h}{2!};$$

$$(\varphi'h^2 - 1)\,\varphi'h\cdot\frac{{}^nH'''}{3!} = ({}^nH'^2 - 1)\,{}^nH'\cdot\frac{\varphi'''h}{3!} + \frac{2!}{1!\,1!}\Big\{\frac{{}^nH'}{1!}\frac{{}^nH''}{2!}\frac{\varphi''h}{2!} - \frac{\varphi'h}{1!}\frac{\varphi''h}{2!}\frac{{}^nH''}{2!}\Big\};$$

$$(\varphi'h^3 - 1)\,\varphi'h\cdot\frac{{}^nH^{IV}}{4!} = ({}^nH'^3 - 1)\,{}^nH'\cdot\frac{\varphi^{IV}h}{4!} + \frac{3!}{2!\,1!}\Big\{\left(\frac{{}^nH'}{1!}\right)^2\frac{{}^nH''}{2!}\frac{\varphi'''h}{3!} - \left(\frac{\varphi'h}{1!}\right)^2\frac{\varphi''h}{2!}\frac{{}^nH'''}{3!}\Big\}$$

$$+ \frac{2!}{1!\,1!}\Big\{\frac{{}^nH'}{1!}\frac{{}^nH'''}{3!}\frac{\varphi''h}{2!} - \frac{\varphi'h}{1!}\frac{\varphi'''h}{3!}\frac{{}^nH''}{2!}\Big\} + \frac{2!}{2!}\Big\{\left(\frac{{}^nH''}{2!}\right)^2\frac{\varphi''h}{2!} - \left(\frac{\varphi''h}{2!}\right)^2\frac{{}^nH''}{2!}\Big\};$$

$$(\varphi'h^4 - 1)\,\varphi'h\cdot\frac{{}^nH^{V}}{5!} = ({}^nH'^4 - 1)\,{}^nH'\cdot\frac{\varphi^{V}h}{5!} + \frac{4!}{3!\,1!}\Big\{\left(\frac{{}^nH'}{1!}\right)^3\frac{{}^nH''}{2!}\frac{\varphi^{IV}h}{4!} - \left(\frac{\varphi'h}{1!}\right)^3\frac{\varphi''h}{2!}\frac{{}^nH^{IV}}{4!}\Big\}$$

$$+ \frac{3!}{2!\,1!}\Big\{\left(\frac{{}^nH'}{1!}\right)^2\frac{{}^nH'''}{3!}\frac{\varphi'''h}{3!} - \left(\frac{\varphi'h}{1!}\right)^2\frac{\varphi'''h}{3!}\frac{{}^nH'''}{3!}\Big\} + \frac{3!}{1!\,2!}\Big\{\frac{{}^nH'}{1!}\left(\frac{{}^nH''}{2!}\right)^2\frac{\varphi'''h}{3!}$$

$$- \frac{\varphi'h}{1!}\left(\frac{\varphi''h}{2!}\right)^2\frac{{}^nH'''}{3!}\Big\} + \frac{2!}{1!\,1!}\Big\{\frac{{}^nH'}{1!}\frac{{}^nH^{IV}}{4!}\frac{\varphi''h}{2!} - \frac{\varphi'h}{1!}\frac{\varphi^{IV}h}{4!}\frac{{}^nH''}{2!}\Big\} +$$

$$\frac{2!}{1!\,1!}\Big\{\frac{{}^nH''}{2!}\frac{{}^nH'''}{3!}\frac{\varphi''h}{2!} - \frac{\varphi''h}{2!}\frac{\varphi'''}{3!}\frac{{}^nH''}{2!}\Big\};$$

$$(\varphi'h^5 - 1)\,\varphi'h\cdot\frac{{}^nH^{VI}}{6!} = ({}^nH'^5 - 1)\,{}^nH'\cdot\frac{\varphi^{VI}h}{6!} + \frac{5!}{4!\,1!}\Big\{\left(\frac{{}^nH'}{1!}\right)^4\frac{{}^nH''}{2!}\frac{\varphi^{V}h}{5!} - \left(\frac{\varphi'h}{1!}\right)^4\frac{\varphi''h}{2!}\frac{{}^nH^{V}}{5!}\Big\}$$

$$+ \frac{4!}{3!\,1!}\Big\{\left(\frac{{}^nH'}{1!}\right)^3\frac{{}^nH'''}{3!}\frac{\varphi^{IV}h}{4!} - \left(\frac{\varphi'h}{1!}\right)^3\frac{\varphi'''h}{3!}\frac{{}^nH^{IV}}{4!}\Big\} + \frac{4!}{2!\,2!}\Big\{\left(\frac{{}^nH'}{1!}\right)^2\left(\frac{{}^nH'}{2!}\right)^2\frac{\varphi^{IV}h}{4!} -$$

$$\left(\frac{\varphi'h}{1!}\right)^2\left(\frac{\varphi''h}{2!}\right)^2\frac{{}^nH^{IV}}{4!}\Big\} + \frac{3!}{2!\,1!}\Big\{\left(\frac{{}^nH'}{1!}\right)^2\frac{{}^nH^{IV}}{4!}\frac{\varphi'''h}{3!} - \left(\frac{\varphi'h}{1!}\right)^2\frac{\varphi^{IV}h}{4!}\frac{{}^nH'''}{3!}\Big\} +$$

$$\frac{3!}{1!\,1!\,1!}\Big\{\frac{{}^nH'}{1!}\frac{{}^nH''}{2!}\frac{{}^nH''}{3!}\frac{\varphi'''h}{3!} - \frac{\varphi'h}{1!}\frac{\varphi''h}{2!}\frac{\varphi'''h}{3!}\frac{{}^nH'''}{3!}\Big\} + \frac{2!}{1!\,1!}\Big\{\frac{{}^nH'}{1!}\frac{{}^nH^{V}}{5!}\frac{\varphi''h}{2!}$$

$$- \frac{\varphi'h}{1!}\frac{\varphi^{V}h}{5!}\frac{{}^nH''}{2!}\Big\} + \frac{3!}{3!}\Big\{\left(\frac{{}^nH''}{2!}\right)^3\frac{\varphi'''h}{3!} - \left(\frac{\varphi'''h}{3!}\right)^3\frac{{}^nH'''}{3!}\Big\} + \frac{2!}{1!\,1!}\Big\{\frac{{}^nH''}{2!}\frac{{}^nH^{IV}}{4!}\frac{\varphi''h}{2!}$$

$$- \frac{\varphi''h}{2!}\frac{\varphi^{IV}h}{4!}\frac{{}^nH''}{2!}\Big\} + \frac{2!}{2!}\Big\{\left(\frac{{}^nH'''}{3!}\right)^2\frac{\varphi''h}{2!} - \left(\frac{\varphi''h}{3!}\right)^2\frac{{}^nH''}{2!}\Big\}.$$

Nous terminons cette exposition de nos formules générales, en nous reservant d'en tirer parti dans des recherches ultérieures, qui, à cè que nous pensons, en feront suffisamment voir et la fertilité en conséquences et l'utile application à la solution de plusieurs problèmes intéressants, que présente la théorie et le calcul des fonctions.

ANALYSE
DE
L'EAU DE LA NÉVA.

PAR

M. HESS.

(Lu le 27 Janvier 1830.)

DEUX cent livres de cette eau furent évaporées, jusqu'a ce qu'elle prit une couleur brune foncée, semblable à une dissolution saturée de matières extractives. Je voulais me servir de cette dissolution pour découvrir les substances qu'elle contenait; mais comme il se trouva que l'ammoniaque ne la précipitait point, la moitié du liquide fut évaporée jusqu'à siccité et calcinée. La masse devint noire, et répandait une odeur semblable à celle que produit la calcination de substances animales. La masse reprise par l'eau et par l'acide nitrique étendu. fut fortement troublée par le nitrate d'argent. Le chlorure barytique y produisit un précipité peu considérable, insoluble dans les acides. L'ammoniaque caustique précipita de l'alumine, l'oxalate d'ammoniaque de l'oxalate calcique, et la patasse caustique quelques flocons de magnésie.

Une autre portion de la dissolution, ayant été purgée de toutes les terres par le carbonate d'ammoniaque, au moyen de deux évaporations successives et le surplus d'ammoniaque ayant été chassé par la chaleur, le résidu salin fut mêlé avec du chlorure platinique, arrosé d'eau et évaporé jusqu'à siccité: Le sel double que ce chlorure forme avec le chlorure potassique manifesta la présence de cet alkali.

*

Je cherchai aussi à découvrir la présence de la lithine, au moyen du phosphate sodique, dans une dissolution dont on avait séparé toutes les terres, mais le liquide ayant été évaporé jusqu'à siccité, était complètement soluble dans l'eau. Une portion du liquide qui n'avait servi à aucune expérience et qui contenait encore les matières extractives fut mêlée d'un peu d'acide hydrochlorique, essayée au moyen d'or métallique avec lequel elle fut réchauffée, pour découvrir la présence de l'acide nitrique. Le liquide fut ensuite essayé par une dissolution de sulfate ferreux mais il ne se trouvait pas une trace d'or de dissoute. J'ai répété cette expérience plus d'une fois car il me paraissait douteux que l'eau de la Néva, contenant de la potasse, put ne pas en contenir une partie à l'état de nitrate. Ceci me donna l'occasion d'essayer jusqu'à quel point le procédé de WOLLASTON pour découvrir la présence de l'acide nitrique était précis, et si celui que M. LIEBIG avait nouvellement recommandé ne valait pas mieux.

Une dissolution qui contenait $\frac{1}{1000}$ de salpètre, traitée par l'or et l'acide hydrochlorique, précipitait par le sulfate ferreux à ne pas s'y méprendre. La dissolution d'indigo dans l'acide sulfurique ne commença à se décolorer que lorsque le liquide contenait $\frac{1}{200}$ de salpètre.

L'eau de la Néva ayant été réduite par l'évaporation à $\frac{1}{50}$ de son volume, on y fit passer un courant de chlore, jusqu'a ce que le liquide fut décoloré. Traité ensuite par l'éther sulfurique, sa couleur ne manifeste pas une trace de brome.

Voici comment les quantités relatives des substances qui se trouvaient en dissolution dans l'eau de la Néva furent déterminées.

A. 100 livres d'eau furent réduites à un petit volume, puis évaporées jusqu'à siccité et calcinées dans un creuset de platine, pour décomposer toutes les matières extractives. Le résidu fut arrosé d'acide hydrochlorique étendu, qui laissa du charbon; celui-ci après avoir été lavé, puis brûlé, ne laissa qu'une petite quantité de silice qui pesait à peine 0,04 gr.

B. La dissolution qu'on venait d'obtenir fut saturée par l'ammoniaque qui précipita de l'alumine; lavée et calcinée, elle pesait 1,23 gr.

C. Le liquide fut précipité par l'oxalate d'ammoniaque; l'oxalate de chaux transformé en corbonate par la calcination pesait 13,2 gr.

D. La dissolution de même que les eaux de lavage, furent évaporées jusqu'à siccité et le résidu chauffé pour chasser les sels ammoniacaux qui s'y trouvaient. Les sels qui ne furent pas volatilisé par la chaleur furent dissous dans l'eau qui laissa néanmoins 0,42 gr. de magnésie.

E. J'ajoutai ensuite à la dissolution un peu de carbonate d'ammoniaque, le liquide évaporé, et légèrement chauffé, ayant été redissout dans l'eau ne laissa qu'une trace inappréciable de magnésie.

F. Le liquide pouvait contenir des sels à l'état de sulfate; j'y ajoutai du chlorure barytique, l'excès de Baryte fut précipité par le carbonate d'ammoniaque, évaporé, calciné, dissout dans l'eau, filtré, lavé, évaporé de nouveau et calciné. La masse saline, qui ne consistait plus qu'en chlorure sodique et potassique, pesait 6,3 gr. Sa dissolution fut mêlée avec une dissolution de chlorure sodo-platinique et évaporée. Il se forma de petits cristaux de chlorure platino-potassique. La quantité de ce sel obtenue après le lavage à l'alcool était de 13,6 ce qui équivaut à 4,17 de chlorure potassique. Il restait donc 2,13 pour le chlorure sodique.

G. Un nouvelle portion d'eau ayant été réduite à un petit volume fut mêlée d'un peu d'acide nitrique et réchauffée. Traitée ensuite par le chlorure barytique, il se forma un précipité de sulfate barytique de 3,2 pour 100 livres d'eau. En admettant que l'acide sulfurique se trouve en combinaison avec la soude, cela suposerait 1,95 de sulfate sodique.

H. Le résidu de 100 livres d'eau ayant été débarassé de toutes les matières extractives par la calcination fut dissout dans l'eau et l'acide nitrique. Le liquide précipité à chaud par le nitrate argentique, on obtint 28,09 de chlorure argentique ce qui indique 6,93 de chlore.

L'eau de la Néva évaporée jusqu'à un certain point, dépose du carbonate de chaux. La quantité de l'acide carbonique qui est admise plus bas, fut déterminée par le calcul.

Une certaine quantité d'eau qui venait d'être puisée sous la glace fut chauffée jusqu'à l'ébullition dans un flacon qui communiquait par un tube avec la cuve pneumatique, et tenue à cette température pendant $\frac{3}{4}$ d'heure. Elle dégagea $\frac{1}{11}$ de son volume de gaz pris à la même température que l'eau. Il consistait en grande partie en azote et ne contenait qu'un peu d'acide carbonique.

Pour déterminer la quantité des matières extractives qui se trouvent dans cette eau, 25 livres furent réduites à un petit volume dans une capsule d'argent et évaporées ensuite jusqu'à siccité dans un creuset de platine. Le résidu séché à une chaleur voisine de celle à laquelle les matières extractives se décomposaient, pesait 11,8 gr. ce qui fait 47,2 sur 100 livres. La totalité de sels étant de 23,2 il reste 24 gr. qui sont le poids des matieres extractives contenues dans 100 livres d'eau de la Néva.

1,23 gr. d'alumine équivalent à 1,92 de chlorure aluminique qui contiennent 1,26 de chlore.

0,42 de magnésie équivalent à 0,97 de chlorure magnésique qui contiennent 0,71 de chlore.

4,17 de chlorure potassique contiennent 1,97 de chlore.

3,2 de Sulfate barytique équivalent à 1,95 de sulfate sodique; il ne reste donc que 0, 54 (*F*) pour le chlorure sodique et 0,54 de chlorure sodique contiennent 0,32 de chlore.

Toute la quantité du chlore dans les chlorures que je viens de citer étant 4,26 et la quantité indiquée par le chlorure argentique étant 6,93, il reste 2,67 de chlore qui, combinés avec le calcium, forment 4,21 de chlorure calcique équivalant à 2,14 d'oxide calcique. Toute la quantité de l'oxide calcique étant de 7,44 il reste 5,3 d'oxide calcique qui se trouvent dans l'eau à l'état de carbonate. 5,3 d'oxide carbonique équivalent à 9,4 de carbonate calcique.

D'après cette analyse l'eau de la Néva contient sur 100 livres, en substance gazeuse $\frac{1}{11}$ de son volume, contenant un peu d'acide carbonique et le reste d'azote. En fait de substances solides :

Silice	0, 04	gr.
Chlorure aluminique	1, 92	„
Chlorure magnésique	0, 97	„
Chlorure potassique	4, 17	„
Chlorure sodique .	0, 54	„
Chlorure calcique .	4, 21	„
Sulfate sodique . . .	1, 95	„
Carbonate calcique .	9, 40	„
Matières extractives	24, 00	„
	47, 20	gr.

ABNORMITAS

QUOAD

ORTUM ET NUMERUM QUARUNDAM ARTERIARUM

A

P. ZAGORSKY

OBSERVATA

(Conventui exhib. die 30 Maii 1827.)

In commentatione mea, de singularitate venae cavae inferioris et quorundam ramorum arteriae Aortae, 26 Aprilis anni 1820 Conventui Academico exhibita*), descripti sunt, inter alios, duo casus rariores, alter scilicet, communis arteriae mesentericae superioris cum arteria coeliaca originis, alter, arteriae hepaticae secundariae ab arteria coronaria ventriculi adventitiae, exempla sistentes. Posthinc aliae mihi, circa arteriam coronariam ventriculi, arteriam gastro-duodenalem et circa renales arterias, memorabiles occurrerunt abnormitates, quarum descriptio sequitur.

I. *Arteria coronaria ventriculi.*

Haec arteria, quae sinistrae extremitati et maiori parti ventriculi ramis suis prospicit, et hanc ob causam dicitur etiam arteria stomachica sinistra s. major, semper oritur a trunco arteriae coeliacae, est que minimus trium ramorum ejus. Mihi tamen ortum coranariae, non a coeliaca, sed a mesenterica superiore arteria, anno 1825 in cadavere hominis adulti observasse contigit. Ad initium nempe

---

*) Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg, 1822. Tome VIII. p. 280 et suiv. Observ. II et III.

trunci mesentericae superioris et a parte ejus antica oriebatur ramus insignis magnitudinis, qui versus fundum ventriculi tendebat, et more arteriae stomachicae majoris, cujus ille vicem supplebat, in fundi substantia, circum cardiam et juxta curvaturam minorem ventriculi dispergebatur, conjungebatur que, ab una parte cum ramis oesaphageae inferioris, ab alteria cum arteria pylorica. — E contra, ab arteriae coeliacae puncto illo, a quo in statu normali arteria coronaria ventriculi oriri solet, proveniebat trunculus, qui non procul initio suo, in duos ramos divisus pergebat ad partem posteriorem diaphragmatis, et arterias diaphragmaticas inferiores, quae ab Aorta saepius, non raro a coeliaca et a coronaria stomachica proveniunt, at in hoc subiecto deficiebant, repensabat. —

II. *Arteria gastro-duodenalis.*

Ramus arteriae hepaticae, qui pone duodenum, prope hujus intestini a pyloro initium descendit, ramis que suis duodenum, ventriculum et glandulam pancreaticam collocupletat, arteria gastro-duodenalis audit sive pancreatico-duodenalis. Illa ordinarie provenit ab arteriae hepaticae trunco, antequam hic ad fissuram transversam hepatis pervenerit inque ramos divisus fuerit; aliquando tamen oritur ab arterica mesenterica superiore. Talis ortus insueti vidi exemplum anno nuper elapso, et res sic se habebat. Ab arteria hepatica, loco artericae gastro-duodenalis, pullulabat solum ramus exilis, qui pone intestinum duodenum, huic et vicinae dextrae extremitati ventriculi ramulis paucis et parvis impertitis, mox infra doodenum, interque ejus primam curvaturam et ventriculum, copulabatur cum ramo magno et crasso aliunde huc adveniente. Sub curatiore indagine et ulteriore persecutione hujus rami, apparuit, illum provenisse ab arteria mesenterica superiore, non directe tamen a trunco, uti superius descripta arteria coronaria ventriculi in alio snbjecto proveniebat, sed ab uno ramorum illius, quos dat intestino colo, et speciatim ab illo qui ab suam in coli parte media distributionem, appellatur arteria colica media. Haec quippe arteria, ante suam in ramos laterales divisionem, emittebat ramum peculiarem, qui nomen arteriae gastro-duode-

nalis vel pancreatico-duodenalis rite meretur, nam pone colon medium ascendens, ad duodenum paene, ablegatis que prius in hoc itinere pancreati ramulis, et facta introrsum versus ventriculum, deorsumque flexura, cum qua exilis ille supra citatus arteriae hepaticae ramus uniebatur, tendebat juxta curvaturam majorem ventriculi, multos ipsi impertiens ramos. Tandem, inter illam curvaturam et inter ipsi adhaerens epiploon gastro-colicum pergens, constituebat hac sua continuatione arteriam gastro-epiploicam dextram.

III. *Arteriarum renalium numerus exuberans et ortus insolitus.*

Anno 1823 vidi in uno subjecto, praeter ordinarias arterias renales, alias supernumerarias, et quidem in dextro latere tales arteriae insuetae erant quatuor. Prima eorum exoriebatur, aeque ac ordinaria, a parte laterali Aortae, sed longe inferius, scilicet infra spermaticam internam, inter lumbalem secundam et tertiam et adversus circiter originem mesentericae arteriae inferioris; et una cum arteria renali ordinaria tendebat ad hilum renis. Tres reliquae supernumerariae arteriae, quod, rarissimum et forsan primum hujus generis exemplum est, omnes proveniebant ab arteria iliaca dextra, truncis separatis et aequali unus ab altero distantia, omnesque tres parti internae extremitatis inferioris et marginis interni renis se se insinuabant. Omnes supernumerariae arteriae multo exiliores, sed simul longiores ordinaria erant. In latere sinistro una tantum observabatur supernumeraria arteria renalis, quae ortum ducebat ab Aorta, inferius quam prima supernumeraria dextra, imo paulo inferius, quam ipsa mesenterica inferior. Magnitudo ejus vix non aequalis erat ordinariae arteriae, cum qua illa ad incisuram renis tendebat.

Arterias supernumerarias renum, unam vel duas, in alterutro vel utroque latere reperiri sed ex Aorta, minus magis inferius ordinariis horum organorum arteriis, oriri, non est observatio nova nec res valde rara; nam et alii anatomici jam pridem hoc observarunt, et ego multoties vidi. Clarissimus HALLERUS, (in iconum anatomicarum partium corporis humani fasc. VIII. pag. 38, nota 13 ad arterias renales) scripsit: „Duae simistrae (scilicet prodibant) ex aorta cum

*

„duabus dextris, inferior sinistra sub arteria mesenterica inferiore nata. Duas „etiam sinistras vidi, quarum infertor paulum supra iliacarum divisionem nata, „retrograda ad renem suum petiit. Duae sinistrae cum dextra unica. Una si- „nistra, cum duabus dextris.“ — Ut autem quaternus numerus talium arteriarum, tanto magis ortus earum ex iliaca, quandoque sint observati, in scriptis anatomicis, saltem quae mihi legendi occasio data fuit, nullibi similem nostro casum invenio.

BESCHREIBUNG
DER
OIKOPLEURA
EINER NEUEN MOLLUSKENGATTUNG;

VOM

Dr. H. MERTENS.

(Vorgelesen, den 3. Februar 1830.)

ALS CUVIER zu Anfang dieses Jahrhunderts zum erstenmale die *Clio borealis* dem anatomischen Messer unterwarf, überzeugte er sich, dass diese Gattung sich in keine der Ordnungen rangiren liess, in die er kurz vorher die damals bekannten Mollusken vertheilt hatte, indess wagte er es nicht für die einzige Art eine neue Familie zu schaffen! Wie ihm indess kurze Zeit darauf von PÉRON Exemplare der *Hyalea* und *Pneumoderma* mitgetheilt wurden, schuf er aus diesen 3 Gattungen die Ordnung der Pteropoden, die seitdem mehrere neue Bürger bekommen hat, und von allen Naturforschern, in allen Systemen aufgestellt ist. Das Thier, mit dessen Schilderung ich Sie heute unterhalten will setzt mich in eine ähnliche Verlegenheit, nicht nur, dass es eine neue für sich bestehende Gattung bildet, lässt es sich nicht füglich in eine der Ordnungen bringen, die zur leichteren Uebersicht sämmtlicher Weichthiere angenommen sind. Am nächsten indess kömmt es den Pteropoden, mit denen es offenbar grosse Verwandtschaft hat, von denen es indess in so vielen Punkten abweicht, dass man allen Gesetzen der natürlichen Familien zuwiderhandeln würde, wollte man es denselben anzupassen suchen. Das in Anfrage

stehende Thier ist freilich schon von CHAMISSO, vor mir, an derselben Stelle, wo ich es beobachtete, gesehen und bereits vor 10 Jahren in der 1. Abtheilung des 10. Bandes der Verhandlungen der Kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen Akademie der Naturforscher als eine neue Gattung unter dem Namen *Appendicularia* aufgeführt worden. Allein die Beschreibung und Darstellung ist so unvollkommen, dass ich mein Thier füglich als nicht bekannt annehmen kann und muss. Wer würde nur eine Ahndung von der wahren Beschaffenheit, von der natürlichen Verwandtschaft eines Thieres haben können, dessen Beschreibung mit den wenigen Worten abgemacht ist? „*Corpus gelatinosum, subovoideum, vix quartam pollicis partem aequans, punctis rubescentibus transparentibus. Appendix gelatinosa, cestoidea, rubromarginata, corpore duplo vel triplo longior, motu flexuoso natationi inserviens. Motus animalis vividus. Genus ultra recognoscendum, generi Cestum Les. forsitan affine.*“ Diese letzte Bemerkung wird Niemanden Zweifel übrig lassen, dass mein sehr geschätzter Freund keine Idee von der wahren Natur dieses Thieres hatte, wenn er sich überzeugt haben wird, dass dieser *Appendix cestoidea* ein Organ ist, das durchaus den Flügeln der Pteropoden entspricht.

Dieses höchst interessante Thier scheint in dem nördlichen stillen Ocean, oder vielmehr im Behringischen Meere, und wahrsheinlich auch nördlicher die *Klio borealis* des atlantischen Eismeeres zu ersetzen. Ihre Menge übersteigt alle Erwartung, während die *Klio* so selten ist, dass ich Thiere dieser Gattung nur allein in der Karaginschen und Awatscha-Bucht in sehr wenig Exemplaren beobachtete, obgleich meine Aufmerksamkeit während der zwei Sommer, die wir in diesem Meere zubrachten, beständig darauf gerichtet war. — Schon oft hatte ich das Meer mit dem jetzt zu beschreibenden Thiere angefüllt gesehen, allein die Mittel, die ich anwandte um es zu fangen, erlaubten nicht, dass ich es unversehrt in meine Hände bekam, und weil ich nie etwas Andres als eine, wie es mir schien, desorganisirte gallertartige Substanz in meinen Netzen fand, die keine Spur eines bestimmten Baues erkennen liess, so hielt ich es für zerstörte Theile eines andern Thieres, welches seinen Weg durch die Spritzorgane der Cetaceen, mit denen diese Meere an-

gefüllt sind, genommen hatte. Ich hielt namentlich dafür eine Beroë, die ich oft ganz und unversehrt unter der ungeheuren Menge dieser Gebilde antraf. Die beständige Regelmässigkeit in der Zeichnung indess, dieser, scheinbar als unorganische Massen, im Wasser schwimmenden Häute, liessen mich mehrere male zu ihrer näheren Prüfung zurückkehren, allein stets mit demselben Erfolge, so dass ich in der Meinung, in ihnen nur die Ueberbleibsel eines andern Thieres erkennen zu müssen, bestätigt wurde, obschon ich die beständig gleichmässige Zerstörung mit dieser Ansicht nicht reimen konnte. So gieng es mir bis zum Morgen des 25. Aug. 1828. Um diese Zeit befand sich der Seniavin in der Bucht des heiligen Kreuzes an Asiens nordöstlicher Küste, und es waren 5 Tage verflossen seit wir in einer Chaloupe, die unter der Leitung des Lieutenants Ratmanoff einen Theil der Küsten dieser Bucht beschreiben sollte, unser Schiff verlassen hatten, wohin wir jetzt zurückzukehren im Begriff waren. Während der Zeit, dass die Anker des Bootes aufgezogen wurden, sah ich dieselbe räthselhafte Masse in dem vollkommen durchsichtigen und ruhigem Wasser schwimmen. Ich blickte noch einmal genau auf dieselbe und sah zu meinem nicht geringen Erstaunen, dass sie in ihrer Mitte einen gelben Kern führte. Dieses war hinreichend mich zum Auffangen einiger in einem Bierglase zu bringen. Obgleich ich sie mit aller möglichen Vorsicht fast nur von der Oberfläche des Wassers schöpfte, so gewahrte ich doch gleich, dass der Kern aus seiner Hülle geschlüpft war, und in äusserst schnellen Bewegungen sah ich denselben unruhig im Glase umherschwimmen, wozu er sich eines langen schwanzartigen Anhanges zugleich als Ruder und Steuer bediente. Nun erst wurde ich inne dass ich ein ganz andres Thier vor mir hatte, als ich bisher wähnte. Allein so vorsichtig ich auch war, einige dieser merkwürdigen Thierchen in ihrer Hülle zu fangen, musste ich doch sehen, dass sie nach einigen starken Schlägen mit dem obenbenannten schwanzartigen Organe ihr Haus verliessen, sobald sie ins Glas geschlüpft waren. Sechs Exemplare hatte ich indess in demselben, und trotz der Kälte von fast — 2° R. konnte ich mich an den mannigfachen Bewegungen des Thieres, und den in Regenbogenfarben spielenden Schwanze nicht satt sehen. Nach und nach indess

nahmen diese Bewegungen an Lebhaftigkeit ab, das Thier zog sich zurück auf den Boden des Gefässes, nahm daselbst anfangs einige schnelle Rotationen vor, und blieb dann fast bewegungslos liegen. Während ich so noch einige Zeit mein Thierchen beobachtet hatte, sah ich aber zu meinem Leidwesen, dass die übrig gebliebenen Häuser mir auch nicht einen Begriff von ihrer Organisation gaben. Ich konnte mir keine gehörige Ansicht derselben verschaffen, sie fielen zusammen, und glichen fast nur den unorganischen schleimigen Absonderungen einiger Medusen und andrer Akalephen. So setzte ich das Glas in einem Winkel unsres Bootes, und voll Freude über die gemachte Entdeckung und voll Trauer, dass ich sie nicht nach Wunsch benutzen konnte, schob ich meine Hände in die Aermel, um sie zu erwärmen, und dachte nach über die hübschen Thiere, die ich auf eben dieser Ausflucht schon gefunden und wieder eingebüsst hatte.

Wir hatten uns nach einem dreitägigen sehr heftigen Sturme auf den Weg gemacht, um die Untersuchung der Bucht in der wir uns befanden, vorzunehmen. Am zweiten Morgen unsrer Reise fand ich an einigen gesegneten Stellen des Strandes mehrere Seethiere ausgeworfen, die längst schon der Gegenstand meiner Wünsche gewesen waren. Drei oder vier verschiedene Ascidien, unter denen eine fast durchsichtige Art, eine schöne grosse orangengelbe *Tritonia* in wohl zwölf Exemplaren, eine neue *Doris*, einen *Pleurobranchus*, eine *Actinea* und noch einige andre Thiere waren mir zu Theil geworden. Es waren fast die einzigen Thiere, die ich während dieser Sommerreise gefunden hatte, und meine Freude über sie war daher sehr gross. Den *Pleurobranchus* zeichnete ich gleich unterweges in verschiedenen Lebensäusserungen, die Tritonien aber waren sämmtlich todt, in Folge der wenigen Sonnenstrahlen dieses Morgens, indess waren sie vollkommen erhalten und versprachen mir eine gute Darstellung ihrer innern Theile. Die Ascidien bedurften keiner Darstellung nach dem Leben, wie ich mich nach 8 bis 10 Beobachtungen überzeugt hatte, indem ihre einzigen Bewegungen in einem beständigen Oeffnen und Schliessen der obern - oder Mundöffnung bestand, und dann und wann einem Auswerfen von Koth aus der beständig wie krampfhaft

geschlossenen Afteröffnung. Alle diese Thiere wurden deshalb in Branntwein gethan, um ihre nähere Untersuchung an Bord vorzunehmen. Des folgenden Tages aber, entstand, während wir um Mittag zu halten, uns am Lande befanden, ein so heftiger Wind, mit einer so starken Brandung, dass unser Boot von dem kleinen Anker, an welchem es befestigt war, nicht mehr gehalten wurde. Es wurde sichtbar gegen den Strand getrieben, und trotz aller Bemühungen, es von demselben abzuhalten, sass es doch bald fest, die Wogen schlugen mit Wuth hinein, und da wir genug zu thun hatten die Instrumente und Provisionen zu retten, so wurden die Resultate meines Fleisses ein Raub des Elementes, von welchem ich sie erhalten hatte! Wie oft widerfährt es dem reisenden Naturforscher nicht, dass er diejenigen Gegenstände später wieder verliert, über deren Erlangung er unsägliche Mühseligkeiten und Gefahren ausgestanden hatte. Inzwischen nahm ich mein Glas wieder zur Hand, das jetzt etwas erwärmt worden war, und traute kaum meinen Augen, da ich eins meiner Thierchen wieder in der Mitte des Glases, und zwar in einem vollständigen Hause schwimmen sah. Mit besonderer, erneuerter Aufmerksamkeit, blickte ich auf die übrigen Individuen, und sahe wie sie sich sämmtlich in vollkommen durchsichtigen Häuserchen in verschiedenen Graden von Vollkommenheit befanden, und mit meinen Augen sahe ich dieselben wachsen, und alle die künstliche Ausbildung erhalten, die ich bald näher beschreiben werde. Ich sah nach der Uhr und es war gerade eine Stunde verflossen, seit ich die Thierchen gefangen hatte. Während des ganzen Tages beobachtete und studierte ich diese Thiere; ich entwarf selbst im Boote mit Hülfe einer guten Loupe mehrere Zeichnungen. So wie ich aber das künstliche Gebäude, so sorgfältig ich auch immer verfahren mogte, berührte, um es in irgend einer bestimmten Stellung besser beobachten zu können, entschlüpfte das Thier seinem Häuschen, schwamm wieder in eben den drolligen Bewegungen, wie anfangs, umher, bis es endlich wieder ruhig wurde, und dann in kurzer Zeit ein neues Haus fertig hatte. Dieses geschah wahrscheinlich an jedem meiner sechs Exemplare, wohl 5 bis 6 Mal während dieses Tages, und da ich mich mit Gewissheit überzeugte, dass dieses Haus zugleich den wichtigsten

Theil des Respirationsorganes dieses Thieres ausmachte, und eine bestimmte Circulation in seinen Gefässen wahrzunehmen war, so ertheilte ich demselben den Namen den es jetzt führt. Wie wir endlich am Abend unser Schiff erreicht hatten, war es zu spät, um eine Untersuchung mit dem Mikroskope vorzunehmen; ich begnügte mich daher damit, meine Thierchen in ein grösseres Gefäss mit Wasser zu thun. Am folgenden Morgen indess fand ich sie in einem ziemlich languescirenden Zustande. Sie hatten sich auch hier freilich noch einmal Häuser gebaut, allein es fehlte ihnen doch sehr diese Energie in ihren Lebensäusserungen, die mich gestern so erfreut hatte. Indess machte ich doch meine Untersuchung mit ziemlich glücklichem Erfolge. Am Nachmittage dieses Tages verliessen wir unsern Standpunkt, und der Seniavin begab sich an einen mehr geschützten Ort der Bucht, wo ich zu meiner Freude das Meer mit diesen Thierchen gefüllt antraf, so dass ich hinreichend Gelegenheit hatte, während der Zeit unsres Aufenthaltes daselbst, diese Thiere nach Lust und Bequemlichkeit zu untersuchen.

Es scheint, dass dieses Thier im Allgemeinen mehr die tiefern Gegenden des Meeres liebt, als dessen Oberfläche, wenigstens sah ich bei stillem Wetter das Thier immer wenigstens einen Faden tief und mehr, meist truppweise, schwimmen. Bei bewegtem Meere indess war die Oberfläche stets von ihm bedeckt, so weit es nur die Wogen erlaubten. Alsdann bemerkt aber auch das hinlänglich nah und genau beobachtende Auge eine Menge Individuen frei herumschwimmen. Das Haus selbst lässt deutliche Bewegungen, die in Contraktionen und Dilatationen bestehen, wahrnehmen.

Das Thier, dessen künstliches Bauwerk wir nach Ansicht des Gefäss-Systemes betrachten werden, besteht zunächst aus einem Körper (Tab. 2. *A. B.*) und einem flügel- oder schwanzartigen Anhange (T. 2. *C.*), von welchem letzteren man auf den ersten Augenblick glauben mögte, dass er mit ihm durch eine Gelenkverbindung vereinigt sey. Den Körper selbst kann und muss man aus zwei Blasen zusammengesetzt ansehen. Die obere nierenförmige (*A.*) umfasst mit ihrem *hilo* die Basis der andern mehr birnförmigen (*B.*). Bei den Bewegungen des Thieres, de-

nen vermittelst des Schwanzes, gleichsam wie mit einem Steuerruder, eine bestimmte Richtung ertheilt wird, entfernen und nähern sich an der vordern Seite beide Blasen mundartig eine von der andern, ja wollte man im Spix'schen Sinne streng analogisch verfahren, so müsste man die obere Blase als einen der *maxilla superior* entsprechenden Theil, die untere birnförmige dagegen, als Unterkiefer betrachten. — Ich glaube auch in der That mich gewiss überzeugt zu haben, dass der Mund (F. 3. *a.*), während des *hiatus* beider Theile mir blosgelegt war, indess gestehe ich, dass ich dieses nur glaube. Mit Gewissheit kann ich die bestimmte Lage des Mundes nicht angeben, denn ich sah nicht, dass das Thier Nahrungsmittel durch denselben aufnahm.

Was aber das entgegengesetzte Ende des Darmkanals anbelangt, so habe ich denselben genau beobachtet, und mich durch das Auswerfen verdauter Nahrungsmittel bestimmt von seiner Funktion als After überzeugt (F. 1. *b.*). Eben so konnte ich den Darm, durch die in denselben enthaltenen Excremente, so weit verfolgen, wie ich ihn in meiner Zeichnung angegeben habe. Es zog sich derselbe abwechselnd zusammen und erweiterte sich, zeigte also offenbar peristallische Bewegung. Er besteht deutlich aus zwei Häuten, von denen sich die innere unabhängig von der äussern zusammenzieht. Das *rectum* ist vorzüglich gut zu erkennen, und es schien mir selbst, als wenn sich eine klappenartige Vorrichtung (F. 1. *c.*) zwischen ihm und dem oberhalb desselben liegenden Theile des Darms wahrnehmen liesse, wenigstens war in allen Exemplaren, die ich untersuchte, genau dieselbe Stelle eingeschnürt, und wenn sich der Inhalt des *recti* durch den After mit einem Male ausgeleert hatte, so folgte aus dem obern Theile nach einer Weile plötzlich, mit einem Rucke der in demselben enthaltene Unrath, und nahm genau dieselbe Stelle ein, die der ausgeworfene eingenommen hatte. Das *rectum* steigt fast gerade abwärts, und öffnet sich nahe der Insertionsstelle des Schwanzes auf der rechten Seite des Thieres. Sein *orificium* ist deutlich mit einem Sphinkterartigen Organe versehen. Der auf dem Dickdarm folgende Theil dieses Eingeweides schlägt sich in der höchsten Stelle der Basis der unteren birnförmigen Blase, einen Bogen bildend, über

einen Theil des Magens weg, nach innen, wo er in denselben übergeht. Der Magen (*d.*), dessen Gestalt sattelförmig ist, liegt genau in der Mitte des Thieres, und erstreckt sich gleichweit zu beiden Seiten. In seinem obern vordern Theile erkennt man zu beiden Seiten eine Reihe sehr bestimmter Falten, die auch bei vollkommen angefülltem Magen mit Leichtigkeit erkannt werden, und die daher vielleicht blinden Anhängen oder Säcken entsprechen. Der untere Theil desselben Organes, durch eine Einschnürung von dem oberen getrennt, ist unstreitig von körnigt-drüsigter Struktur. Es steht dasselbe in durchaus freier Verbindung mit dem Darme, und vertritt vielleicht, und selbst nicht ohne Wahrscheinlichkeit, die Funktionen der Leber sowohl, wie des Magens. Der Inhalt desselben war stets nur wenig gelber gefärbt, wie der des übrigen Darms. Hier verlor ich beständig den Darmkanal aus dem Gesichte, so dass ich über seinen Anfang im Dunkeln bin. Freilich sah ich, wenn ich das Thier von vorn betrachtete, und beide Blasen durch einen *hiatus* von einander ensfernt waren, im Grunde desselben eine sehr umschriebene Oeffnung (F. 3. *a.*), doch wage ich mich kaum mit Gewissheit darüber zu entscheiden, da ich den Kanal des Darms nicht bis dahin verfolgen konnte. — Das Gefäss-System zu dessen Beschreibung ich jetzt übergehe, liegt ebenfalls nur in der unteren Blase, indem ich nur den Theil desselben zu schildern mich anschicke, in welchem ich mit Bestimmtheit Cirkulation wahrnahm. Bei der ersten genauen Betrachtung des Thieres sieht man einen rothen Bogen (*g.*), welcher über den Magen weg gehend deutlich aus dem Innern und hinterem Theile des Thieres kommt. — Man beobachtet in demselben mit grosser Bestimmtheit die Richtung des in demselben fliessenden Blutes nach oben hinten und innen bis an das Herz (*f.*). Dieses Gefäss, das seiner Funktion nach, daher als eine Vene angesehen werden muss, sehen wir aus drei Aesten gebildet, von denen zwei von unten und hinten kommen, während der mittlere von vorn aus einem Organe (*h. i.*) tritt, welches sich fast an der untersten Spitze der birnförmigen Blase zeigt; in diesem letzten Aste sieht man erst ganz nahe seiner Mündung in die Hauptvene Blutkügelchen auftreten, während man diese sehr klar in dem ganzen Verlaufe der beiden Seitenäste wahrnimmt, ja

man sieht solche jederseits aus einem ringförmigen Kanale treten, gegen welchen hin man deutlich aus dem Herzen die Blutmasse gehen sieht. Der Umstand indess, dass ich nie das Thier unter meinem Mikroskope in die Lage bekommen konnte, die mir zur genauen Untersuchung dieser Theile nöthig schien, war wohl die Ursache, dass ich nie die Blutkügelchen vom Herzen bis zu diesen beiden Ringkanälen verfolgen konnte, doch zweifle ich nicht daran, dass hier der Uebergang eines Theils des arteriellen Blutes in venöses statt habe. Ein andres Gefäss, in welchem ich indess ebenfalls keine Blutbewegung wahrnehmen konnte, geht aus eben diesem ringförmigen Kanale jederseits, um sich nach vorn und unten in dasselbe Organ zu begeben, aus welchem der mittlere Ast des die Hauptvene bildenden Gefässes tritt. Das Herz (*f.*) liegt nach hinten etwas oberhalb der Insertion des Schwanzes; man bemerkt deutlich die Pulsationen, die so heftig sind, dass durch dieselben der Darm und die Leber beständig mit bewegt werden. Vorzüglich auf der linken Seite des Thieres, wo das *rectum* diese Theile unbedeckt lässt, bemerkt man in Folge der Pulsationen sieben Längenfalten im Herzen, die ich anfangs für Branchien zu halten geneigt war. Es leidet keinen Zweifel, dass die Bewegungen des Herzens von oben nach unten gehen, dass es mithin von oben und zwar aus der betrachteten Hauptvene sein Blut bekömmt und es unten wieder von sich giebt. Gefässe die sich von dem Herzen in den schwanzförmigen Anhang begeben, oder aus demselben kommen, habe ich trotz der grössten Aufmerksamkeit nicht finden können. Das schon mehrmals erwähnte Organ, welches die Spitze der birnförmigen Blase enthält und aus welchem wir den mittleren Ast der Hauptvene treten sahen, ist von äusserst zusammengesetzter Bildung, und ich bedaure unendlich, dass es mir nicht möglich wurde, eine klare Vorstellung, weder seines Baues noch seiner Funktion zu gewinnen. Ich werde indess gewissenhaft dasjenige mittheilen, was ich bemerkte, vielleicht, dass man einst grössere Arten dieser Gattung kennen lernen wird, die im Stande sind bessere Aufschlüsse zu gewähren, als ich aus dieser nicht über zwei Linien messenden Art zu ziehen im Stande war.

Zuerst bemerkt man einen mittleren Theil (*h.*) den man aus zwei Lamellen zusammengesetzt betrachten könnte, die jederseits ihre grösste Fläche zeigen, wenn man das Thier von der Seite betrachtet, die aber dadurch, dass sich beide in der Mitte an der Vorderfläche der birnförmigen Blase vereinigen, einen halben Cylinder darstellen. Jederseits ist dieser aus mehreren Bögen gebildet, die vielleicht mit einem Gefässe, welches zunächst seinem Rande verläuft, in Verbindung stehen. An dieses halbcylinderförmige Organ heftet sich an beiden Seiten ein vollkommen blattartiger Körper (*i.*), an dessen Basis sich ein ringförmiger Kanal befindet, gegen welchen hin das seitliche Randgefäss des mittleren Theiles eine offenbare Richtung hat. In diesen beiden Ringen konnte ich keine Cirkulation bemerken. Dieses ganze Organ, welches ich mit einer unvollkommenen Schmetterlingsblume vergleichen mögte, in welcher der mittlere Theil das *Vexillum*, die seitlichen blattförmigen Körper aber die *alae* vorstellen würden, steht vermittelst eines Kanales, der sich an der äussersten Spitze der birnförmigen Blase mündet, mit der Aussenwelt in Verbindung. Ich glaube überzeugt seyn zu müssen, dass dieses Organ zum Theil der Respiration vorsteht, allein dieses ist nicht seine einzige Funktion, denn von hier aus geht die Bildung des so ausserordentlich künstlich gebildeten Hauses vor sich, dessen schon zu Anfang der Beschreibung dieses sonderbaren Thieres Erwähnung gethan ist. Dieses Haus, oder wenn man lieber will, dieser Mantel, der in dem kurzen Zeitraume einer halben Stunde vollkommen gebildet wird, muss als ein Blatt gedacht werden, welches einfach aus dem Kanale dringt, dessen Ursprung wir soeben in dem Organe gefunden haben, das die Spitze der birnförmigen Blase einnimmt. Kaum hat indess dasselbe seine Höhle verlassen, als sich seine beiden obern Ecken, wie die untern nach hinten und innen umschlagen. Hiedurch wird jederseits, wenn man das Thier von hinten betrachtet, eine Düte oder ein Horn gebildet, deren Spitze gegen die Spitze der birnförmigen Blase gerichtet ist, deren Mündung aber nach unten, aussen und hinten blickt. Zu gleicher Zeit bilden sich zwei ähnliche Düten oder Hörner, eine jederseits nach oben, nur sind diese letzteren bei weitem kleiner, und fast ammons- oder füllhornartig gewunden, auch ihre

Mündung muss man im Rücken des Thieres suchen. Dieses ganze Vier-Hörnergebäude besteht aus einem sehr regelmässigen Gitterwerke von Gefässen (*T.* 2. *F.* 5.); ich zählte an der Mündung der unteren Düten jederseits 24 Längengefässe, die unter einander durch eine grosse Menge kleiner brückenartiger Anastomosen netz- oder gitterförmig verbunden waren. In diesen Gefässen bemerkte ich, zur Zeit der Bildung dieses Organes, vermittelst einer guten Loupe deutliche Bewegung der Blutkügelchen, die dem untern Ende der birnförmigen Blase entströmten. Die Deutlichkeit, mit der man hier die Circulation wahrnimmt, zugleich mit dem grossen Reichthum der Gefässe, und dem bedeutenden Raume über welchem dieselben ausgebreitet sind, waren Umstände, die mich glauben liessen in diesem sonst wirklich räthselhaften Gebilde ein Organ erkennen zu müssen, dessen eigentliches Geschäft sey den Decarbonisationsprocess des Blutes zu bewirken. Dass das Thier wie wir gesehen haben, sich sehr leicht von diesem merkwürdigen Anhange trennt, streitet nicht mit dieser Ansicht, es spricht vielmehr für meine Meinung das Bedürfniss, welches das Thier zu haben scheint, diesen wichtigen Theil seines Selbst wieder zu produciren. Mit der Betrachtung dieser Gefäss-Membran ist indess keinesweges die Beschreibung des Hauses geschlossen, wir werden vielmehr gleich sehen, dass mit demselben nur ein Theil desselben geschildert ist, denn dieses ganze Organ, sehen wir von einer weissen schleimigen Haut umhüllt, die derselben Quelle ihren Ursprung verdankt, und nur das Thier selbst befindet sich ausserhalb seiner Höhle. Endlich aber sehen wir auch aus dem Innern sämmtlicher 4 trichter-, düten- oder hörnerartigen Oeffnungen, Blasen eines äusserst feinem Membran dringen. Also auch hier der wesentliche Theil eingeschlossen von eines äussern und innern Membran!! Ausser den bisjetzt betrachteten Organen, enthält die untere birnförmige Blase noch in ihrem, hinter und unter dem Mastdarm gelegenem, Theile ein Behältniss, welches ich für den Eier-Behälter deswegen zu halten geneigt bin, weil ich lebende Thierchen daraus hervortreten sah, worauf dieser Theil sichtbarlich zusammenfiel. Freilich gelang es mir nicht dieselben genau zu untersuchen, doch fand ich nach sorgfältiger Prüfung keinen andern Theil des Thieres dem ich diese

Funktion hätte beilegen können. Dass ich des Lebendiggebärens ungeachtet, wie wir bald sehen werden, Samenbehälterartige Organe fand, beweist nichts gegen meine Ansicht: Sehen wir doch bei dem Fischen im *Blennius viviparus* und bei den Amphibien im Salamander, Beispiele von der vollkommenen Ausbildung der Thiere im Mutterleibe, bei nicht stattgehabter inniger Verbindung der Geschlechtsorgane.

Die untere birnförmige Blase, die Hülle aller bisher betrachteten Organe, hat, wie die Untersuchung unter dem Mikroskope es darthut, einen offenbar drüsigten sehr gefässreichen Bau. Sie liegt übrigens, in einer andern, weiteren, wie es scheint, gefässlosen Blase.

Die obere nierenförmige Blase (*A.*), besteht zunächst aus zwei Hemisphären einer markigen Masse (*m*), die zu beiden Seiten in derselben liegen, und in der Mitte einer freien mit einer wässerigten Feuchtigkeit angefüllten Raume zwischen sich lassen. Nach langer Betrachtung und manchen Zweifeln muss ich diese beiden Organe als den eigentlichen Eierstöcken entsprechende Theile betrachten. Untersucht man das Thier von hinten, so sieht man dass aus beiden Körpern, ein, verhältnissmässig weiter, Kanal tritt. Beide Kanäle scheinen sich weiter unten zu vereinigen, und ich glaube das gemeinschaftliche Gefäss bis zu dem Theile verfolgt zu haben, dem ich weiter oben die Funktionen eines Eierbehälters zugeschrieben habe. Es sind die beiden Organe von sehr bedeutendem Umfange; die Substanz die in ihnen enthalten ist, zeigt sich sogleich bei sehr starker Vergrösserung, nur als eine Masse kleiner Kügelchen, die an kein abgesondertes bestimmtes Organ befestigt ist, allein ich kann keine andre Analogie für dieselben auffinden. Nach unten und zur Seite von ihnen sieht man, freilich nur in wenigen Exemplaren, die äusserst bedeutenden dunkelorangefarbenen Samenbehälter liegen. Ich konnte leider diese Organe in ihrer Verbindung nicht ein einziges Mal unter dem Mikroskope untersuchen. Ich mogte auch noch so sorgfältig verfahren, um die Exemplare, bei welchen diese Theile auf den ersten Blick in die Augen fielen, unverletzt auf das Objektivglas zu bringen, wozu ich mich eines Uhrglases bediente, in welchem das Thier frei herum

schwimmen konnte, so gelang mir solches doch nie. Sobald das Thier an irgend einen festen Körper stiess, liess es die orangenen Massen mit vieler Heftigkeit fahren.

Einen Augenblick behielten dieselben im Wasser ihre ursprüngliche Gestalt bei, dann aber wurden allmählig die Umrisse undeutlicher, und die ganze Masse zerfloss, so dass in weniger als zwei Minuten auch keine Spur derselben mehr wahrzunehmen war; das Wasser, dessen sich im Uhrglase oft nur eine sehr geringe Menge zeigte, wurde weder dadurch getrübt noch ihm die geringste Färbung ertheilt, und dieser Umstand war es vorzüglich der mich in meiner Ansicht diese Organe für einen Samenbehälter zu halten, bekräftigte. Die ganze nierenförmige Blase aber, die einen Theil der Genitalien beider Geschlechter enthält, erscheint unter dem Mikroskope betrachtet, mit lauter sternartigen Pünktchen besetzt.

Der schwanzartige Anhang des Thieres ist durchaus zum Ruder oder Schwimm-Organe eingerichtet, er ist stark von den Flächen blattartig zusammengedrückt (*depressus*). Mit einer etwas verdickten stumpfen Basis ist er genau, da wo beide Blasen sich hinten mit einander vereinigen, inserirt, gerade vor ihm liegt das Herz von welchem man glauben mögte, dass es mit ihm in inniger Verbindung stände. Durch seine ganze Länge verläuft ein dickerer Kern oder Rippe, so dass man den übrigen Theil, als flügelförmige Fortsätze desselben betrachten könnte, in dessen linker Hälfte ein schmaler zelligt-blasenförmiger Kanal in die Augen fällt, über dessen Bedeutung ich mich nicht mit Bestimmtheit auszusprechen wage. Nie, obgleich ich eine sehr grosse Menge von Exemplaren in verschiedenen Grössen untersuchte, fand ich denselben mit irgend etwas angefüllt; es zeigte sich mir nirgends ein Ausführungsgang aus demselben. Ich sah nie etwas anderes als einen mit Luft angefüllten blasenförmigen Behälter, und mögte daher geneigt seyn anzunehmen, dass derselbe in Beziehung zum Schwimmen stände, dass vielleicht der Schwanz dadurch zum Rudern geschickter würde. Sehr deutlich sind Querfasern in der mittleren Rippe wahrzunehmen, welche man noch zu beiden Seiten in die blattartige Ausdehnung desselben verfolgen kann.

Die Kleinheit und Weichheit des Thieres erlaubten durchaus keine Berührung

mit dem anatomischen Messer oder der Nadel; das Nervensystem muss ich daher leider mit Stillschweigen übergehen, da ich in dem durchsichtigen Thiere unter dem Mikroskope nichts davon bemerken konnte.

Die Verwandtschaft dieses Thieres mit den Pteropoden ist unverkennbar, besässe die *Oikopleura* zwei schwanzartige Anhänge, so würde ein Jeder darin die Flügel der Pteropoden wieder erkennen. Vorzüglich nahe gränzt es an *Clio.* Untersucht man eine *Clio* lebend, so sieht man dieselbe ebenfalls aus zwei besondern Blasen gebildet, die sich ganz wie bei unsrem Thiere verhalten. Deutlich sieht man in der untern einen zweiten Sack, der die eigentlichen Eingeweide enthält; in dem Zwischenraume beider Blasen befindet sich auf der vordern Fläche der Mund, der After an der rechten Seite der untern Blase. Die beiden Flügel sind genau an derselben Stelle inserirt, wie der einfache in meiner Gattung, der Bau der Flügel ist in den verschiedenen Species der Gattung *Clio* verschieden; die obere Blase der *Clio* enthält eine sehr lebhaft gefärbte, mit zwei Anhängen versehene Masse, die vielleicht dem Theile entsprechen, den ich bei der *Oikopleura* Samenbehälter genannt habe. Sehr abweichend ist dagegen bei *Clio*, die Lage des Herzens, die Anwesenheit einer besondern Leber, der zusammengesetzte Bau der Geschlechtswerkzeuge; allein alle diese Theile sehen wir in den übrigen Pteropaden ebenfalls bedeutenden Modificationen unterworfen.

Ich habe diese Art mit dem Namen meines sehr geschätzten und gelehrten Freundes belegt, nicht etwa, weil ich glaube ihm dadurch einen besondern Beweis meiner Hochachtung oder Dankbarkeit geben zu können, sondern weil er der erste war der die Aufmerksamkeit der Naturforscher auf dieses Thier gelenkt hat.

Erklärung der Kupfertafeln.

Tabula prima.

Fig. 1. Die *Oikopleura Chamissonis* in natürlicher Grösse mit ihrem Hause von vorne gesehen. Man sieht von dem eigentlichen Thier in der Mitte, nur die beiden Blasen, zu beiden Seiten derselben, die ammons- oder füllhornartigen Düten, unterhalb demselben den übrigen Theil der der Respiration vorstehenden Membran. Mit punktirten Linien, sind die Blasen angezeigt, die aus allen 4 dütenartigen Mündungen quillen, und die offenbar Fortsetzungen der innersten Haut dieses merkwürdigen Organes sind. Das ganze ist von der feinen schleimartigen Membran umgeben.

F. 2. Dasselbe Thier von hinten gesehen.

F. 3. Dasselbe Thier von der Seite.

F. 4. Dasselbe Thier von oben.

F. 5. Dasselbe Thier von unten.

Tabula secunda.

F. 1. Das eigentliche Thier sehr vergrössert von der rechten Seite gesehen.

F. 2. Dasselbe Thier von der linken Seite.

F. 3. Dasselbe Thier von vorn.

F. 4. Dasselbe Thier von hinten.

F. 5. Ein Theil des Gefässnetzes der mittleren Membran des Gehäuses des Thieres.

Alle diese Zeichnungen sind sehr vergrössert. In allen Figuren bezeichnen dieselben Buchstaben dieselben Organe.

A. Die obere Blase.

*

B. Die untere Blase.

C. Der schwanz- oder flügelartige Anhang.

a. Die vermuthliche Mundöffnung.

b. Der After.

c. Die Einschnürung des Darmkanals, die den dünnen Darm von den dicken trennt.

d. Der Magen.

f. Das Herz in seinem Herzbeutel.

g. Die Hauptvene.

h. Der mittlere Theil des Organes, in welchem die Bildung des Gehäuses vor sich geht.

i. Die seitlichen blattförmigen Anhänge desselben.

k. Die Ringgefässe in denen man deutlich Cirkulation wahrnimmt, und die mit Venen sowohl, wie mit Arterien Verbindungen eingehen.

l. Der Kanal aus welchem das Gehäuse nach aussen tritt.

m. Die Eierstöcke?

n. Die Samenbehälter.

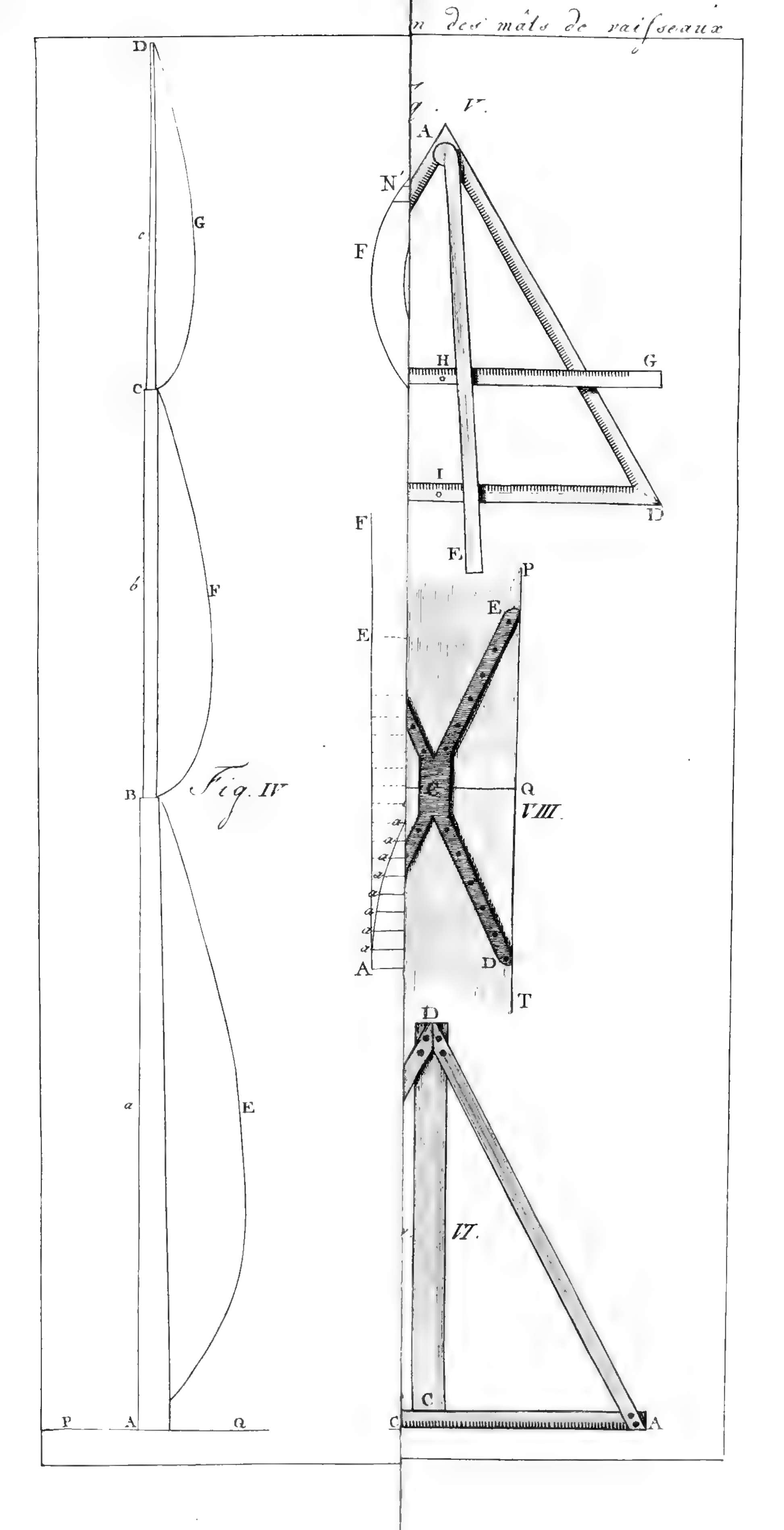

D
c
G
C
b
F
B
Fig. IV
a
E
P
A
Q
A
N'
F
H
G
I
D
E
F
E
P
E
C
Q
VIII.
A
D
T
D
VI.
C
C
A

Fig. I

Fig. II

Fig. III

Fig. IV

Fig. V

Fig. VI

Fig. VII

Fig. VIII

Fig. IX

Fig. X



Oikopleura Chamissonis. n.



Oikopleura Chamissonis. n.

PHYSIKALISCHE BEOBACHTUNGEN

ANGESTELLT

AUF EINER REISE UM DIE WELT UNTER DEM COMMANDO DES CAPITAINS OTTO VON KOTZEBUE

IN DEN JAHREN 1823, 1824, 1825 UND 1826

VON

E. LENZ.

(Gelesen den 4. November 1829.)

VORREDE.

Die erlauchte Russisch-Kaiserliche Admiralität, welche im Jahre 1823 obige Reise beschlossen hatte, wandte sich durch ihr berühmtes Mitglied Se. Excell. den Herrn Vice-Admiral VON KRUSENSTERN an die Professoren PARROT, ENGELHARDT und STRUVE um von jedem einen ihrer Zöglinge zu dieser Reise für die Physik, Geognosie und Astronomie zu erhalten. Des Ersteren Wahl fiel auf mich für die zahlreichen physikalischen Aufgaben deren Bestimmung ihm von der Admiralität gleichfalls überlassen worden war. Diese Aufgaben finden sich in der von ihm mir ertheilten Instruction wie folgt:

Instruction

betreffend die physikalischen Versuche und Beobachtungen auf der wissenschaftlichen durch den Hrn. Capitain VON KOTZEBUE *commandirten Expedition.*

Diese zahlreichen Versuche und Beobachtungen theilen sich von selbst in zwei Abtheilungen, nämlich in die Versuche auf dem Meere und in die auf dem Lande.

I. *Versuche auf dem Meere.*

Mit dem Bathometer (Tiefenmesser). Dieses Instrument besteht: *a*) aus einem Senkinstrument, welches sich in jeder Tiefe, wo man es anhalten lässt, mit 60 Pf. Wasser füllt und in seinem Innern einen Thermometer enthält von hinlänglicher Stärke der Kugel um dem Wasserdruck zu widerstehen; *b*) aus einem Seile, welches bis 3000 T. unter der Oberfläche des Meeres reichen kann und schon mit Rücksicht auf die Verkürzung durchs Nasswerden und Verlängerung durch das angehängte Gewicht berechnet ist; *c*) aus einem Gestelle mittelst welchem das Seil mit dem Senkinstrument hinabgelassen und heraufgezogen wird; *d*) aus einem besondern Senkblei von 20 Pf.; *e*) aus einer römischen Wage. Der Gebrauch dieses Instrumentes setzt Windstille voraus; daher wird darauf gerechnet, dass jede Gelegenheit, die sich dazu darbietet, benutzt, ja dass diese Gelegenheit so oft es thunlich aufgesucht werde. Mit diesen Instrumenten lassen sich folgende Versuche anstellen:

Ueber die Temperatur des Meeres in verschiedenen Tiefen. Diese Tiefen nehmen von 200 zu 200 Tois. zu, so dass auf der Tiefe von 3000 T. funfzehn Stationen genommen werden. Vor allem aber muss das Senkblei hinuntergelassen und von 200 zu 200 T. mittelst der römischen Schnellwage untersucht werden, ob es nicht auf den Grund gekommen. Hat sich kein Grund gezeigt, so werden die Versuche mit dem Senkinstrument selbst angestellt, welches nach Erreichung jeder Station von 200 T. wieder heraufgezogen und das Thermometer sogleich nach Oeffnung der Klappe beobachtet wird. Zu comparativen Versuchen wird der Sixtsche Thermometer an das Seil gebunden und bei jedem Heraufziehen beobachtet.

Ueber die Beschaffenheit des Meerwassers in verschiedenen Tiefen. Von dem Wasser, welches das Senkinstrument heraufbringt, werden 4 Bouteillen bei jeder Station eines Senkversuchs genommen und zwei dazu angewandt um an Ort und Stelle das spezifische Gewicht, mittelst des dazu gehörigen grossen Aräometers genau zu untersuchen. Die zwei andern Bouteillen werden aufs sorgfältigste verkorkt und nach Europa gebracht um dem Gehalt an Salzen nach in Dorpat geprüft zu werden.

Ueber die Elasticität und Dichtigkeit des Wassers in verschiednen Tiefen. Zu diesem Behufe wird bei jedem Senkversuche und zu jeder Tiefe ein Elaterometer für das Wasser an das Seil unmittelbar über dem Senkinstrument angebunden und bei jedem Heraufziehn gleich nach dem Thermometer beobachtet. Diese Benutzung des ungeheuren Drucks, den die hohen Wassersäulen ausüben, wird eine Reihe von 15 Beobachtungen über die Elasticität des Wassers bei jedem Senkversuch liefern, woraus sich zugleich das Gesetz der Condensation durch jeden gegeben Druck, so wie auch die Dichtigkeit des Meerwassers in jeder Tiefe wird berechnen lassen. Das Elaterometer muss das erste Mal, dass diese 15 Versuche angestellt werden, mit destillirtem Wasser angefüllt werden, und dauert die Windstille lang genug um diese 15 Versuche an demselben Ort zu wiederholen, oder hat man eine neue Windstille, so ladet man das Instrument mit Meerwasser um zu sehen ob der Salzgehalt etwas an der Compressibilität verändert.

Ueber die Elasticität des Quecksilbers. Derselbe hohe Wasserdruck wird auf einen besondern Elaterometer für Quecksilber angewandt um die Elasticität dieser Flüssigkeit zu prüfen. Es wird hiermit wie mit dem Analogon für das Wasser verfahren.

Ueber den Einfluss der in diesen Versuchen vorwaltenden Druckkräfte auf feste aber weiche (wenig elastische) Körper. Die diesen Druckkräften auszusetzenden Körper sind Blei, Zinn, Phosphor, Wachs und Talg. Die hydrostatische Abwägung vor und nach dem Senken wird entscheiden ob diese Körper bei den Versuchen eine Verdichtung erleiden und falls diese Statt findet, wie gross sie ist. Dazu

werden die Körper in ein besonderes Instrument eingelegt und dann an das Seil gehängt, wenn die 15te d. h. tiefste Station erreicht wird um nicht die Anzahl der Versuche die zwischen den Stationen statt finden sollen zu sehr zu vermehren und dadurch die Zeit für die Senkungen zu verbrauchen.

Versuche über die Wirkung grosser Druckkräfte auf die Aeusserung der Affinität *) Es werden zu diesem Behufe mehrere chemische Apparate an dem Seil angebunden und mit hinuntergelassen und zwar wie die festen Körper nur bei der 15ten Senkung. Die Gegenstände dieser Versuche sind:

a) Sauerstoffgas und Wasserstoffgas, woraus es sich ergeben wird, ob diese Compression von etwa 600fachem atmosphärischem Druck fähig ist Wasser zu bilden.

b) Sauerstoffgas und Stickgas. Ob sich Salpetersäure bilden wird?

c) Wasserstoffgas und Stickgas. Ob sich Ammoniak bildet?

d) Sauerstoffgas und Quecksilber. Ob die Compression eine Oxydation des Quecksilbers erzeugt?

e) Atmosphärische Luft und Amalgam. Ob das Amalgam sich bedeutend oxydirt?

f) Sauerstoffgas und Schwefel. Ob der Schwefel sich entzünden oder säuren wird?

g) Sauerstoffgas und destillirtes Wasser. Ob oxygenirtes Wasser entsteht?

h) Wasserstoffgas und Wasser. Ob sich hydrogenirtes Wasser bildet?

i) Oehl und Sauerstoffgas. Ob das Oehl sich unter diesen Umständen verändern wird?

k) Kohlensaurer Kalk und Wasser. Ob der grosse Druck die Auflösung des Kalks befördert?

---

*) Damals waren die schönen Compressionsversuche in England noch nicht angestellt worden und H. Staatsrath PARROT, der für die kleinern Compressionen bei 40 Atm. Druck einen Apparat gemacht hatte, konnte da, wo er damals war, einen für 500 und 600 Atmosphären Druck sich nicht verschaffen und wünschte daher das Gewicht des Oceans für solchen Druck zu gebrauchen.

l) Eine nahezu gesättigte Kochsalzauflösung. Ob der grosse Druck eine Crystallisation des Salzes, des übrigen Wassers ungeachtet, bewirken wird?

Es wird dringend empfohlen alle diese Versuchsreihen, die von dem Bathometer abhängig sind, so oft zu wiederholen als es die Umstände erlauben. Sie müssen *wenigstens* zweimal vollständig statt finden; und alsdann da, wo entweder der Grund nicht die gehörige Tiefe hat oder die Windstille nicht lang genug anhält, müssen die Versuche über die Temperatur des Wassers in der Tiefe, so auch über die Elasticität des Wassers und Quecksilbers, so weit es geht, angestellt werden.

Ueber das Seewasser an der Oberfläche. Dessen Temperatur muss an zwei Tagen jeder Woche und an jedem dieser zwei Tage 4 mal täglich in ungleichen Zeitunterschieden von einander beobachtet werden. Die Zeiten der Beobachtung werden durch den Aufgang der Sonne in dieser Region bestimmt, indem die eine Beobachtungszeit immer eine halbe Stunde vor diesem Aufgang statt finden muss, eine zweite um 1^h nachmittags und die zwei noch übrigen in gleichen Intervallen zwischen diesen beiden. Diese Temperaturen werden mit den gleichzeitig genommenen Temperaturen der Luft über dem Wasser verglichen um zu entscheiden ob das Meer oder die Luft die höhere mittlere Temperatur hat.

Das spezifische Gewicht des Meerwassers an der Oberfläche muss nahe auf einem Meridian von 2° zu 2° der Breite im atlantischen Meere und in der Südsee geprüft werden. So auch nahe zu auf einem Parallelkreise von 5° zu 5° der Länge. Diese Beobachtungen können mit den vorhergehenden combinirt werden um gleich die Temperatur beizusetzen.

Die sonst auf Seereisen üblichen 3 bis 4 *mal täglichen Barometer-Beobachtungen* gewähren eigentlich keinen Nutzen für die Wissenschaft, weil, obgleich täglich und zu bestimmten Stunden angestellt, sie dennoch isolirte Beobachtungen sind, da das Schiff seinen Stand immer ändert. Es steht daher dem Physiker frei, ob er solche Beobachtungen anstellen will oder nicht. Ich rathe nicht dazu um die Zeit für Besseres zu behalten. Nur muss er nicht säumen, wenn das Schiff in der Nähe des Aequators landet, die täglichen Variationen des Barometers zu beobachten und

zwar während eines ganzen Tages alle Stunden des Tages und der Nacht. Bei besonders auffallenden Zuständen der Atmosphäre muss das Barometer fleissig beobachtet werden.

Die Feuchtigkeit der Luft wird am Fischbein-Hygrometer von Deluc immer zugleich auf dem Barometer beobachtet.

Ueber Gewitter auf dem Meere und Alles, was daran beobachtet werden kann, wird der Physiker ein sorgfältiges Journal führen, damit man daraus urtheilen könne, ob auf dem hohen Meere Gewitter so häufig sind als auf dem festen Lande. Von den Einwohnern sehr kleiner isolirter Inseln wird man Nachricht einziehen, wie oft etwa sich Gewitter ereignen, da solche Inselchen in dieser Hinsicht kaum als eine Unterbrechung der Meeresfläche angesehn werden können. Zeigen sich Wasserhosen, so muss ihre geographische Gegend genau angegeben werden. Auch muss man genau beobachten, in welcher Richtung dieses Meteor sich schneckenförmig dreht.

Da neuere Versuche die Vermuthung veranlasst haben, dass die Atmosphäre über dem Meere einen geringern Gehalt an Kohlensäure hat als auf dem Lande, auch etwas salzsaures Natron enthält, so wird dieses mit dem Anthracometer und Phosphor-Eudiometer in Bezug auf Kohlensäure und Sauerstoffgas und mit salpetersaurem Silber in Beziehung auf salzsaures Natron untersucht. Besonders sind diese Versuche zu empfehlen da, wo auf dem Aequator bei Windstillen das Meer stark leuchtet und zugleich stinkt, damit man erfahre, ob hier nicht mehr Kohlensäure und weniger Sauerstoffgas statt findet.

II. *Versuche auf dem festen Lande.*

Pendelversuche mit einem constanten Pendel, wo die Beobachtungsart die der Coïncidenzen mit einem Uhrpendel ist. Die Gleichheit der Resultate mit zwei solchen Pendeln wird für die Unveränderlichkeit des Apparats bürgen und im Fall einer Ungleichheit auf einen leicht zu eliminirenden Fehler hinweisen.

Die Pendelversuche werden angestellt:

1) zur Bestimmung der Figur der Erde, und zwar vorzüglich in zwei Richtungen, in der eines Meridians und der eines Parallelkreises. Für die erste Richtung wird der grosse Archipelagus gewählt, der östlich Asien begränzt unb für dessen Anfang die Macquaries (55° südlicher Breite) angesehn werden können, und der ferner Neu-Holland, die Salomons-Inseln, die Portlands-, Carolinen-, Mariänen-, Magellans-, Kurilischen Inseln nebst der Halbinsel Kamtschatka begreift. Tritt das Schiff in die Behringsstrasse, so werden daselbst am Meeresufer, wo es möglich seyn wird, diese Versuche wiederholt. In der Aequatorialrichtung wird die Beobachtungs-Linie sich durch den ganzen Archipelagus der Südsee erstrecken und kann durch einige Punkte an beiden Seiten von Amerika und Afrika verlängert werden, so dass sie in Verbindung mit Ostindien beinahe den ganzen Parallelkreis umfassen wird. Die Anzahl der Punkte in jeder dieser Richtungen muss 15 bis 20 betragen, so dass diese Expedition wenigstens 30 Pendelbeobachtungen für die Bestimmung der Figur der Erde zurückbringen wird.

2) zur Auffindnng vulkanischer Höhlen. Zu diesem Behufe muss man die Vulkane in Kamtschatka, auf den Aleuten, Sandwichinseln, so wie den Pico auf Teneriffa und die Vulkane, die sich etwa in Neuholland finden, benutzen. Es muss der gewählte Vulkan umkreiset und Punkte in der Entfernung vom Crater von etwa 4000 Tois. zu den Pendelversuchen gewählt werden. Findet man sich an einem dieser Punkte über dem Heerde des Vulkans, so ist der Gang des constanten Pendels langsamer als in einem andern Punkte des Parallelkreises. Hat man einen solchen Punkt gefunden, so wird sein geographischer und topographischer Punkt so genau bestimmt, dass künftige Reisende ihn weiterhin wieder finden können, um dieselbe Beobachtung zu wiederholen. Findet sich im Umkreis von 4000 T. kein solcher Punkt, so rücke man in grössere Entfernung vom Vulkan und wiederhole dieselben Versuche; die Entfernung der untersuchten Punkte von einander auf demselben Umkreis muss ungefähr 3000 bis 4000 T. seyn. Indessen ist es möglich, dass der Heerd der Vulkane sich nicht auf der Landseite, sondern auf der See-Seite unter dem Meere befinde, in welchem Falle das Aufsuchen desselben vergeblich

seyn würde. Uebrigens müssen die Experimentatoren nicht müde werden diese Pendelversuche zu wiederholen, da diese Aufgabe für die Physik der Erde eine so grosse Wichtigkeit hat, dass man die Pendelbeobachtungen für die Figur der Erde ihr kaum an die Seite setzen kann.

Höhenmessungen durch das Barometer. Sie werden an dem Mowna Roa und andern Pic's der Sandwichinseln angebracht, da die angegebenen Höhen dieses Berges nicht genau seyn mögen. Die Gränze des ewigen Schnees muss hier gleichfalls durch's Barometer bestimmt werden, wenn eine statt findet. Diese Bestimmung ist Pflicht des Physikers überall wo er hinkommt und dazu Gelegenheit hat. Dies wird wohl der Fall an den blauen Bergen in Neu-Holland seyn. Unsre Reisende werden in Port-Jackson erfahren, ob in dieser Hinsicht schon etwas auf dieser gewaltigen Insel geschehen ist. Die Höhenmessungen und die Bestimmung des ewigen Schnees muss vorzüglich an den vulkanischen Gebirgen Kamtschatkas angewandt werden, so wie auch auf den Bergen der Aleuten.

Die Naturhistoriker werden ersucht, auf ihren Streifzügen am Lande sich mit einem Thermometer zu versehen, um die Temperatur der Quellen genau zu beobachten. Sie muss da genommen werden, wo das Wasser eben den Boden verlässt. Diese Beobachtungen werden über die Wahrheit und Anwendbarkeit der Swonenbergschen Hypothese Licht verbreiten, da sie in so verschiedenen Klimaten angestellt werden. Wo die Naturforscher sich länger aufhalten, muss die Beobachtung täglich geschehen und wo möglich zu verschiedenen Tagszeiten, um sich zu versichern, dass die einmal beobachtete Temperatur der Quellen wenigstens die Beobachtungstage hindurch constant ist.

Die Expedition wird die Behringsstrasse passiren, theils in Beziehung auf Ortsbestimmungen, theils auch um endlich eine genaue Analyse des *Polar-Eises* zu liefern. Diese Eismassen, die theils auf dem Lande und mitten im Meere fest aufgethürmt sind, theils im Meere umherschwimmen, müssen als ein Felsgebäude betrachtet und geognostisch behandelt werden. Man muss die Textur, die Structur, die Lagerung und alle übrigen Umstände beobachten die man bei dem Felsgebäude

der Erde beobachtet. An Ort und Stelle müssen Stücke dieses Eises von vielerlei Stellen, die nicht im Seewasser gelegen, auch Seesalz geprüft werden. Das salpetersaure Silber wird die Minima dieses Salzes anzeigen. Das Resultat dieser Prüfung wird über den Ursprung des Polareises entscheiden. Von diesem Eise werden verschiedene Stücke geschmolzen und in etwa 20 Bouteillen nach Europa zurückgebracht.

In demselben hohen Norden werden *die Nordlichter* in jeder Rücksicht beobachtet werden. Besonders aber wird dem Physiker und Astronomen empfohlen, sich zu verbinden, um wo möglich durch gleichzeitige Beobachtung einer Krone aus zwei entfernten Punkten ihre Höhe zu bestimmen. Manche Gründe (z. B. das Geräusch) sprechen dafür, dass ein Theil des Phänomens in mässiger Höhe, vielleicht in der Wolkenregion, seinen Sitz habe, indessen ein anderer mehrere Meilen hoch statt habe.

Auf dem Schiffe und am Lande wird ein genaues Journal über alle Versuche und Beobachtungen geführt, nämlich ein Nigrum im Augenblick der einzelnen Beobachtungen, allenfalls mit Bleistift, und ein Mundum, in welchem die Beobachtungen aus dem Nigrum gleich darauf eingetragen werden. Von diesem Journal, das Alles wissenschaftliche in Bezug auf den physikalischen Theil enthalten wird, werden zwei Abschriften, so weit als das Journal selbst reicht, verfertigt; um von den zwei nächst gelegenen Orten nach Europa geschickt zu werden.

Wichtiger aber als alles Obige sind Behutsamkeit in Behandlung der Instrumente, Genauigkeit im Beobachten, Treue im Notiren und Liebe zur Wahrheit überall.

Unterzeichnet: Parrot.

Der Hr. Staatsrath Parrot trug mir keine magnetischen Versuche auf, theils weil er die Masse der Beobachtungen nicht zu sehr vergrössern wollte, theils weil die dazu nöthigen Instrumente in der gegebenen kurzen Zeit weder in Dorpat zu verfertigen noch auch aus dem Auslande zu verschreiben waren, theils endlich weil

mein verehrter Lehrer der Ueberzeugung war und noch ist, dass keine mathemathische Hypothese das Gesetz des Erdmagnetismus in seinen Hauptphänomenen auch nur durch Näherung darzustellen im Stande ist, weil nach ihm ein solches Gesetz nicht statt findet, und man für die Nautik nichts Besseres thun kann, als etwa alle zehn Jahre die Declination der Magnetnadel auf den Hauptpunkten der beschifften Meere mit Sorgfalt und unter Eliminirung der Einwirknng des Eisens auf dem Schiffe zu beobachten und in magnetischen Charten bekannt zu machen. Eine permanente Anordnung von einer oder mehreren grossen schiffahrttreibenden Nationen, um dieses auszuführen, wäre seiner Meinung nach der Schiffahrt ein weit wohlthätigeres Geschenk als alle Hypothesen und Berechnungen über das sogenannte Gesetz des Erdmagnetismus.

Indessen wünschte die kaiserliche Admiralität, dass ich, so oft es thunlich wäre, Versuche über die Inclination der Magnetnadel anstellen möchte; ich erhielt daher in England ein Inclinatorium, welches ich dazu benutzte.

Für alle übrigen Aufgaben mussten neue, grösstentheils noch nicht vorhandene Instrumente verfertigt werden. Die Admiralität ersuchte den Hrn. Staatsrath Parrot gleichfalls darum, der die in folgender Liste enthaltenen unter seinen Augen verfertigen liess:

1) Das Bathometer mit zwei Senkinstrumenten und zwei Seilen, jedes bis auf 3000 T. reichend, nebst einem Gestell. Jedes der beiden Senkinstrumente hat sein Thermometer und ausserdem wird ein drittes Thermometer als Reserve gleichfalls mit dicker Kugel beigegeben.

2) Ein Aräometer, welches das spez. Gewicht der Flüssigkeiten bis auf $\frac{1}{52000}$ sicher liefert und für die Abwägung der festen Punkte dient.

3) Ein Elaterometer fürs Wasser.

4) Ein Elaterometer fürs Quecksilber.

5) Ein Electrometer für die atmosphärische Electricität, nebst einem kleinen Mast zur Erhebung der Metallspitze.

6) Acht Exemplare eines chemischen Instrumentes um Gase unter sich und andre Körper mit Gasen einem hohen Wasserdrucke auszusetzen.

7) Ein Instrument um feste Körper solchem Drucke auszusetzen, nebst Massen von Blei, Zinn, Phosphor, Wachs und Talg.

8) Ein Anthracometer mit Kalkwasser.

9) Ein Phosphoreudiometer.

10) Ein Pendelapparat mit zwei constanten Pendeln und einer astronomischen Uhr, nebst getrennten Gestellen für die Pendel und die Uhr.

11) Vier Reisebarometer.

12) Acht Thermometer, deren einige bei einzelnen Apparaten fixirt, die übrigen aber für jeden unbestimmten Gebrauch aptirt sind. Es wird dabei zur Regel gemacht, dass, obgleich durch die Reductionstabelle alle diese Thermometer eine Sprache führen, dennoch immer dasselbe Subject für eine Reihe gleichartiger Beobachtungen gebraucht werde, ausser wenn durch Unvorsichtigkeit ein Exemplar unbrauchbar geworden.

13) Gase, Reagentien u. s. w. zu den obigen Versuchen, *quantum satis.*

Zu diesen Instrumenten sollten in England kommen.

14) Ein DeLuc'sches Fischbeinhygrometer.

15) Ein Sixt'sches Thermometer.

16) Eine *camera clara* von Wollaston.

17) Mehrere astronomische Instrumente für die Zeitbestimmung, nach dem Vorschlage des Hrn. Prof. Struve.

18) Ein Aräometer von Atkins.

19) Ein Inclinatorium von Dollond.

20) Eine römische Schnellwage fand sich schon vor auf dem Schiffe. Diese letztere sollte dazu dienen bei den Senkversuchen zu erforschen, ob das zuerst herabgelassene Bleigewicht den Boden erreicht habe oder nicht; zu dem Ende wird, wenn das Seil zur beabsichtigten Tiefe herabgelassen worden, die Wage an dem Seile angelegt und untersucht, welches Gewicht zuerst das Heraufziehen bewirkt;

der Unterschied von 40 Pf. wird sich dann merklich kund geben, je nachdem sie noch am Strick hängen oder am Grunde aufruhen.

Die kurze Zeit, die dem Hrn. Staatsrath Parrot zur Verfertigung aller dieser Instrumente gegeben wurde, vom 10. Mai bis zum 10. Juli und eine Geisteskrankheit des einzigen zu seiner Disposition stehenden Mechanikus (den er mit Gewalt aus der Werkstatt entfernen musste, um nur mit den Gehülfen zu thun zu haben und ihre Arbeiten bis ins kleinste Detail selbst zu dirigiren) erschwerten ihm dieses Geschäft sehr, welches ich freilich eifrig mit ihm theilte, ohne jedoch Zeit schaffen zu können. Es ist hier der Ort, dass ich meines Theils meinem verehrten Lehrer meinen innigsten Dank abstatte für die nicht zu beschreibende Mühe, die er sich für unsere Expedition gegeben. Die gelehrte Welt kennt seine Schriften, sie zeigen, wie eifrig er für die Wissenschaft gearbeitet, allein die Universität zu Dorpat nur weiss es, welche Menge von andern Geschäften ausserdem seine Thätigkeit in Anspruch nahm. Dennoch entzog er sich auch bei dieser Gelegenheit der Wissenschaft nicht, sondern benutzte seine ausgebreiteten Erfahrungen in dieser Sache (das physikalische Kabinet in Dorpat bezeugt sie) dazu, die mir anvertrauten Instrumente so gut anfertigen zu lassen, wie man es bei der Kürze der Zeit kaum erwarten sollte.

Was wir am meisten bedauerten, war die Unmöglichkeit alle Apparate mit Musse prüfen zu können. Namentlich war dieses der Fall mit den vom Professor Parrot erfundenen und in zwei Exemplaren unter sehr thätiger Mitwirkung des berühmten Astronomen Herrn Prof. Struve (der auch an der Instruction für die Pendelversuche Theil genommen hatte) verfertigten constanten Pendeln, welche abgefertigt werden mussten ehe man Zeit gehabt hatte ihren Gang auf der Dorpater Sternwarte zu prüfen und zu bestimmen. Wir hofften in England bei unserer ersten Station diesen Mangel zu ergänzen, welches aber aus weiter unten anzuführenden Gründen nicht geschehen konnte.

Das Bathometer, nächst dem Pendel, das wichtigste Instrument der Expedition konnte zwar vollendet und so weit geprüft werden, dass man seiner vollkommenen

Brauchbarkeit versichert war; aber die Versuche über dessen Temperaturänderung durch die Aenderung der Temperatur des Mittels, in welchem es bewegt wird, konnten nicht mehr angestellt werden. Sie wurden es aber auf der Rückreise sehr vollständig, so dass die Sprache dieses Instrumentes in Beziehung auf die Temperatur des Meeres in der Tiefe vollkommen berichtiget ist.

So ausgerüstet, obgleich in Eile, mit Aufgaben und Instrumenten traten wir unsre Reise mit den schönsten Hoffnungen an, überzeugt, dass der merkantilische Auftrag, den unser Schiff hatte, nur Nebensache, die Wissenschaft aber die Hauptsache sey. Allein bald nach unserer Abreise wurden wir durch Hrn. v. KOTZEBUE von dem Gegentheil unterrichtet und in Kamtschatka ward uns darüber eine schriftliche Bekanntmachung vorgelesen. Bestürzt, aber dennoch dankbar für das Wenige, welches diese Veränderung unserer Bestimmung uns übrig liess, liessen wir den Muth nicht sinken, sondern beschlossen alle unsre Kräfte und jeden günstigen Augenblick, den das Schicksal uns schenken würde, der Wissenschaft redlich zu weihen. Wenn daher die Resultate den Hoffnungen unserer geliebten Lehrer, den Wünschen der verehrten Beförderer des Wissenschaftlichen an dieser Reise und den Erwartungen des gelehrten Publikums nicht entsprechen, so wünsche ich für meinen Theil durch vorliegende Arbeit den Beweis zu führen, dass es nicht an meinem Eifer gelegen, und hoffe, dass die Wissenschaft doch auch einigen Gewinn davon ziehen werde.

Schon in England erfuhren wir die Folgen der anbefohlenen Eile schmerzlich, als wir in Portsmouth unseren Pendelapparat zu den ersten Versuchen aufstellten. Kapitain KOTZEBUE und der Astronom der Expedition, Hr. PREUSS, waren nämlich nach London gereist um die noch fehlenden Instrumente, namentlich für die Zeitbestimmung dort einzukaufen, aber an demselben Tage, als diese anlangten, mussten die Anker gelichtet und unser Pendelapparat ungebraucht wieder eingepackt werden. Dadurch ward uns die Möglichkeit genommen die Unveränderlichkeit unserer Pendel während der Reise durch Vergleichung der Anzahl ihrer Schwin-

gungen vor und nach derselben an einem und demselben Orte zu beweisen. Jedoch hoffen wir, dass man sich auf die Festigkeit seines Baues verlassen kann.

Zum Unglück fand Hr. v. KOTZEBUE in London keinen fertigen brauchbaren Sixtischen Thermometer, dessen Resultate mit denen des Thermometers im Bathometer verglichen werden sollten, so dass wir auf diese Vergleichung Verzicht leisten mussten. Der gleichfalls in London gekaufte Fischbeinhygrometer war so träge, dass er auf der ganzen Reise keine grösseren Unterschiede als von 8 Graden anzeigte, obgleich wir doch in den Tropen und im Norden die höchsten Grade von natürlicher Trockenheit und Feuchtigkeit erlebt haben müssen. Ich nahm daher Anstand meine Beobachtungen mit diesem Instrumente mitzutheilen.

Auch auf die bathometrischen Versuche hatte die anbefohlene Eile auf der Hin- und Herreise einen verderblichen Einfluss. Man weiss, dass diese Versuche in den grössten Meerestiefen vollkommne Windstille voraussetzen; der wissenschaftliche Zweck erfordert, dass das Schiff die Orte aufsuche, wo sie am meisten vorfallen und am längsten dauern. Allein wir mussten sie entweder vermeiden oder so schnell als möglich durchschiffen um den Windstillen zu entgehen, die, ausser der Zögerung des Laufs des Schiffs, der Gesundheit der Mannschaft schädlich sein sollen.

Noch bin ich schuldig Rechenschaft darüber zu geben, warum ich die Pendelversuche, für welche Hr. PREUSS die Zeitbestimmung gefälligst übernommen hatte, hier nicht liefere. Gleich nach unserer Zurückkunft übergab ich der erlauchten Kaiserlichen Admiralität die Instrumente so wie sie im Schiffe eingepackt waren und eilte meiner Vaterstadt Dorpat zu, in die Arme meiner Familie, wo ich den Rest des Jahres benutzte mich unter Leitung des Hrn. Prof. OSANN in der Chemie zu vervollkommen. Im Januar 1826 kam ich nach St. Petersburg und erbat mir den Gebrauch der Instrumente, theils um ihren Gang zu berichtigen, theils um mit einigen derselben die weiter unten erwähnten Versuche anzustellen. Formalitäten verzögerten bis in den September die Ablieferung, da ich denn erst den Pendelapparat nach Dorpat schicken konnte, um dort den Gang der Uhren zu prüfen und die Aus-

dehnung der beiden Pendel für verschiedene Temperaturen zu bestimmen. Prof. STRUVE selbst wollte diese Berichtigungen anstellen, allein er wurde anfangs durch seine Gradmessung, die sich damals grade ihrem Ende nahete, später aber durch einen Beinbruch, die Folge eines unglücklichen Falles, und durch die dadurch angehäuften so zahlreichen anderweitigen Geschäfte verhindert, diese Arbeit bis jetzt zu beginneu. In einem Briefe an den Hrn. Staatsrath PARROT verspricht er aber sie im nächsten Sommer zu vollenden, indem der nächste Winter ihm dazu das verlangte Minimum der Temperatur liefern soll. Die zahlreichen mühsamen Berechnungen werden dann wenigstens ein volles Jahr hinnehmen, besonders da ich indessen durch meine erfolgte Anstellung bei der Akademie der Wissenschaften durch mannichfaltige andre Arbeiten verhindert werden dürfte, mich ganz dieser Arbeit hinzugeben. Auf diese Art ist es nicht abzusehen, dass die Pendelversuche vor 2 bis 3 Jahren vollkommen berechnet und zu Ende geführt seyn werden.

Zum Schluss erfülle ich die angenehme Pflicht meinem gewesenen Chef, dem Capit. v. KOTZEBUE den Dank abzustatten, den ich ihm in so hohem Grade schuldig bin, theils für die nachsichtige Behandlung, durch die er mir, dem zum ersten Mal in den Dienst Getretenem, die Strenge der Schiffsgesetze weniger drückend zu machen wusste, dann aber vorzüglich für die Hülfe, die er mir für meine Versuche, so oft es nur der sonstige Zweck der Reise erlaubte, stets aufs bereitwilligste zukommen liess. Es ist überhaupt angenehm eine Reise, wie die unsrige, unter einem Chef gemacht zu haben, dessen Namen in Europa so wohl dekannt ist.

ÜBER DAS WASSER DES WELTMEERES IN VERSCHIEDENEN TIEFEN

in Rücksicht auf die Temperatur und den Salzgehalt.

Drei Instrumente giebt es bis jetzt, die den Seefahrern und Naturforschern zur Ausmittelung der Temperatur des Meeres in verschiedenen Tiefen gedient haben. Jedem derselben wird von dem, der es brauchte, der Vorzug vor den übrigen eingeräumt; wir wollen sehen, mit welchem Rechte, und damit auch zugleich die Wahl unseres Instrumentes rechtfertigen.

1) Zuerst betrachten wir ein Instrument, wie es von Péron gebraucht ward; es besteht aus einem einfachen Thermometer, welches mit abwechselnden Schichten schlechter Leiter umgeben ist. Da die Brauchbarkeit dieses Instrumentes davon abhängt, dass die Substanzen schlecht leiten, so ist es begreiflich, dass man es sehr lange in der untersten kältesten Region, deren Temperatur es eigentlich anzeigen soll, hängen lassen muss; eine Bedingung, die der Seefahrer selten im Stande ist zu erfüllen, weil die dazu erforderliche völlige Windstille nicht so häufig ist, als man vielleicht denkt. Zweitens aber wird das Resultat höchst ungewiss durch die beim Heraufziehen statt findende Erwärmung. So lange die dahin gehörige Correctur nicht auf irgend eine Art bestimmt wird, werden die Resultate immer wenig Zutrauen einflössen. Bei Péron's Versuch auf 2144 Fuss dauerte das Hinunterlassen und Hängen in der grössten Tiefe zusammen 75 Minuten, das Hinaufziehen aber 45. Nimmt man an, dass das Hinunterlassen eben so schnell geschah als das Heraufziehen (was sehr wahrscheinlich ist, da es von keiner Rolle, sondern aus den Händen des Beobachters geschah), so zeigt eine leichte, aber nur ohngefähre, Rechnung, dass man annehmen könne, das Instrument habe 52½ Minuten in der niedrigsten Temperatur gehangen. Das giebt eine Correctur, die die wirklich beobachtete Temperatur von 6° R. auf —8°, 1 heruntersetzt, nach einer Rechnung, derjenigen ganz ähnlich, die man findet in PARROT's Physik der Erde pag. 367; diese Temperatur ist aber nach den Versuchen aller Uebrigen viel zu niedrig. Die Cor-

rectur, wie sie hier nach den von Péron angegebenen Datis angestellt ist, kann daher unmöglich richtig seyn und so lange sie nicht, wie gesagt, durch directe Versuche bestimmt wird, bleibt das Instrument höchst unzuverlässig.

2) Um die Unzuverlässigkeit einer Correctur für die Zeit des Heraufziehens zu vermeiden, ist der Thermometrograph von Sixt ersonnen, ein Instrument, das auf den ersten Anblick, zu seinem Zwecke höchst dienlich zu seyn scheint. Es besteht aus einer gebogenen Thermometerröhre, mit der Kugel und dem andern Ende nach oben, dem gebogenen Theil nach unten. Die thermometrische Substanz ist Weingeist. Den untern Theil in beiden Schenkeln nimmt eine Quecksilbersäule ein und in dem zweiten Schenkel über dem Quecksilber folgt die toricellische Leere. Auf beiden Quecksilberflächen liegt ein kleiner eiserner Schwimmer, der an seiner untern Seite zwei abwärts gehende, nach Aussen geschweifte Haare befestigt hat, die ihn, wenn das Quecksilber unter ihm zurückweicht, verhindern herabzufallen. Auf diese Art zeigt das Instrument die Extreme der höchsten und niedrigsten Temperatur an, durch den Stand des Schwimmers im leeren Raum und im Weingeist. Dieses Instrument wäre seiner Theorie nach allerdings dazu geeignet die genauesten Resultate zu liefern, wenn es möglich wäre in der practischen Ausführung jene zu erreichen. Aber bei der nothwendig grossen Biegsamkeit der Haare ist es wohl einzusehn, wie leicht ein Stoss oder ein plötzlich schnelleres Anziehn des Seils oder eine grössere Glätte des Glases an einer Stelle den auf seinen Härchen ruhenden Schwimmer verrücken könnte. Der zweite Umstand, nämlich das schnellere Anziehen, kann um so leichter statt finden, da bis auf unsere Versuche die früheren unseres Wissens nie so angestellt wurden, dass das Seil auf einer Rolle gleichmässig aufgewunden, sondern durch die Hände der Matrosen ruckweise heraufgezogen wurde. Dann aber scheint uns ein anderer Umstand sehr der Erwägung werth, weshalb der Thermometrograph, für den hier hauptsächlich berücksichtigten Gebrauch zur Bestimmung der Temperatur in verschiedenen Tiefen des Meeres, nicht eigentlich geschickt ist. Das ist nämlich der, dass das Instrument nur die Extreme der Temperatur anzeigt. Wenn es ausgemacht wäre, dass die Temperatur des Weltmeeres regelmässig ohne Ausnahme

mit der Tiefe abnähme, so wäre von dieser Seite gegen das Instrument nichts einzuwenden; allein wer bürgt uns dafür? *) Die mit andern Instrumenten als dem Thermometrographen angestellten Beobachtungen sind bis auf die unsrigen alle isolirt und reichen nur bis auf unbedeutende Tiefen, aus ihnen lässt sich also nichts schliessen. Wenn nun aber wirklich das Weltmeer von irgend einem Punkte der Tiefe aus wieder wärmer würde, so wird das Sixtthermometer diese zunehmende Temperatur keinesweges anzeigen, denn der die niedrigste Temperatur anzeigende Schwimmer würde seinen Stand, wie er auf dem Wendepunkte der Temperatur war, behalten und immer nur die Temperatur dieser Tiefe anzeigen. Unsre Versuche haben nun zwar gezeigt, dass bis auf 1000 T. die Temperatur beständig abnimmt, und dass daher der Einwand gegen den Sixtthermometer bis zu dieser Tiefe wegfällt, aber eben deshalb müssen die Versuche mit andern Instrumenten vorausgehen; die unsrigen haben erst bewiesen dass der Sixtthermometer bis auf 1000 T. gebraucht werden dürfe, aber noch nicht weiter. Uebrigens war es unser Vorsatz den Thermometrographen mit unserm Instrumente zu verbinden, wie man aus der Instruction ersehen kann, damit beide Angaben sich gegenseitig bestätigen möchten, allein bei unserer Ankunft in London konnte Hr. v. Kotzebue kein brauchbares Instrument fertig finden und mit einem unzuverlässigen sich zu versehen, hiesse nur die Resultate ungewisser machen.

3) Ein drittes Instrument zur Bestimmung der Temperatur in der Tiefe ist das von Hales angegebene. Es besteht aus einem hohlen Cylinder, der oben und un-

---

*) Man möchte vielleicht antworten, die Theorie; denn das wärmere Wasser müsste ja hinaufsteigen; allein erstlich könnte ja die grössere Leichtigkeit der Wassertheilchen durch die Wärme, durch grösseren Salzgehalt und grösseren Druck compensirt werden; zweitens aber hat zwar noch neulich Dr. Ermann jun. (Poggend. 1828. 3.) gezeigt, dass das Meerwasser keine Temperatur der grössten Dichtigkeit hat bis zu seinem Frierpunkt, allein hier kann es nicht frieren durch den grossen Druck unter welchem es steht (vergl. Parrot, Phys. d. Erde p. 368.), und wie das spezif. Gewicht des unter dem Frierpunkt erkälteten Wassers sich verhält, ob es da nicht ein Maximum der Dichtigkeit gäbe, darüber sind wir noch ganz ungewiss. Diese Betrachtungen erhalten durch die Beobachtung eines Engländers, der im indischen Ocean das Wasser in der Tiefe wärmer gefunden haben will, einige Bestätigung, wie auch durch die Beobachtungen in den Polarmeeren.

ten durch zwei sich nach oben öffnende kreisförmige Ventile geschlossen ist. Beim Hinuntersinken öffnen sich dieselben durch das unten andringende Wasser und lassen demselben freien Durchfluss, beim Heraufziehen erfolgt der Druck von oben, die Ventile schliessen sich und man bekommt das Wasser der Region herauf in der man das Instrument anhielt. Das ist die einfache Idee des Erfinders. Sie gewährt den grossen Vortheil, dass man zugleich eine Portion Wasser heraufbekömmt zu anderweitiger Bestimmung desselben, als z. B. seinem Salzgehalte nach. Horner (Reise um die Welt von Kap. Krusenstern 3. Th. pag. 131) macht gegen dieses Instrument folgende Einwendungen:

„Die Schwierigkeit gut schliessende Ventile zu machen und besonders der Um-„stand, dass ein Körper von solchem Widerstand und Gewicht nicht leicht ohne „Unterbrechung und Stillstand aus einer Tiefe von ein Paar Hundert Faden her-„aufgezogen werden kann, wozu noch die Schwankungen des Schiffs auf eine un-„vermeidliche Art beitragen, vermindern das Brauchbare dieses Werkzeugs sehr. „Auch wird in dem Zeitraum von 5 — 10 Minuten, welche zum Heraufziehen „verwandt werden, das eingeschlossene Wasser schwerlich seine ursprüngliche Tem-„peratur unverändert behalten, wofern nicht der Cylinder mit Substanzen umge-„ben ist, die die Wärme schlecht leiten, was jedoch das Volumen der Maschine „auf eine nachtheilige Art vergrössern würde; und selbst bei der besten Umwicke-„lung und Verschliessung wird man immer bloss Wahrscheinlichkeit statt der Ge-„wissheit haben, dass das Thermometer sich gar nicht geändert habe.“ Hierauf bezeugt er seine Verwundrung, „dass selbst neuere Naturforscher sich mit die-„sem unsichern Werkzeug behelfen konnten, da man so lange im Besitz des Ther-„mometrographen ist, welcher mehr als blosses Spielwerk ist.“

Wir haben hier die eigenen Worte Horners ausführlich hingesetzt, weil sie wirklich alle Einwendungen enthalten, die gegen diese Art von Instrument gemacht werden können. Das von uns gebrauchte ist der Idee nach dasselbe; wie es aber construirt ist, um die gröstmöglichste Genauigkeit der Resultate zu liefern, das wird am Besten eine ausführliche Beschreibung desselben zeigen und man wird da-

durch in den Stand gesetzt werden zu beurtheilen in wiefern die Einwendungen HORNERS auf dasselbe passen.

Der uns anvertraute Bathometer ist die Erfindung des Hrn. Staatsraths **PARROT** und unter seinen Augen verfertigt; alle Berichtigungen an demselben sind von uns nach seiner Angabe und meist in seinem Beiseyn angestellt worden.

Das Instrument fasst 64 Pf. Wasser zu 14 Unz. Medicinalgewicht. Diese grosse Wassermasse verschafft schon den Vortheil, dass während des Heraufziehens das Wasser sich nicht so leicht erwärmt als im Hales'schen kleinen Instrumente, da der Cubikinhalt in schnellerer Proportion zunimmt als die Oberfläche; es kommt alsdann darauf an, diese Wassermasse so zu umgeben, dass sie beim Heraufziehen die wenigste Wärme annehme und sich nicht mit den höheren Wasserschichten vermische.

Die Zeichnung (Tab. I. Fig. 1.) zeigt den Mechanismus des Bathometers im vierten Theil der natürlichen Grösse, wie er in zwei vollkommen gleichen Exemplaren zu unserer Expedition verfertigt wurde; *aaaa* ist der hohle Raum des Instruments, 16″ hoch und 11″ im Durchmesser (nach dem Pariser Maasse, wie alle Angaben in gegenwärtiger Abhandlung, wenn es nicht ausdrücklich anders erwähnt wird), welcher durch die cylindrische Hülle von der Höhe *h′h′* und dem Durchmesser *hh′* entsteht. — Diese Hülle ist von verzinntem sogenannten Arschinenblech, dessen Dicke $\frac{1}{4}'''$ beträgt und das 1 Arschin (28″ englisch) im Quadrat gross ist. Zwei messingene Grundflächen *acca* und *bb* begränzen diesen Raum und tragen die Klappen *bccb* und *dced*. Beide sind an der eisernen Stange *ff* befestigt, so dass sie sich nur zusammen heben oder senken können. Diese Befestigung geschieht durch Anlöthung der Stange an den Böden der Klappen *ee* und *bb* und an den blechernen Kreuzstreifen *cc* und *dd*. Die Klappen sind conische Schaalen, welche in andere Schaalen passen, die dadurch entstehen, dass man die Böden *acca* und *bb* in der Mitte keilförmig ausschneidet und die conischen Wände *bcbc* und *dede* am Rande aufsetzt. Dabei ist zu bemerken, dass sowohl die Klappen als die Böden, worin sie passen sollen, gegossen sind, jedes aus einem Stück.

Das gewalzte Messing verträgt die Schleifung nicht, welche die krummen Flächen erfahren müssen um gehörig zu schliessen. Die beiden Klappen sind ungleich, weil die untere durch die Bodenklappe der obern durchgehen soll; der kleinere Durchmesser der untern hat 5″, der der obern 7″. Die Dreieckchen von Blech bei *h′* und *h* und *a* und *a*, deren vier oben und vier unten angebracht sind, dienen zur Befestigung der Hülsen, in welchen die Klappen liegen, an der Peripherie des Gefässes durch Löthung.

An der eisernen Stange *ff* wird der Thermometer *gg* angeschraubt, so dass dessen Kugel nicht weit von der untern Klappe zu stehn kommt, weil, wenn eine Erwärmung statt findet, die kälteste, also die der wahren Temperatur näher stehende Schicht, am tiefsten liegt. Da das Instrument bestimmt war, wo möglich auf 3000 T. zu sinken, so konnte man sich auf die gewöhnlichen Thermometerkugeln von dünnem Glase nicht verlassen. Daher wurden besondere Thermometer verfertigt, deren Kugeln ½‴ Glasdicke hatten. Obgleich dadurch die Mittheilung der Wärme etwas verzögert wurde, so hat dies keinen Einfluss, da das Instrument immer ¼ Stunde in der Tiefe hing und der Thermometer bereits bedeutend erkältet dort ankam. Beim Herausziehen und Ablesen der Temperatur gereicht diese Unempfindlichkeit aber eher zum Vortheil als zum Nachtheil.

Um die Stange in vertikaler Richtung in der Axe des Instruments zu erhalten sind zwei durchlöcherte eiserne Stangen angebracht, die eine unten bei *kk*, die andere steht auf der gezeichneten Ebene senkrecht und befindet sich oben durch die punktirte Linie *oo* angedeutet, die man um 90° gedreht denken muss.

Der bis jetzt beschriebene Mechanismus bedingt bereits die Möglichkeit einer freien Bewegung der Klappen auf und ab, und ein gleichzeitiges Einschliessen der Wassermasse *aaaa*. Das wirkliche Oeffnen und Schliessen geschieht durch nichts anderes als den Widerstand des Wassers beim Hinunterlassen und Heraufziehn um nun zu bewirken, dass es stets zu rechter Zeit und unfehlbar eintreffe, müssen die Klappen gewichtlos seyn. Am einfachsten würde dies eine an der Stange *ff* angebrachte hohle messingene Kugel bewirken. Allein das Instrument sollte bis

auf 3000 T. hinuntergehn und daher einen Widerstand von etwa 600 Atmosphären aushalten und da zeigt die Rechnung, dass die Kugel, wenn sie nicht unverhältnissmässig gross und schwer seyn soll, diesen Druck nicht aushalten würde. Denn wenn man 1‴ für die Messingdicke der Kugel annimmt, so giebt bie Rechnung den erforderlichen Durchmesser = $8\frac{1}{2}''$; die halbe Oberfläche also von 113 Quadratzoll müsste auf jeder Seite einen hydrostatischen Druck von 1100 Kubikfuss Quecksilber aushalten, welchem sie nicht widerstehn könnte. Der berechnete Durchmesser = $8\frac{1}{2}''$ ist der, bei welchem die Kugel sich schwimmend erhalten könnte; um noch das Gewicht der Klappen zu tragen, müsste er noch grösser seyn. Es ist abzusehn bei welcher Dicke das Messing Widerstand leisten könnte, da der Durchmesser mit der Metalldicke wachsen muss, doch so dass die Widerstandsfähigkeit wie der Kubus der Dicke, und der wirklich zu leistende Widerstand wie das Quadrat des Durchmessers wächst.

Dagegen kann man ohne alle diese Unbequemlichkeiten die Schwere zu Hülfe nehmen um die Klappen zu äquilibriren und die Berechnung zeigt, dass wenn die grössere Dichtigkeit des Wassers und dessen geringere Temperatur das spez. Gewicht modificirt, der Unterschied, der nur von dem Unterschied der Dichtigkeit der gebrauchten Materien abhängt, mit wenigen hundert Granen aufgewogen ist. Der Mechanismus ist aus der Figur leicht zu ersehen. An die Stange *ff* ist gleich über dem Stege *rr* bei *f* an jeder Seite ein kleiner Ring angelöthet in den die Drähte *fn* mit ihren Endringchen fassen. Die andern Enden derselben bewegen sich frei bei *nn* in den Enden der Hebel *ln*, die auf der andern Seite die mit Blei gefüllten messingenen Linsen *pp* tragen. In Fig. 2 sind dieselben im Querdurchschnitt gezeichnet. Ein leerer Raum bleibt in jeder derselben offen um sie mit Schrot zu justiren. Diese Hebel ruhen mit ihren Axen in einer Gabel (Fig. 3), welche auf dem Stege *rr* angeschraubt ist.

Die Justirung der Gegengewichte geschah im Wasser worin $\frac{1}{38}$ Salz aufgelöst war, so dass die Klappen, deren Gewicht $7\frac{1}{2}$ Pf. war, sich mit einer Ueberwucht von einer halben Unze schliessen, die hinreichend ist um in allen Tiefen bis auf

3000 T. den Einfluss der Kälte und der zunehmenden Verdichtung durch den Druck aufzuwägen. Es fragt sich aber, ob der Widerstand des Wassers durch den Fall hinreichend seyn wird, diese Ueberwucht zu überwinden?

Die Fallgeschwindigkeit, wenn der Beharrungszustand eingetreten ist, sey angenommen = 1′ in der Secunde, so entspricht dies einem Wasserdrucke von beinahe $\frac{1}{5}''$ Höhe. Es ist aber die Basis der untern Klappe = 38,5 Quadratzoll, also der Druck = 7, 3 Kubikzoll Wasser = 4, 93 Unz. Die Erfahrung aber zeigt dass dieser Fall, wenn er am geringsten ist, d. h. in unsern Versuchen nahe bei 1000 T. über 3′ ausmacht, woraus man leicht sieht, wie gross die vorhandene Ueberwucht an Kraft zum Oeffnen ist. Der Schluss geschieht gleichfalls mit einer hinreichenden Kraft um allem Zufälligen zu begegnen. Die Erfahrung zeigte, dass bei 1000 T. zwei Mann das Seil mit 1′,3″ Geschwindigkeit heraufzogen. Die obere Oberfläche der Klappe ist aber = 63,57 Quadratzoll und der der Geschwindigkeit v. 1′,3″ zukommende Wasserdruck ist nahezu $\frac{1}{3}''$ Höhe, also der Druck etwa 21,2 Kubikz. = 14, 1 Unz.

So eingerichtet würde das Spiel der Klappen im Wasser richtig vor sich gehn, allein man würde die Frucht der Arbeit in dem Augenblicke, da das Instrument zu Ende des Versuchs aus dem Wasser heraustritt, verlieren, weil, so wie die Gewichte *pp* über dem Wasser hervorkommen, die Klappen sich öffnen und das im Instrument enthaltene Wasser ins Meer zurückfliessen würde. Denn die Gewichte werden um so viel schwerer als das Gewicht des Wassers ausmacht, dessen Stelle sie einnehmen, da hingegen die Klappen und die Stange noch untertauchen und also nichts an Gewicht zunehmen. Es muss also für den Augenblick ein Auflegegewicht angebracht werden, das aber unter dem Wasser nicht wirke. Ein solches ist ein offenes blechernes Gefäss *ss*, dessen Gewicht als Theil des Gewichtes der Klappen mit in der Justirung begriffen ist. Durch das Hinuntersenken füllt sich dasselbe und beim Herausziehn aus dem Wasser erst drückt das in ihm enthaltene Wasser auf die Klappen. Dieses Gefäss hat die gehörige Grösse, wenn sein Inhalt um $\frac{1}{4}$ grösser ist als die Summe der Volumina der beiden Linsen. Ein messingener Knopf *r* oben an der Stange hält das Gefäss an demselben fest und bildet so ihr letztes Ende.

Ein Bügel in einem Scharnier, dessen Ebene mit der hier gezeichneten rechtwinklich ist, trägt das Ganze. Daher sind der an dem grossen Gefässe angelötheten eisernen Stäbe 4; zwei derselben tragen den Steg *rr* und die theils als Handhabe, theils zum Schutz gegen etwanige Stösse dienenden eisernen Ringe *ww*, die zwei andern tragen einen ähnlichen Steg *oo*, der in der Ebene des Bügels liegt; er ist der schon oben erwähnte mit der punktirten Linie bezeichnete, der mit dem untern *kk* dazu dient, die Stange *ff* in vertikaler Richtung zu halten und sie sich nicht höher heben zu lassen, bis der Ring *ii* an denselben anstösst. Drei ähnliche eiserne Stangen mit unten angeschraubten messingenen Kugeln dienen dem Instrumente zu Füssen.

Es galt endlich die Temperatur des eingeschlossenen Wassers während des Heraufziehens vor dem Einfluss des obern wärmeren Wassers so viel als möglich zu sichern. Luftvolle Räume sind hier nicht anzuwenden, weil der ungeheure Wasserdruck in der Tiefe sie zusammenpressen würde; man hielt sich daher an den in Parrots Grundriss der Physik (Band. II. pag. 30) zuerst aufgestellten Satz, dass die Heterogenität der Substanzen den Durchgang der Wärme verzögert. Dieser Satz wird am angeführten Orte durch die 2 Versuche hinlänglich bewiesen, besonders auffallend im zweiten, wo bei sonst ganz gleichen Umständen eine gleiche Portion Wasser, wenn sie über Wasser liegt, bei Erwärmung des Gefässes schneller an Temperatur steigt, als wenn sie über Quecksilber liegt, obgleich das letztere ein 28 mal besserer Leiter ist, als das Wasser. Aus diesem Satze erklärt sich wie Pelzwerk, Wolle, Strohdächer u. s. w. so gute Wärmehalter sind, weil sie nämlich ihrer Natur nach eine grosse Menge abwechselnder Schichten ihrer Substanz und der Luft der durchdringenden Wärme entgegensetzen. Hiernach nun wurde die ganze Oberfläche unseres Cylinders und der Klappen mit vier abwechselnden Lagen von dünnem Eisenblech und grobem Tuche, das aber zuvor in fast kochender Mischung von Talg und Wachs durch und durch getränkt war, belegt. Oben und unten ward Alles an das Gefäss fest zusammengenäht, mit Leinwand überzogen und mit Oehlfarbe mehrmals überstrichen. Da aber diese Uebergänge nicht so fest

an einander liegen konnten, dass nicht das Wasser sich dazwischen drängt, so bildet dieses eine neue heterogene Substanz, so dass die Wärme 17 Durchgänge durch heterogene Substanzen machen muss, ehe sie das Instrument selbst erreicht.

Das eine Instrument wog in der Luft 84 Pf. 7 Unz. und in Salzwasser von der oben (p. 23) angegebenen Stärke 45 Pf. 7 Unz. Das andere war um 2½ Pf. leichter.

Der Gebrauch unseres Bathometers ist folgender: nachdem man dasselbe an das Seil angeknüpft hat, wird es seinem natürlichen Fall überlassen bis zu der zu erreichenden Tiefe. Dort bleibt es wo möglich eine halbe Stunde (in unseren Versuchen musste diese Zeit aber meistens auf eine Viertelstunde reducirt werden wegen der Unbeständigkeit der totalen Windstille). Dann wird so schnell wie möglich heraufgezogen. Bei der Ankunft des Instruments ist ein blecherner Eimer bereit es zu empfangen; in der Mitte des Bodens hat derselbe eine Erhöhung auf welche die untere Spitze der Stange stösst, ehe die Füsse des Instruments den Boden berühren, dadurch öffnen sich die Klappen von selbst. Vorher aber müssen erst der Steg *rr* und die Schrauben des andern Steges *oo* schnell gelösst werden, damit die Klappen sich herausheben lassen. Der Thermometer wird beobachtet, sobald seine Scala sichtbar geworden. Obgleich derselbe durch das Herausheben an die Luft sich augenblicklich anfangen wird zu erwärmen, so wird diese Erwärmung wiederum compensirt durch die gleichfalls sogleich beginnende Ausdünstung des an der Thermometerkugel hängen gebliebenen Wassers. Der dadurch entstehende Fehler wird also höchst unbedeutend seyn.

Ehe aber das Instrument zur Reise abgegeben wurde, mussten vorzüglich zwei Proben mit demselben gemacht werden; die eine, um sich zu versichern, ob die Klappen wirklich wasserdicht schlossen; die zweite, um den Uebergang der Wärme vorläufig kennen zu lernen und sich zu überzeugsn, ob eine sehr bedeutende Correctur nöthig sey.

Zum Behuf der ersten Aufgabe ward das Instrument in ein grosses mit Wasser gefülltes Fass eingesenkt, alsdann herausgehoben und vier Stunden frei in der Luft aufgehängt. Während dieser vier Stunden verlor es nicht ganz 4 Unz.

Wasser, obgleich das Wasser mit seiner ganzen Druckhöhe zum Ausfluss drängte. Das macht also nicht $\frac{1}{224}$ des Ganzen aus. Da nun bei den Versuchen im Meere nur während des Heraufziehens und nur durch Ungleichheit des spezifischen Gewichtes ein Verlust möglich ist, so sieht man ein, dass dort eigentlich kein Verlust statt finden kann, als derjenige, der durch Dilatation des in die höhere Temperatur heraufgebrachten Wassers entstehen muss, und dass also der Bathometer immer voll von dem aus der grössten Tiefe eingenommenen Wasser bleiben muss.

Für die zweite Probe wurde das obige Fass mit Wasser von 19, 4 C. (der Temperatur der umgebenden Luft) gefüllt, das Instrument hineingetaucht und mit diesem Wasser in sich herausgenommen. Dann würden so lange Eisstücke ins Fass geworfen bis die Temperatur auf 0°, 5 sank, hierauf der Bathometer hineingesenkt, zwei Stunden drin gelassen, herausgenommen und die Temperatur des Wassers drin beobachtet. Sie war 11°, 5, während das umgebende Wasser im Fasse immer auf 0, 5 erhalten wurde. Der Unterschied ist 7°, 9 und würde etwa 3°, 9 gewesen seyn, wenn der Bathometer sich in Wasser von gleichförmig von unten nach oben abnehmender Temperatur bewegt hätte, denn die Erkältung geschieht ungefähr im Verhältniss des Temperaturunterschiedes, wie uns spätere Versuche belehrten.

Somit wäre denn Alles geschehen, was zur Vervollkommnung des Instruments geschehen konnte und es bleibt, nur noch übrig, das Seil und die Maschine, die zum Hinunterlassen desselben diente, zu beschreiben.

Wenn man die Aeusserungen der Seeleute über die Schwierigkeit lange Seile aus dem Wasser zu ziehen liest und hört, so möchte man verzweifeln auch nur 1000 T. in die Meerestiefe hinabzureichen. Zum Glück liegt der grosse Widerstand, den sie dabei erfahren haben, nicht, wie sie wähnen, in der Friction des Seils gegen das Wasser, denn sonst würde sich unser Bathometer nicht mit 3′ in der Secunde bei 1000 T. Tiefe senken, da die Friction für die Bewegung abwärts dieselbe seyn muss, als für die Bewegung aufwärts. Im ersten Falle

wird diese Friction durch das Gewicht des bewegten Körpers und des Seils selbst überwunden und dieses Letztere ist ⅓ des Gewichtes des trockenen Seils. Warum sollte sie nicht mit derselben Kraft aufwärts überwunden werden können, um so mehr, da das Heraufziehen nicht leicht mit mehr als 2′ Geschwindigkeit geschehn kann? Die Ursache, warum sie es in der That nicht wird, ist die auf dem Schiffe allgemein übliche Art des Aufziehens von Lasten, nämlich ruckweise, wobei Last und Seil nach jedem Rucke nicht nur stille stehen, sondern um etwas zurückfallen, und also bei jedem Zuge nicht nur die Trägheit des Gewichtes, des Seils und des durch Friction aufwärts geschleppten Wassers, sondern auch ein Anfang von entgegengesetzter Bewegung überwunden werden muss, ein Widerstand, der in manchen Fällen, besonders da man sehr rasch aufziehen will, das Zehnfache des natürlichen Widerstandes ausmachen mag. Die Möglichkeit, jede Tiefe im Meere zu erreichen und das Seil ohne dass es reisst heraufzuziehen beruht also darauf, dass das Heraufziehen in gleichmässiger stäter Bewegung geschehe und daher ward das Seil auf eine grosse Spuhle von 2′, 2″ Länge und 2′ Durchmesser im Lichten aufgewunden. Man vergleiche hierzu die zweite Tafel, wo Fig. 1 das Gestell von der Seite, und Fig. 2 von oben gesehen, darstellt. Die Spuhle ruhte mit ihren zwei Zapfen auf einem verhältnissmässigen Gestell, welches zwei lange und schräg hinauflaufende Arme *ab*, *a′b′* und eine lange Rolle *bb′* zwischen beiden trug, die über Bord hinausreichte und über welche das Seil hinrollte. Das ganze Gestell bewegt sich auf einer Axe *c* und zwei Rollen *d* und *f*, um nach Belieben die lange Rolle *bb′* über den Bord hinaus und wiederum zurück zu bewegen. Die Spuhle hat an jedem ihrer Backen eine besondere Vorrichtung zum Halten, an dem einen äusserlich eine prismatische Rinne *kkk* (Fig. 2), in die mittelst eines Hebels *m′m* ein Seil *mn* (Fig. 1) eingedrückt werden kann, um so durch Friction die Bewegung zu mildern; am andern aber Zähne (*l,l,l*) und einen Haken *oo* um die Bewegung ganz zu hemmen. Zwei Kurbeln *pp′* (Fig. 2), unter 108° ihrer Ebenen an den Zapfen der Spuhle angebracht, machten es möglich 1 bis 4 Mann zum Aufwinden zu gebrauchen.

Wenn es Tiefen von 3000 T. gilt, bis zu welchen unser Instrument eingerichtet war, so durfte das Seil nicht dicker und schwerer genommen werden als nöthig ist, weil man sonst um Raum und Kraft zur Handhabung desselben verlegen ist. Es musste daher eine Untersuchung über das Gewicht und die Tragkraft der Seile im Wasser angestellt werden, wobei zum Grundsatz angenommen wurde, dass, bei jeder Länge und in jeder denkbaren Station im Heraufziehen, des Seiles Tragkraft das Vierfache des zu überwindenden Widerstandes ausmachen müsse, damit, wenn das Seil durch den Gebrauch und das häufige Nasswerden etwas von seiner Stärke verloren habe, es noch immer im Verlauf von 3 bis 4 Jahren stark genug bleibe. Es wurden also 3 nichtgetheerte Seile, jedes von 1000 T. Länge genommen, deren Stärke dem Gewicht proportioniert war, welches jedes zu tragen hatte, da das erste nur das Instrument und sich selbst, das zweite ausserdem seine eigene Last und das dritte wiederum noch die seinige zu tragen hatte. Die Abwägung des Seils zeigt folgende Tabelle:

N°. 1	war trocken 6′ lang und wog	484	Gr. med. Gew.; ganz durchnässt	647,5;	im Wasser 161,5
N°. 2	— — — — —	610	— — — — —	818,5	— — 204,0
N°. 3	— — — — —	1028	— — — — —	1379,0	— — 341,5

folglich wog das ganze Seil trocken etwa 316 Pf. und nass im Wasser 105 Pf. 4,5 Unzen.

Es ergiebt sich aus diesen Proben, so wie aus mehreren andern, die angewandt wurden, bis man das schickliche Verhältniss der Stärke erreichte, dass ein Seil, welches sich mit Wasser vollgesogen hat, im Wasser nur $\frac{1}{3}$ seines Gewichtes im trocknen Zustande hat, und dass dieses Gewicht im Wasser dem des eingezogenen Wassers gleichgeschätzt werden muss, woraus zu schliessen ist, dass ein trockenes Seil beiläufig das spez. Gewicht des Wassers hat.

Ein hanfenes Seil verkürzt sich bekanntlich durch das Nasswerden und dehnt sich durch angehängte Gewichte wiederum aus. Diese Veränderung der Länge ist für die Schätzung der erreichten Tiefen sehr wichtig und musste also bestimmt werden. Daher wurden Probestücke im trockenen Zustande gemessen,

dann mit Wasser vollkommen getränkt, wieder gemessen und endlich mit dem Gewichte behangen, welches das Seil, von 200 zu 200 T. gerechnet, zu tragen hat. So ergab sich denn, dass die drei Seile zusammengenommen eine Reckung von $213\frac{5}{6}$ T. auf eine Länge von 2800 T. erfahren, mithin dass, wenn man 2800 gezählt hat, man in der That eine Tiefe von $3013\frac{5}{6}$ T. erreichte. Jedoch wurden mehr als 3000 T. genommen, damit in dem Falle, dass das Schiff nicht ganz stille stehe, sondern mit dem obern Wasser getrieben würde, es nicht an Seil fehle, um die ganze vertikale Tiefe von 3000 T. zu erreichen.

Um aber die Länge des Seils genau zu messen, wurde eine besondere Vorrichtung verfertigt, wodurch das ganze aus Einem Stück bestehende Seil über ein sehr genaues Maass von 6 T. gespannt wurde und zwar N°. 1 mit 4 Pf., N°. 2 mit 6 Pf. und N°. 3 mit 8 Pf. Diese Vorrichtung bestand aus einem gleicharmigen Winkelhebel, dessen vertikaler Arm das Ende des abzumessenden Strickes fasste, während am horizontalen das spannende Gewicht hing.

Nummern wurden von 10 zu 10 T. angenäht, die 100 und 1000 T. durch die Farbe der Nummern unterschieden und die einzelnen Tois. durch durchgezogene Faden bezeichnet. Um endlich überzeugt zu seyn, dass das Seil nicht einzelne dünne Stellen enthalte, wurde es in seiner ganzen Länge durch eine Art Proportionalzirkel gezogen, wodurch die Unterschiede der Dicke verzwölffacht an einem Zeiger über einem Maassstabe abgelesen wurden. Mehrere besonders dünne Stellen wurden ausgeschnitten und das Seil wieder zusammengeflochten.

Wenn alle diese Vorsichtsmaassregeln gehörig beobachtet werden, so ist einzusehn, dass die oben (pag. 239) gemachten Einwendungen Horners gegen diese Art von Instrument bei dem unsrigen wegfallen und dass überhaupt bis jetzt kein so vollkommnes existirt habe. Sein erster Einwurf wegen unvollkommner Schliessung der Ventile, wird durch den angeführten Versuch hierüber (pag. 245)

entkräftet, dessen Resultat nichts zu wünschen übrig lässt; das unregelmässige Heraufziehen findet gleichfalls nicht statt, wie es sonst wohl der Fall war, wegen der (pag. 246) angeführten Einrichtung des Aufwindens auf eine Spuhle durch Kurbeln. Sein letzter Einwurf, man bekäme die Temperatur nicht sicher, ist allerdings richtig, allein wenn man die in dem Folgenden gezeigte Correctur anbringt, so wird auch diese Ungewissheit unbedeutend und auf jeden Fall geringer, als beim Sixtthermometer, denn sie hängt wenigstens nicht vom Zufall ab, wie bei diesem.

Nur durch genaue Beschreibung aller einzelnen Vorsichtsmaassregeln, die bei der Construction unseres Bathometers angewandt wurden, glauben wir uns berechtigt für die nun folgenden wirklichen Versuche auf vollkommnes Vertrauen Anspruch machen zu können, als seyen sie der wahre Ausspruch der Natur.

Bei der nun folgenden Reihe von Versuchen bemerken wir, dass wir ausser diesen Beobachtungen noch eine Reihe in unserem Tagebuche angeführt finden, die erste von Allen. Allein aus mehreren Gründen haben wir Ursache an ihrer Genauigkeit zu zweifeln, besonders weil uns die Manipulationen beim Heraufziehen über Bord noch nicht recht geläufig waren. Wir mussten nämlich dabei eine Aenderung vornehmen, da die beiden Arme, die bei unserm Gestell (Tab. II. *ab* und *a'b'*) die Rolle tragen, über die das Seil läuft, zu kurz waren, so dass das Seil nicht am Bauch des Schiffs vorbei kam. Wir zogen es daher über eine Rolle des Raa's des Mittelmastes. Dieses hatte aber durch den weiten Abstand vom Bord manche Schwierigkeit beim Heraufziehen, so dass wir diese erste Reihe nur als Probeversuch ansehen und sie daher in der folgenden Tabelle nicht anführen.

Zeit der Beobacht.	Geogr. Lage des Ortes d. Beob. Breite.	Länge v. Greenw.	Tiefe in Toisen	Winkel des Seils mit d. Vertikal.	Angezeigte Temperat.	Zeit des Heraufz.	Bemerkungen
10. Oct.	7° 20 N.	21° 59. W.	0	— —	25, 8 C.	—	
1823	— —	— —	500	0	5, 0 C.	30′	mit dem Instrument N°. 1.
18. May	21° 14 N.	196° 1 W.	0	— —	26, 4 C.	—	v. nun an sind d.
1824	— —	— —	979	25°	4, 6 C.	56′	Beob. alle m. N°. 2 angestellt.
	— —	— —	649	10°	4, 9 C.	32′	Zeit d. Häng. 10′
	— —	— —	399	0°	5, 1 C.	17′	Zeit d. Häng. 10′
	— —	— —	139	10°	16, 7 C.	6′	
8. Febr.	25° 6 N.	156° 58′ W.	0	— —	21, 5 C.	—	
1825	— —	— —	179	25°	14, 0 C.	3′	Zeit d. Häng. 2′
24. Aug.	41° 12 N.	141° 58 W.	0	— —	19, 2 C.	—	
1825	— —	— —	199	0	5, 9 C.	10′	
	— —	— —	525	20°	3, 4 C.	25′	
31. Aug.	32° 6′ N.	136° 48′ W.	0	— —	21,45 C.	—	
1825	— —	— —	89	10°	13.54 C.	4′	
	— —	— —	229	25°	7,06 C.	8′	
	— —	— —	479	25°	4,75 C.	15′	
	— —	— —	579	10°	3,56 C.	19′	
6. März	32° 20′ N.	42° 30′ W.	0	— —	20,86 C.	—	
1826	— —	— —	969	5° 10°	3,92 C.	50′	
24. März	45° 53′ N.	15° 17′ W.	0	— —	14,64 C.	—	
1826	— —	— —	192	0	10,56 C.	9′	
	— —	— —	383	0	10, 2 C.	13′	Zeit d. Häng. 8′

Die Zeit des Hängens war in allen den Fällen, wo nichts bemerkt ist = 15′

In dieser hier vorliegenden Tabelle ist Alles so gegeben, wie es sich unmittelbar durch die Anschauung bei dem Versuche erwies, nur in der sechsten Columne sind die Temperaturen bereits nach der Correctionsliste der Thermometer

corrigirt hingesetzt. Diese Correctionsliste ist nach Vergleichung mit einem Thermometer für die übrigen verfertigt, dieser eine aber durch Abtrennung und allmähliges Fortrücken eines Quecksilbersäulchens berichtigt. Es ergab sich aus diesem allmähligen Fortschreiten die nachfolgende Tabelle, wo für Bezeichnung der Grade, bei welchem das Säulchen sich jedesmal befand, immer der des obern, nach dem Siedpunkt zugewandten, Endes des Säulchens gewählt ward.*)

Wenn d. obere Ende des Säulchens auf	95°,00	stand, war d. Länge desselb.	= 16°,80
— — — — — — —	89, 90	— — — — —	= 16, 70
— — — — — — —	84, 80	— — — — —	= 16, 70
— — — — — — —	80, 00	— — — — —	= 16, 70
— — — — — — —	74, 70	— — — — —	= 16, 65
— — — — — — —	70, 10	— — — — —	= 16, 60
— — — — — — —	64, 85	— — — — —	= 16, 55
— — — — — — —	59, 70	— — — — —	= 16, 50
— — — — — — —	54, 90	— — — — —	= 16, 40
— — — — — — —	49, 80	— — — — —	= 16, 40
— — — — — — —	44, 90	— — — — —	= 16, 40
— — — — — — —	40, 20	— — — — —	= 16, 40
— — — — — — —	34, 10	— — — — —	= 16, 30
— — — — — — —	30, 00	— — — — —	= 16, 30
— — — — — — —	24, 70	— — — — —	= 16, 20
— — — — — — —	95, 00	— — — — —	= 16, 80

Wir wollen sehen, wie sich diese Tabelle mit der Rechnung vergleicht, wenn man die beiden Beobachtungen bei 90°, wo die Länge des Säulchens = 16,7 ist, und bei 30°, wo sie 16,3 ist, wählt und das ganze dazwischen liegende Stück als conisch betrachtet. Wir leiten daher zuerst die allgemeine Formel für das Wachsthum des Halbmessers der Röhre für eine bestimmte Länge derselben ab.

Es stellt die Fig. 3 auf Tab. V. den Längendurchschnitt unserer Thermometerröhre vor, mit dem schmalen Ende A nach dem Siedpunkt hin. Es sey die

*) Damals war uns Bessels Art, die Thermometer zu berichtigen, noch nicht bekannt.

Länge des Quecksilbersäulchens bei $ab = m$ und bei $dc = n$, also haben wir $ge = m$ und $fq = n$; der Halbmesser $eb = r$, der Halbmesser $fc = r + x$, so dass kc, oder die Zunahme des Halbmessers für die Länge fe, die wir $= a$ setzen wollen, x genannt wird.

Die Formel für den Kubikinhalt des abgekürzten Kegels ist, wenn h seine Höhe und d,b seine beiden Grundflächen sind, $= \frac{1}{3}h\,(d + b + \sqrt{db})$.

Nun ist aber für die Seite A die Fläche des Durchmessers $eb = r^2\pi = d$

. . . . $gl = \left(r + \frac{mx}{a}\right)^2 \pi = b$

Die Höhe des Quecksilbersäulchens bei A . . . $ge = m = h$

also der Kubikinhalt des Säulchens bei $A = \frac{1}{3}m\left[r^2\pi + \left(r + \frac{mx}{a}\right)^2 \pi + r\pi\left(r + \frac{mx}{a}\right)\right]$;

oder wenn man das Quadrat entwickelt und die mit x^2, als einer sehr kleinen Grösse, multiplicirten Glieder weglässt, so hat man den Kubikinhalt

$$= \frac{1}{3}m\left[r^2\pi + \left(r^2 + \frac{2rm}{a}x\right)\pi + \left(r^2 + \frac{rmx}{a}\right)\pi\right]$$

$$= \frac{1}{3}m\left(r^2 + r^2 + \frac{2rmx}{a} + r^2 + \frac{rmx}{a}\right)$$

$$= m\pi\left(r^2 + \frac{rmx}{a}\right).$$

Ferner hat man für die Seite B den Flächenraum des Durchmessers

$$cd = (r + x)^2\pi = d$$

. . . . $op = \left(r + \frac{a+n}{a}\cdot x\right)^2 \pi = b$

und die Höhe des Säulchens bei B . . . . . $fq = n = h$

also der Kubikinhalt für das Säulchen bei B

$$= \frac{1}{3}n\left[\left(r + x\right)^2 + \left(r + \frac{a+n}{a}\cdot x\right)^2\pi + \left(r + x\right)\left(r + \frac{a+n}{a}x\right)\pi\right]$$

Diesen Ausdruck entwickelt und die mit x^2 multiplicirten Glieder wiederum weggelassen, giebt den Kubikinhalt

$$= \frac{1}{3}n\pi\left(r^2 + 2rx + r^2 + 2rx\frac{2rnx}{a} + r^2 + rx + \frac{rnx}{a} + rx\right)$$

$$= \frac{1}{3}n\pi\left(3r^2 + 6rx + \frac{3nx}{a}\right) = n\pi\left(r^2 + 2rx + \frac{rnx}{a}\right)$$

Da nun das Säulchen bei A und B aus derselben Quecksilbermasse besteht, so müssen die Kubikinhalte gleich seyn und man hat folglich die Gleichung:

$$m\pi\left(r^2+\frac{rmx}{a}\right)=n\pi\left(r^2+2rx+\frac{rnx}{a}\right)$$

$$m\,(r^2a+rmx)=n\,(r^2a+2rax+rnx)$$

$$mr^2a-nr^2a=(2nra+rn^2-rm^2)x$$

$$x=\frac{(m-n)\,r^2a}{rn^2+2nra-rm^2}=\frac{(m-n)\,ra}{n^2+2na-m^2}$$

Setzt man in diese allgemeine Formel unsere Werthe für 90° und 30°, so hat man $m=16{,}7$, $n=16{,}3$ und $a=60$

folglich $x=\frac{(16{,}7-16{,}3)\,60\cdot r}{265{,}69+1956-278{,}89}=\frac{24}{1942{,}8}\cdot r=0{,}012353\cdot r$

Man hat also für 60° der Länge die Zunahme des Halbmessers $r=0{,}012353\cdot r$.

Aus dieser Angabe berechnet man leicht, wie gross die Quecksilbersäule bei 60° seyn muss und man findet diese Grösse $=16{,}50$, genau so wie der Werth in obiger Tabelle der Beobachtungen bei 59°,7, also auch bei 60°, angegeben ist. Auch für die übrigen Grade stimmt die Rechnung mit der Beobachtung gut genug überein, so dass man die kleinen Unterschiede für Fehler der Beobachtungen zu halten berechtigt ist. Daraus ergiebt sich also, dass die Annahme, die Thermometerröhre laufe konisch, und zwar mit dem breitern Ende zum Frierpunkt, zu gestatten sey.

Unter dieser Annahme wird nun die Correction für die einzelnen Grade unseres Thermometers leicht; denn man hat für 60° die Zunahme des Halbmessers $=0{,}012353\cdot r$, also für 100° ist sie $=0{,}0206\cdot r$ und folglich der Kubikinhalt einer Quecksilbersäule zwischen den festen Punkten nach unsrer obigen Formel für den abgekürzten Kegel $=\frac{1}{3}\cdot 100\cdot(1+1{,}0416+1{,}0206)\,r^2\pi=\frac{1}{3}\,100\,(3{,}0622)\,r^2\pi$, wo r der Halbmesser beim Siedpunkt ist.

Für $a=10°$ ist $x=0{,}00206$ und man hat den Kubikinhalt $=\frac{1}{3}y\,(1+1{,}00426+1{,}00206)\,r^2\pi$ und diese Grösse muss $\frac{1}{10}$ des Kubikinhalts für 100° seyn, man hat also

$$\tfrac{1}{3}y\,(1 + 1{,}00426 + 1{,}00206)\,r^2\pi = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{100}{10}\cdot 3{,}0622\cdot r^2\pi$$

$$3{,}00633\cdot y = 30{,}622$$

folglich die wahre Länge für $10^\circ = y = \frac{30{,}622}{3{,}00633} = 10{,}186$.

Also haben wir die wahre Länge von 10° vom Siedpunkt an gerechnet = 10,186, folglich giebt der corrigirte Thermometer statt 90° nur 89,814.

Auf diese Art wurde der Thermometer erst von 10° zu 10° corrigirt; diesen Raum von 10° kann man bereits, wie es sich aus der Rechnung darthut, für cylindrisch ansehn und daher die einzelnen Grade und $\frac{1}{10}$ Grade ganz einfach durch Division der Stücke von 10° erhalten. Auf diese Art wurde eine vollständige Correctionsliste für diesen Thermometer entworfen und da auch die festen Punkte sich als vollkommen richtig erwiesen *), so hatten wir nun einen Normalthermometer, nach welchem wir durch Vergleichung in verschiedenen Temperaturen unsre übrigen auf der Reise gebrauchten berichtigten. Die zwischenliegenden Grade wurden bei denselben interpolirt. So sind wir denn sicher, dass von Seiten des Thermometers kein Fehler in den Beobachtungen statt findet. In der Tabelle unserer Versuche (pag. 251) sind die Temperaturen, wie gesagt, bereits nach geschehener Correctur des Thermometers hingesetzt.

Die nächste Correctur, welcher die obige Tabelle bedarf, betrifft die Tiefen an und für sich, in wiefern dieselben durch die Reckung des Seils und den Winkel, den dasselbe beim Hängen in der beabsichtigten Tiefe mit der Verticalen machte, modificirt werden. Was zuerst die Reckung betrifft, so muss sie nach vorausgegangenen Versuchen über diesen Gegenstand bestimmt werden.

Dabei müssen wir zuerst bemerken, dass wir während der Reise eine Veränderung mit dem Seil vornahmen. Als wir nämlich nach unserm ersten Ver-

*) Hierbei bemerken wir, dass dieser Thermometer in 4 Jahren seine festen Punkte um gar nichts geändert hat, was mit der angeführten Thatsache, dass nämlich die festen Punkte nach einer Reihe von Jahren höher stehen, als sie auf der Scala verzeichnet sind, geradezu im Widerspruch steht. Dasselbe war der Fall mit noch zwei andern Thermometern, alle aber hatten ihre Kugel von sehr dickem Glase.

such der obigen Tabelle auf 500 T. den Bathometer auf 1000 T. hinabliessen, trieb das Schiff nach der Seite hin, wo das Instrument hing, so dass in Kurzem das Seil unter dem Kiel desselben wegging; zugleich nöthigte ein herannahender ziemlich bedeutender Wind zum schnellen Heraufziehn, und so geschah es, dass das Seil riss und wir also dieses Instrument einbüssten. Dadurch gingen 1000 T. Strick zugleich mit verloren. Dabei sahen wir ein, dass die ganze Reihe von Versuchen schwerlich in einer Windstille würde angestellt werden können, da dieselbe selten so anhaltend ist, dass einem mehr Zeit als zu 5 Versuchen hinter einander bleibt, wenn man sie nicht absichtlich aufsucht; da aber bei unserer Reise der wissenschaftliche nicht der Hauptzweck war, so suchte Hr. VON KOTZEBUE denselben vielmehr so schnell als möglich zu entkommen. Wir nahmen daher auch das noch Uebrige des Strickes 1 und 2 ab und machten die folgenden Versuche nur mit den 1000 T. des dicksten Stricks Nr. 3, mit dem Vorbehalt, wenn wir an einem Orte diese 1000 T. erreicht hätten, von dem zweiten mitgenommenen Seil die übrigen 2000 T. anzuknüpfen und so weiter fortzufahren, wenn nämlich die Windstille es erlaubte, ein Fall, der während unserer Reise übrigens nie eintrat. So reichen unsere Versuche nur bis auf 1000 T. und sind alle mit der dicksten Sorte des Stricks angestellt. Die Versuche in Dorpat über die Reckung des Seils sind aber für alle 3 Sorten gemacht und der dicke Strick ist also für unsern wirklichen Versuch auf dem Meere mit zu grossem Gewicht beschwert, nämlich mit dem ganzen Gewicht der zwei dünnen Sorten des Seils Nr. 1 und 2. Wir müssen daher sehen, wie wir die wirklich statt gefundene Reckung aus den Dörptischen Versuchen herleiten, zu welchem Ende wir sie zuerst hiehersetzen; jede neue Reckung bei denselben wurde nach einer halben Stunde gemessen.

3 Fuss (Par. Maas) des Stricks beschwert mit 103 Pf. $8\frac{7}{8}$ Unz. + 5 Pf. $1\frac{1}{8}$ Unz. reckt sich um 3″
Differenz = 6‴
„ „ „ „ „ „ „ „ 103 „ $8\frac{7}{8}$ „ + 15 „ $3\frac{3}{8}$ „ „ „ „ 3″,6‴
= 3‴
„ „ „ „ „ „ „ „ 103 „ $8\frac{7}{8}$ „ + 25 „ $5\frac{5}{8}$ „ „ „ „ 3″,9‴
= $3\frac{1}{2}$‴

3 Fuss (Par. Maas) des Stricks beschwert mit 103 Pf. $8\frac{7}{8}$ Unz. + 35 Pf. $7\frac{7}{8}$ Unz. reckt sich um 4″0,5‴
Differenz = 3‴
„ „ „ „ „ „ „ „ 103 „ $8\frac{7}{8}$ „ + 45 „ $10\frac{1}{8}$ „ „ „ „ 4″3,5‴
= 1‴
„ „ „ „ „ „ „ „ 103 „ $8\frac{7}{8}$ „ + 48 „ $10\frac{1}{8}$ „ „ „ „ 4″4,5‴

Diese Versuche sind so zu verstehen: 103 Pf. $8\frac{7}{8}$ Unz. sind das angehängte Gewicht und nun ist die Reckung von 200 zu 200 T. betrachtet. Für die ersten 200 T. musste daher zu dem Anhängegewicht noch das halbe Gewicht der 200 T. selbst kommen, denn das Seil trägt sich ja selbst auch, jedoch so, dass die obere Hälfte durch mehr als sein halbes Gewicht, die untere durch eben so viel weniger, das ganze Seil daher durch sein halbes Gewicht gereckt wird, man muss also zum Anhängegewicht = 103 Pf. $8\frac{7}{8}$ Unz. noch das halbe Gewicht von 200 T. = 5 Pf. $1\frac{1}{8}$ Unz. hinzuaddiren. (Natürlich ist hier immer vom Gewicht des Stricks im Wasser die Rede). Die zweiten 200 T. werden gereckt 1stens durch das Anhängegewicht = 103 Pf. $8\frac{1}{8}$ Unz., 2tens durch die ersten 200 T., und 3tens durch die Hälfte ihres eigenen Gewichtes, also zusammen durch das Anhängegewicht und 3mal das halbe Gewicht von 200 T., d. h. durch 103 Pf. $8\frac{7}{8}$ Unz. + 15 Pf. $3\frac{3}{8}$ Unz. So geht es immer fort bis auf die letzte Anzahl von Toisen in der obigen Tabelle; dort enthält das Seil nämlich nicht mehr 200 T., sondern nur 120; es wird daher gereckt durch das Anhängegewicht, durch das Gewicht von 1000 T. und durch sein halbes Gewicht d. h. durch 103 Pf. $8\frac{7}{8}$ Unz. + 45 Pf. $10\frac{1}{8}$ Unz. + 3 Pf.

So sind die vor der Reise angestellten Versuche; wir wollen sehen, wie wir für unsern Fall die Reckung ableiten. Betrachtet man die obige Tabelle von Versuchen und nimmt den ersten und letzten aus, so sieht man, dass die Reckung für jede neue 10 Pf. $2\frac{1}{4}$ Unz. gleich ist, so weit die Genauigkeit solcher Versuche überhaupt gehen kann. Beim letzten Versuche sind nur 3 Pf. hinzugekommen; wären es 10 Pf. $2\frac{1}{4}$ Unz., so gäbe die Proportion die Reckung = 3,4, also ebenfalls nicht abweichend; nur für die ersten 200 T. beträgt die Reckung fast das Doppelte. Betrachtet man dieses grosse Resultat als irgend ein

Versehen in der Beobachtung (was um so eher geschehen kann, da nach ganz ähnlichen Versuchen die übrigen zwei Stricksorten keinen solchen Sprung im ersten Glied der Reihe machen), vielleicht auch bei der ursprünglichen Abmessung der 6 Fuss, und nimmt das Mittel aus den 4 letzten Unterschieden, der letzte ebenfalls auf 10 Pf. $2\frac{1}{4}$ Unz. gebracht, so findet man für die Zunahme des Gewichts von diesen 10 Pf. $2\frac{1}{4}$ Unz. eine mittlere Zunahme an Reckung $= 3''',23$. Setzt man ferner, dieses Gesetz habe von Anfang an stattgefunden, um zu sehen, wie viel angehängtes Gewicht einer Reckung von $3''$ entspräche, so hat man die Proportion

$$10 \text{ Pf. } 2\tfrac{1}{4} \text{ Unz. oder } 10,19 : 3''',23 = x : 36'''$$

folglich $$x = \frac{366,84}{3,23} = 113,6 \text{ Pf.}$$

Also 113,6 Pf. sind nöthig, um die Reckung von $3''$ hervorzubringen, statt dass die Beobachtung 108,8 Pf. gab, ein für diese Art von Versuchen nicht bedeutender Fehler; denn um 108,8 Pf. als nöthiges Anhängegewicht zu geben, müsste die mittlere Reckung für 10,19 Pf. statt $3''',23$ $3''',37$ seyn, also nur um $0''',14$ verschieden, ein Fehler, für den man bei der Abmessung der Reckung schwerlich bürgen kann.

Man kann also für diesen Strick Nr. 3 das Gesetz als richtig annehmen, dass die Reckungen den angehängten Gewichten proportional sind, was an das Gesetz S'gravesand's über die Ausdehnung elastischer Saiten durch angehängte Gewichte erinnert (vergl. Biot, *Traité de Phys.* T. I. pag. 479). Eine Bestätigung dieses Gesetzes für unser Seil findet sich in einem Versuche, der noch in Dorpat mit demselben angestellt wurde. Es bewirkte nämlich ein Gewicht von 177 Pf. eine Reckung von $4'',8'''$. Nach unserm Gesetze hat man durch die Rechnung für 177 Pf. die Proportion

$$108,78 : 177 = 36 : x$$

also $x = 4'',8''',7$. Die Rechnung und Beobachtung sind also nur um $0,7'''$ verschieden.

Wir bemerken jedoch, dass sich dieses Gesetz keineswegs auf die Seile Nr. 1 und Nr. 2 erstrecke. Für Nr. 1 ergäbe sich nach den hierüber angestellten Versuchen ein berechnetes Anhängegewicht von 27,54 Pf., während das wirkliche 53 Pf. 11 Unz. ist, also fast das Doppelte. Für Nr. 2 oder das Seil von mittlerer Stärke ergiebt sich ein berechnetes Gewicht von 58,6 statt des beobachteten von 71,1, also ersteres nur $\frac{4}{5}$ vom wahren Gewicht. Indessen bemerkt man, dass das angenommene Gesetz um so vollkommner wird, je dicker der Strick ist, oder dass, je dicker ein Seil ist, es einem elastischen Körper um so näher kömmt, nämlich im ganz durchnässten Zustande, für den unsere Versuche nur gelten.

Die Berechnung der Reckung des Seils für unsere obige (pag. 251) Reihe von Versuchen wird also ganz einfach folgende seyn:

Als beständiges Anhängegewicht muss man betrachten: 1stens das Gewicht des Instruments im Wasser = 45 Pf. 9,5 Unz.; 2tens müssen davon 8 Pf. abgezogen werden, durch welche das Seil beim Abmessen der Toisen gespannt war, denn diese 8 Pf. vom Gewicht des Instruments müssen dazu dienen, den Toisen ihre wirkliche Länge, die sie auf dem Maassstabe hatten, wiederzugeben; 3tens müssen hinzuaddirt werden 19 T. eines dickern Stricks, der ganz unten angebunden war, um, wenn das Instrument mit Wasser gefüllt aus der Oberfläche sich heraushebt, die gehörige Stärke des Seils zu haben, dieses Gewicht zu tragen; das Gewicht dieser 19 T. im Wasser ist 1 Pf. Das ganze beständige Anhängegewicht ist also 38 Pf. $9\frac{1}{2}$ Unz. = 38,8 Pf. Hierzu müssen immer noch die halben Gewichte des hinuntergelassenen Seils addirt werden, wie bereits oben erörtert worden. Dazu dient die Angabe, dass 1 T. unseres Stricks im Wasser 0,05082 Pf. wiegt. Bei unserer Tabelle von Versuchen müssen wir zuerst von den dort angegebenen Tiefen in Toisen die 19 T. dicken Stricks abziehn, für die die Reckung, als unbedeutend, vernachlässigt werden kann und dann für die übrigen Toisen die Reckung berechnen. Nennt man diese bereits um 19 T. verringerte Länge des herabgelassenen Seils = n, und das ganze an-

gehängte Gewicht, das halbe Gewicht des Seils mitgerechnet, $= N$, so hat man für 3′ Länge die dem Gewichte N zugehörige Reckung nach der Proportion.

$$108{,}78 : N = 3 : x$$

wonach die Reckung $x = \frac{3 \cdot N}{108{,}78}$ in Zollen gegeben ist. Für 1 T. ist also die Reckung $= \frac{6 \cdot N}{108{,}78}$ folglich für n Toisen $= \frac{6 \cdot N \cdot n}{108{,}78}$ Zoll oder $\frac{N \cdot n}{108{,}78 \cdot 12}$ Toisen; folglich die ganze Länge des hinuntergelassenen Seils $= n + 19 + \frac{N \cdot n}{108{,}78 \cdot 12}$, Alles in Toisen.

Es bleibt uns noch übrig, die Correction der Tiefen in Rücksicht auf den Winkel, den das Seil mit der Vertikalen kurz vor dem Heraufziehen aus der grössten Tiefe macht, zu bestimmen; wir sagen kurz vor dem Heraufziehen, denn das Instrument ward alsdann nochmals etwas gehoben und wieder hinabgelassen, so dass es sich noch ganz zuletzt mit neuem Wasser aus jener Tiefe füllte. Dieser Winkel konnte nur durchs Augenmaass geschätzt werden und man suchte dadurch so viel Genauigkeit als möglich zu erreichen, dass er von mehreren Personen auf dem Schiffe geschätzt und aus allen Schätzungen das Mittel genommen wurde; übrigens waren dieselben nie um 5° verschieden und man kann daher wohl annehmen, dass das Mittel nicht mehr als höchstens um $2\frac{1}{2}$° von der Wahrheit abweiche. Die Richtung des Seils im Wasser müssen wir als gradlinig ansehen, denn die krumme Linie, die es vielleicht bildet, lässt sich nicht berechnen, weil das Schiff nicht eine bestimmte progressive Bewegung hatte, sondern bald hierhin bald dorthin durch die Wellen schwankte, so dass der Winkel bald zu, bald wieder abnahm und oft auf die entgegengesetzte Seite der Vertikalen überging; die krumme Linie musste also nothwendig sehr variabel seyn *).

---

*) Wir wollen die Richtung des Stricks im Wasser gradlinig annehmen, und für eine bestimmte Geschwindigkeit des Schiffs $= v$ den Winkel $= \alpha$ berechnen, und umgekehrt für einen bestimmten Werth von α die dazu nöthige Geschwindigkeit $= v$.

Zuerst bemerken wir, dass es einerlei ist, ob das Wasser ruhe und das Schiff sich bewege, oder ob das Schiff ruhe und die ganze Wassermasse sich mit derselben Geschwindigkeit in entgegengesetzter

Nehmen wir also die Richtung des Seils als gradlinigt an, so ist die Correctur leicht; man muss die herabgelassene Länge mit dem Cosinus des Winkels den wir α nennen wollen, multipliciren; das giebt die wahre Tiefe

$$= \left(n + 19 + \frac{N \cdot n}{108{,}78 \cdot 12}\right) \text{Cos. } \alpha \text{ in Toisen.}$$

Richtung fortbewege; wir denken uns also unser Seil, mit dem Instrumente daran, in einer mit der Geschwindigkeit v fortrückenden Wassermasse an einem unbeweglichen Punkte hangend, unter der Annahme, dass das Seil eine grade Linie mache, die mit der Vertikalen einen beliebigen Winkel bilde.

Auf Tab. V. Fig. 1 bedeutet AF die als gradlinig angenommene Richtung des herabhängenden Seils und AG die Vertikale. Das Wasser bewegt sich in der Richtung KC. Betrachten wir einen Punkt in der Länge des Stricks C, auf den das Wasser in der Richtung KC trifft, und nehmen wir BC für den Ausdruck der Geschwindigkeit desselben, so zerlegt sich dieselbe in 2 rechtwinklig auf einander stehende CD und CL. CD ist unwirksam und es bleibt nur CL als die Wirkung des Wassers senkrecht auf die Richtung des Stricks; $CL = CB \cdot \cos. BCL = CB \cdot \cos. CAB$ oder nach unserer obigen Benennung $CB = v \cdot \cos. \alpha$; mit dieser Geschwindigkeit wirkt das Wasser an jedem Punkte senkrecht auf den Strick.

Denken wir uns nun in Tab. V. Fig. 2 unter $bkad$ den Querschnitt des Stricks, in dessen Ebene die Geschwindigkeit des Wassers, die wir oben fanden $= v \cdot \cos. \alpha$, wirkt und betrachten wir diese Wirkung in einem beliebigen Punkte der Peripherie d, so treffe also der Strom mit der Geschwindigkeit $v \cdot \cos. \alpha$, die wir durch fd vorstellen, auf diesen Punkt in der Richtung von ad. Wir zerlegen fd in die rechtwinklich auf einander stehenden de und hd, wo eine in der Richtung des Radius, die andere in der der Tangente wirkt; erstere allein ist wirksam, de fällt weg, dh ist aber $= df \cdot \cos.$ $hdf = df \cdot \cos. cpd = v \cdot \cos. \alpha \cdot \cos. \beta$, wenn man den Winkel $cpd = \beta$ setzt, dh aber zerlegt sich wiederum in die zwei rechtwinkligen dl und dg; davon wird dl in jedem Punkte der Peripherie durch eine ganz gleiche entgegengesetzte des Punktes d', wo man sich dieselbe Zerlegung der Kräfte denken muss, aufgehoben und es bleibt nur noch dg übrig als die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt d wirklich in der Richtung df getrieben wird; dg ist aber $= hd \cdot \cos. \beta = v \cdot \cos. \alpha \cdot \cos.^2 \beta$.

Nennen wir nun in unserem Kreisdurchschnitt die Abscisse $af = x$ und die Ordinate $fd = y$, so haben wir für tang. β den bekannten Ausdruck $\frac{dy}{dx}$.

Man hat also

$$\frac{\sin. \beta}{\cos. \beta} = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - \cos.^2 \beta}}{\cos. \beta} \text{ also } \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{1 - \cos.^2 \beta}{\cos.^2 \beta} \text{ und folglich } \cos.^2 \beta = \frac{dx^2}{dy^2 + dx^2};$$

für den Punkt der Peripherie von der Abscisse x ist also die Wirkung des Stroms $= v \cdot \cos. \alpha \frac{dx^2}{dy^2 + dx^2}$

Der unendlich kleine Bogen der Peripherie, der dem Stück dx der Abscisse zugehört ist $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$ man hat also die ganze Wirkung des Stromes auf den Bogen der zum Stück der Abscisse dx gehört

$$v \cdot \cos. \alpha \cdot \frac{dx^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy^2 + dx} = v \cdot \cos. \alpha \cdot \frac{dx^2}{\sqrt{dy^2 + dx^2}}.$$

Um in der Genauigkeit so weit als möglich zu gehn, müssen wir noch auf einen Umstand Rücksicht nehmen, oder wenigstens zeigen, dass der dadurch entstehende Fehler unbedeutend ist. Es ist nämlich die Frage: wie tief muss das Instrument sinken, um das in ihm enthaltene Wasser vollkommen zu er-

---

Die Gleichung des Kreises für den Anfangspunkt auf der Peripherie ist aber $y = \sqrt{2rx - x^2}$, folglich haben wir

$$dy = \frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{2rx - x^2}} \text{ und } dy^2 = \frac{(r-x)^2 \cdot dx^2}{2rx - x^2};$$

setzen wir diesen Werth in die obige Formel, so haben wir die Geschwindigkeit auf dem Bogen der Abscisse dx

$$= v \cdot \cos.\alpha \cdot \frac{dx^2}{\sqrt{\left(\frac{(r-x)^2}{2rx - x^2} + 1\right) dx^2}} = \frac{dx^2}{\sqrt{\frac{r^2 - 2rx + x^2 + 2rx - x^2}{2rx - x^2}} \cdot dx}$$

und wenn wir Alles gehörig verkürzen und aufheben:

$$\frac{v \cdot \cos.\alpha}{r} \sqrt{2rx - x^2}\; dx$$

Diese Formel muss integrirt werden zwischen den Gränzen $x = 0$ und $x = r$, so haben wir die Wirkung auf die eine Hälfte des Durchschnittes und das Doppelte ist also die Wirkung auf den ganzen Querschnitt des Seils. Die Integration giebt für eine Abscisse x die Wirkung

$$\frac{v \cdot \cos.\alpha}{r}\left(\frac{x-r}{2} \cdot \sqrt{2rx - x^2} + \frac{r^2}{2}\,\text{Arc. sin.}\,\frac{\sqrt{2rx - x^2}}{r} + C\right)$$

Aus der Bedingung, dass für $x = 0$ die Wirkung auch $= 0$ werden muss, ergiebt sich die Constante $C = 0$ und man hat also das vollständige Integral

$$= \frac{v \cdot \cos.\alpha}{r}\left(\frac{x-r}{2} \cdot \sqrt{2rx - x^2} + \frac{r^2}{2}\,\text{Arc. sin.}\,\frac{\sqrt{2rx - x^2}}{r}\right)$$

folglich für $x = r$ die halbe Wirkung auf den Querschnitt $= v \cdot \cos.\alpha \cdot \frac{r\pi}{4}$ und die ganze $= v \cdot \cos.\alpha \cdot \frac{r\pi}{2}$. Da nun $\frac{r\pi}{2}$ der Bogen des Quadranten ist, so sagt uns der letzterhaltene Ausdruck: die Wirkung der Stromgeschwindigkeit $v \cdot \cos.\alpha$ auf den Bogen des Halbkreises ist gleich der Wirkung derselben Geschwindigkeit, wenn sie rechtwinklich auf eine gerade Linie trifft, die gleich ist dem Bogen des Vierteikreises.

Die der Geschwindigkeit $v \cdot \cos.\alpha$ zukommende Druckhöhe ist $\frac{v^2 \cdot \cos.^2\alpha}{2g}$, wo g den mit der Endgeschwindigkeit der ersten Secunde des freien Falls in der zweiten gleichförmig durchlaufenen Raum bedeutet. Also wird die Wirkung auf einen Querschnitt des Stricks gleich seyn einem Wasserdrucke $\frac{v^2 \cdot \cos.^2\alpha}{2g} \cdot \frac{r\pi}{2} = \frac{v^2 \cdot \cos.^2\alpha \cdot r\pi}{4g}$ und auf den ganzen Strick dessen Länge a ist gleich einem Wasserdrucke $\frac{v^2 \cdot \cos.^2\alpha \cdot r\pi}{4g} \cdot a = M$. Auf das unten hängende cylindrische Instrument wird sie

neuern? Die Antwort ergiebt sich leicht durch die folgende Rechnung: Wir nennen den Halbmesser des innern hohlen Raums a, seine Höhe h, den untern Halbmesser der untern Klappe $= r$, das Stück, um welches sie sich hebt $= m$. Die Peripherie der untern Seite der untern Klappe ist $= 2r\pi$; der Flächenin-

---

ganz eben so gleich seyn einem Wasserdrucke $\frac{v^2 \cdot \cos. \alpha \cdot \rho\pi}{4g} \cdot b = N$, wenn wir den Radius seines Querschnittes $= \rho$ und seine Höhe $= b$ setzen. Beide Wirkungen kann man sich als in ihrem Schwerpunkt vereinigt denken, welcher für den Strick in der Entfernung $\frac{1}{2}a$ von der Oberfläche, für das Instrument aber in der Entfernung a liegt, denn man kann die halbe Höhe des Instruments gegen die Länge des Seils vernachlässigen; man hat also, wenn die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunkts $= x$ ist.

$$\frac{Ma}{2} + Na = (M + N)\,x, \text{ also daraus } x = \frac{M + 2N}{2(M + N)} \cdot a$$

oder für M und N ihre Werthe gesetzt

$$x = \frac{\frac{v^2 \cdot \cos.^2\alpha \cdot \pi}{2g}\left(\frac{ra}{2} + \rho b\right) a}{\frac{v^2 \cdot \cos.^2\alpha \cdot \pi}{2g}\left(ra + \rho b\right)} = \frac{ra + 2\rho b}{2(ra + \rho b)} \cdot a$$

Das Gewicht des Seils, zerlegt in die Richtung senkrecht auf die Richtung des Seils, also der Wirkung des Stroms entgegengesetzt, ist, wenn das Gewicht desselben gegen das Gewicht des Meerwassers $= m$ ist, gleich $r^2\pi \cdot a\,(m - 1)\,\sin.\alpha$ und das eben so zerlegte Gewicht des Instruments, dessen specifisches Gewicht $= n$ ist, findet sich $\rho^2 \cdot \pi \cdot b\,(n - 1)\,\sin.\alpha$. Diese Gewichte muss man sich gleichfalls in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt vereinigt wirkend denken und man findet für seine Entfernung vom Aufhängepunkt auf ganz ähnliche Art, wie oben für den Strom

$$x = \frac{\sin.\alpha \cdot \pi\,[r^2 a\,(m - 1) + 2\rho^2 b\,(n - 1)]\,a}{2 \cdot \sin.\alpha \cdot \pi\,[r^2 a\,(m - 1) + \rho^2 b\,(n - 1)]} = \frac{r^2 a\,(m - 1) + 2\rho^2 b\,(n - 1)}{2[r^2 a\,(m - 1) + \rho^2 b\,(n - 1)]} \cdot a$$

Die Summe der Wirkung des Stroms auf das Seil und das Instrument, multiplicirt mit der Entfernung ihres Schwerpunkts muss nun gleich seyn der Summe der Gewichte des Seils und Instruments multiplicirt mit der Entfernung ihres Schwerpunkts, beide Wirkungen zerlegt in die Richtung senkrecht auf die Richtung des Stricks. Man hat also

$$\frac{v^2 \cdot \cos.^2\alpha \cdot \pi}{4g} \cdot \frac{(ra + \rho b)(ra + 2\rho b) \cdot a}{2(ra + \rho b)} = \pi \cdot \sin.\alpha \cdot \frac{[r^2 a(m-1) + \rho^2 b(n-1)][r^2 a(m-1) + 2\rho^2 b(n-1)]a}{2[r^2 a(m-1) + \rho^2 b(n-1)]}$$

und gehörig reducirt

$$\frac{v^2 \cdot \cos.^2\alpha}{4g}(ra + 2\rho b) = \sin.\alpha\,[r^2 a\,(m - 1) + 2\rho^2 b\,(n - 1)]$$

folglich

$$v^2 = 4g \cdot \sin.\alpha \cdot \frac{r^2 a\,(m - 1) + 2\rho^2 b\,(n - 1)}{\cos.^2\alpha\,(ra + 2\rho b)}$$

Nehmen wir einen unsrer Fälle zum Beispiel, so haben wir

$\alpha = 25^0$; $g = 30{,}2$; $r = 0{,}009$; $\rho = 0{,}508$; $a = 6150$; $b = 1{,}75$; $m = 1{,}33$; $n = 2{,}17$

halt der geringsten Oeffnung, durch die das Wasser strömen muss, also $= 2r\pi \cdot m$. Durch diese Oeffnung muss der ganze Kubikinhalt des im Instrument enthaltenen Wassers hindurchfliessen. Dieser Kubikinhalt ist $= a^2\pi \cdot h$; es fragt sich nun, wie tief das Instrument sinken muss, damit das durch $2r\pi m$ geströmte Wasser diesem Kubikinhalte gleich ist? Nennen wir diese Tiefe $= x$, so haben wir die Gleichung

$$2r\pi m x = a^2\pi h \text{ also } x = \frac{a^2\pi \cdot h}{2r\pi m} = \frac{a^2 h}{2rm}.$$

Für unser Instrument haben wir nach englischen Zollen $a = 5'',7$; $h = 16',48$; $r = 2'',6$; $m = 1'',72$, folglich wird unsere allgemeine Formel:

$$x = \frac{32,49 \cdot 16,48}{5,2 \cdot 1,72} = \frac{535,43}{8,94} = 59'',9$$

Folglich, wenn wir den $\frac{1}{10}''$ für unbedeutend ansehn, muss unser Instrument 5 Fuss engl. $= 4,7$ pariser sinken, um das Wasser in sich vollkommen zu erneuern. Da nun die Höhe des Instruments, von der untern Klappe bis zum Bügel, bei der angezeigten Länge des Seils nicht mitgerechnet ist und diese Höhe $= 3'$ ist, so sinkt es schon um so viel tiefer, als die angezeigten Toisen, es fehlen also nur noch 1,7, um das Wasser im Instrument vollkommen zu erneuern, und um diese Tiefe müsste man es noch sinken lassen, eine für unsere Versuche gänzlich zu vernachlässigende Vorsicht, da die Unsicherheit durch die

---

wo alle Maasse in Pariser Fuss gegeben sind; man hat also in unsrer Formel

$$v^2 = \frac{120,8 \cdot 0,4226(0,000081 \cdot 6150 \cdot 0,33 + 2 \cdot 0,2581 \cdot 1,75 \cdot 1,17)}{0,8214(0,009 \cdot 6150 + 2 \cdot 0,508 \cdot 1,75)} = \frac{61,348}{46,925} = 1,3074$$

und $v = 1,14$ Fuss in der Secunde.

Wenn aber die Geschwindigkeit bekannt ist und man sucht den Winkel, so muss man sin. α oder cos. α aus unserer obigen Formel entwickeln; man findet auf diese Weise

$$\sin. \alpha = \sqrt{v^2 + \frac{4g^2 \cdot [r^2 a(m-1) + 2\varrho^2 b(n-1)]^2}{(ra + 2\varrho b)^2}} - 2g \cdot \frac{r^2 a(m-1) + 2\varrho^2 b(n-1)}{ra + 2\varrho b}$$

Der hier betrachtete Fall ist eigentlich der eines runden Stabes mit einem daran in derselben Längenrichtung befestigten Cylinder und könnte vielleicht mit den gehörigen praktischen Einrichtungen als Strommesser benutzt werden. Unsern eigentlichen Fall mit dem Seil und Bathometer habe ich in dem, dieser Abhandlung beigefügten, Anhange ausführlicher behandelt

Wellen an der Meeresoberfläche, wodurch die letzte Marke bald über, bald unter dem Wasser steht, grösser ist.

Aus dem oben Gesagten ersieht man nun, wie die Correction für die Tiefe angestellt werden muss; wir wollen zum Schluss einen Fall als Beispiel für alle übrigen berechnen.

Am 31sten August 1825 geht der 4te Versuch auf 460 + 19 T. bei einem Winkel von 25°, wir haben also $N = 38{,}8$ Pf. + 11,7 Pf. = 50,5; ferner $n = 460$; $\cos.\ \alpha = \cos.\ 25° = 0{,}9063$
folglich die wirklich erreichte Tiefe

$$= \left(460 + 19 + \frac{50{,}5 \cdot 460}{108{,}78 \cdot 12}\right) 0{,}9063 = 450{,}2 \text{ T.}$$

Nach diesem Beispiel sind alle andere Tiefen corrigirt, bis auf den ersten Versuch auf 500 T., dessen Correctur aus andern in Dorpat angestellten Reckungsversuchen des Seils Nr. 1 berechnet ist; diese hier anzuführen, würde zu weit führen, besonders da es eine isolirte Beobachtung ist. Die Correctur beträgt 39 T. und die wahre Tiefe ist also = 539 T.

Wir gehen jetzt zu der wichtigsten von allen Correcturen über, nämlich zu der für das allmählige Erwärmen des heraufgeholten Wassers während des Durchganges durch die oberen wärmeren Schichten. Dazu benutzen wir die in BIOT *Traité de phys.* (T. IV. pag. 620) angegebene Formel für die Erkältung oder Erwärmung der Körper in umgebenden Mitteln, die von niedrigerer oder höherer Temperatur sind, als die Körper selbst. Diese Formel hat folgenden Ausdruck

$$\text{Log. } T = \text{Log. } T_0 - at \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

T bezeichnet den Temperaturunterschied des Mittels und des sich erwärmenden oder erkältenden Körpers nach einer gewissen Zeit t, in der der Körper sich in dem Mittel befunden hat; T_0 bedeutet denselben Unterschied vor dem Versuche und a einen von der Leitungsfähigkeit der Substanzen abhängenden Coefficienten, der durch Versuche ausgemittelt werden muss; bei BIOT heisst er $\frac{M}{a}$ wo

M der Modul der gemeinen logarithmischen Tafeln ist, allein da er doch durch Versuche bestimmt wird, so kann man ihn mit einem Buchstaben bezeichnen, wo dann die Division durch M bereits geschehen ist.

Da bei unseren Versuchen auf dem Meere der sich erwärmende Körper in dem erwärmenden Mittel nicht ruhig hängt, sondern mit einer grösseren oder geringeren Geschwindigkeit in ihm fortbewegt wird, und da ein im Wasser bewegter Körper sich schneller erwärmt als ein ruhender, so sieht man, dass der Coefficient a mit der Geschwindigkeit des Heraufziehens variirt oder eine Function dieser Geschwindigkeit c ist; wir setzen daher den Coefficienten a im Allgemeinen

$$a = \alpha + bc + dc^2 + fc^3 \ldots.$$

Begnügen wir uns mit der dritten Potenz von c, so gehören 4 Versuche bei verschiedenen Geschwindigkeiten dazu die Coefficienten a, b, d und f zu bestimmen. Für $c = 0$ wird in unserer letzten Formel $a = \alpha$; hat man also einen Versuch in stillem Wasser und bei ruhig hängendem Instrument gemacht und hat den Coefficienten aus unserer allgemeinen Formel (A) bestimmt, so ist dieser $= \alpha$; man kann also α als bekannte Grösse annehmen und braucht nur noch 3 Versuche für verschiedene Geschwindigkeiten, um die drei übrigen Coefficienten zu bestimmen. Nennt man die aus der Formel (A) gefundenen Coefficienten a', a'', a''' und die entsprechenden Geschwindigkeiten c', c'', c''', so hat man also

$$a' = \alpha + bc' + dc'^2 + fc'^3$$
$$a'' = \alpha + bc'' + dc''^2 + fc''^3$$
$$a''' = \alpha + bc''' + dc'''^2 + fc'''^3$$

und nennt man, da α bekannt ist, der Kürze halber $a' - \alpha = \beta$, $a'' - \alpha = \gamma$ und $a''' - \alpha = \zeta$, so verwandeln sich obige Gleichungen in folgende:

$$\beta = bc' + dc'^2 + fc'^3$$
$$\gamma = bc'' + dc''^2 + fc''^3$$
$$\zeta = bc''' + dc'''^2 + fc'''^3$$

und daraus entwickeln sich die Coefficienten:

$$b = \frac{\beta \cdot c''^2 c'''^2 (c''' - c') + \gamma \cdot c'^2 c'''^2 (c' - c''') + \xi\, c'^2 c''^2 (c'' - c')}{c\, c'' c''' (c' - c'')(c''' - c'')(c''' - c')}$$

$$d = \frac{\beta \cdot c'' \cdot c''' (c''^2 - c'''^2) + \gamma c' \cdot c''' (c'''^2 - c'^2) + \xi c'' \cdot c' (c'^2 - c''^2)}{c' \cdot c'' \cdot c''' (c' - c'')(c'' - c''')(c''' - c')}$$

$$f = \frac{\beta \cdot c'' \cdot c''' (c'' - c''') + \gamma c' \cdot c''' (c''' - c') + \gamma \cdot c'' c' (c' - c'')}{c' \cdot c'' \cdot c''' (c' - c'')(c'' - c''')(c' - c''')}$$

Zuerst musste nun α bestimmt werden. Zu diesem Behufe wurden 2 Versuche im Teiche des ersten Landcadettencorps angestellt; es wurde im Winter ein Loch von etwa 3 Fuss im Quadrat ins Eis gehauen; das dadurch befreite Wasser zeigte in der Tiefe, in welcher das Instrument hing, etwa $1\frac{1}{2}$ Fuss unter der Oberfläche, 0°,7. In dieses Wasser ward nun das mit wärmerem Wasser gefüllte Instrument hineingesenkt und nach einer genau beobachteten Zeit wieder herausgezogen.

Die Resultate der Versuche waren folgende:

1. Das Instrument ward gefüllt mit Wasser	= 9°,4	um	$11^h 23\frac{1}{4}'$	Temperatur des äusseren Wassers
„ „ „ „ herausgezogen „	= 8°,1	„	$12^h 14\frac{1}{4}'$	= + 0,7
folglich betrug die Erkaltung	= 1°,3 während $0h\ 51'$			

Wir haben also in unserer allgemeinen Formel (A) $T_0 = 8{,}7$; $T = 7{,}4$; $t = 51$ folglich den Coefficienten a unserer Formel $= 0{,}001378$.

2. Das Instrument ward gefüllt mit Wasser	= 17°,50	um	$12^h 45'$	Temperatur des äusseren Wassers
„ „ „ „ herausgezogen .	= 13°,8	„	$1^h 36'$	= 0,7
folglich betrug die Erkältung	= 3°,25 während $0h\ 51'$.			

Hier ist $T_0 = 16{,}35$; $T = 13{,}1$; $t = 51$ und folglich der Coefficient a unserer Formel $= 0{,}001861$. Nimmt man das Mittel aus beiden Coefficienten, so hat man 0,001623 und hieraus unsere beiden Versuche berechnet, giebt für den ersten die Erwärmung = 1,507 statt 1,3 und für den zweiten 2,84 statt 3,25, also betragen die Fehler 0,207 und 0,41, ein Fehler, der für diese Art von Versuchen nicht übertrieben gross ist. In der Entwickelung der Coefficienten haben wir also das bekannte $\alpha = 0{,}001623$ (pag. 266).

Da wir für die noch übrigen Versuche die bedeutende Tiefe nicht haben konnten, wie bei denen auf dem offnen Meere, so wurden sie so abgeändert, dass das Instrument ruhig hing im Wasser, das mit verschiedener Geschwindigkeit vorbei floss, und zwar hing es liegend mit dem obern Ende gegen den Strom, so dass derselbe es von oben nach unten umfloss, ganz wie im Meere beim Heraufziehen. Es ist offenbar dasselbe, ob das Wasser ruht und das Instrument sich bewegt, oder umgekehrt, ob jenes stille steht und das Instrument mit derselben Geschwindigkeit darin fortbewegt wird; die Hauptsache, worauf es ankömmt, ist die schnellere oder langsamere Abwechselung der durch Berührung des Instruments schon erwärmten Schichten mit frischen, noch nicht erwärmten, und diese Abwechselung ist in beiden Fällen dieselbe. Da ferner das Flusswasser ohnehin eine niedrige Temperatur hat, so war es schwer, ja unmöglich, das Instrument mit noch bedeutend kälterem Wasser zu füllen, wir liessen daher das wärmere Wasser im Instrument sich im kälteren Flusse erkälten, statt dass es sich beim Heraufziehen im Meere erwärmt; das Resultat muss ja in beiden Fällen dasselbe seyn.

Um die erforderlichen Unterschiede in der Geschwindigkeit zu erlangen, wurden die Versuche in der Mitte der Newa, näher zum Ufer und endlich der dritte im Winter in einem ins Eis gehauenen Kanal angestellt; bei dem letzteren ward der Strom noch durch Adhäsion am Eise bedeutend geschwächt. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Stroms diente ein aus Tannenholz verfertigter vierseitiger Schwimmer, 2″ im Quadrat breit und 2′ 10″ lang und unten mit Blei beschwert, so dass er senkrecht im Wasser schwamm und 5″,5 über demselben hervorragte. Der beim Schwimmer untergetauchte Theil war also 2′ 4″,5 lang und man bekömmt, wenn man den Stab mit dem Strome hinabgehn lässt und die Zeit beobachtet, die er auf eine bestimmte Strecke braucht, die mittlere Geschwindigkeit des Stroms von 2′ 4″,5 Tiefe. In der Mitte dieses Stroms, also 1′ 2″, 25 unter der Oberfläche lag nun bei den Versuchen die Axe des Instruments. Bei den Versuchen auf dem Eise hing das Instrument in seiner liegen-

den Stellung an zwei queer über den Kanal gelegten Stangen; in der offnen Newa aber ragten diese Stangen an der Seite eines grossen Bootes etwa einen Faden über den Bord hinaus und der Bathometer hing an dem äussersten Ende derselben. Das Boot selbst ward bei der beabsichtigten Entfernung vom Ufer vor Anker gelegt und die vom Schwimmer durchlaufene Strecke an einer Schnur abgemessen, die durch kleine an derselben befestigte Hölzchen schwimmend erhalten und vom Strom in gerader Richtung heruntergetrieben wurde. Am untern Ende ward ein zweites kleineres Boot an der Schnur befestigt, um dieselbe besser anzuziehn und dort stand ein zweiter Beobachter. Die Schnur ward zwischen zwei Zeichen abgemessen; der Beobachter im obern Boote beobachtete die Zeit wenn der Schwimmer am ersten, der im untern Boote wenn er am zweiten Zeichen ankam, und daraus ergab sich die Geschwindigkeit. Auf dem Eise geschah die Bestimmung der durchlaufenen Strecke unmittelbar am Rande des Kanals mit der Messkette. Die unten bei Aufzählung der Versuche angegebene Geschwindigkeit des Stroms ist immer das Mittel aus 5 — 8 Versuchen. Leider war der Strom der Newa selbst in der Mitte nur um ein Unbedeutendes stärker als 2′ in der Secunde und wir mussten uns hiermit als dem Maximum begnügen.

Die angestellten Versuche sind folgende:

Bei der Geschwindigkeit des Stroms unter dem Eise = 0′,268 *par.* in der Secunde

1. Das Instrument gefüllt mit Wasser = 9°
„ „ „ „ herausgezogen „ = 6,5
folgl. d. Erkalt. = 2,5
Dauer d. Versuche $0^h 51'$. Aeusser. Wasser = — 0,15

2. Das Instrument gefüllt mit Wasser = 16,2
„ „ „ „ herausgezogen „ = 11,3
folgl. d. Erkält. = 4,9
Dauer d. Versuche $0^h 53'$. Aeusser. Wasser = — 0,15

Wir haben also für den Versuch

1. $T_0 = 9{,}15$; $T = 6{,}65$; $t = 51$ folglich den Coeffic. $a = 0{,}0027176$
2. $ = 16{,}35$; $T = 11{,}45$; $t = 53$ — — — — $a = 0{,}0029196$

Folglich haben wir bei der Geschwindigkeit = 0',268 den mittleren Coefficienten = 0,0028186 und daraus ergiebt sich: für den Versuch

1. d. berechn. Erkält. = 2,58; d. beobacht. = 2,5; also d. Untersch. = + 0,08
2. — — — — = 4,76; — — = 4,9; — — — = — 0,14

Bei der Geschwindigkeit des Stroms am Ufer = 1',245 *par.* in der Secunde

1. Das Instrument gefüllt mit Wasser = 28,9 } Dauer d. Versuchs = $0^h 50'$. Aeusser. Wasser = 12°,8
„ „ „ „ herausgezogen „ = 23,0 }
folg. d. Erkält. = 5,9

2. Das Instrument gefüllt mit Wasser = 21,8 } Dauer d. Versuchs = $0^h 50'$. Aeusser. Wasser = 12,85
„ „ „ „ herausgezogen „ = 18,7 }
folgl. d. Erkält. = 3,1

Wir haben also für den Versuch

1. T_0 = 16, 1; T = 10, 2; t = 50 folglich den Coefficient. a = 0,003887
2. T_0 = 8,95; T = 5,85; t = 50 — — — — a = 0,003693

Folglich haben wir bei der Geschwindigkeit = 1',245 den mittleren Coefficienten = 0,003790 und daraus ergiebt sich: für den Versuch

1. d. berechn. Erkält. = 5,78; d. beobacht. = 5,9; also d. Untersch. = — 0,12
2. — — — — = 3,29; — — = 3,1; — — — = + 0,19

Bei der Geschwindigkeit des Stroms = 2',004 *par.* in der Secunde, in der Mitte der Newa:

1. Das Instrument gefüllt mit Wasser = 28,7 } Dauer d. Versuchs = $0^h 51$. Aeusser. Temper. = 12,4
„ „ „ „ herausgezogen „ = 22,9 }
folgl. d. Erkält. = 5,8

2. Das Instrumemt gefüllt mit Wasser = 21, 7 } Durch d. Versuchs = $0^h 51$. Aeusser. Temper. = 12,8
„ „ „ „ herausgezogen „ = 18,45 }

Wir haben also für den Versuch

1. T_0 = 16.3; T = 10, 5; t = 51 folglich den Coefficient. a = 0,003745
2. T_0 = 8,9; T = 5,65; t = 51 — — — — a = 0,003869

Folglich haben wir bei der Geschwindigkeit = 2',004 den mittleren Coefficienten = 0,003807 und daraus ergiebt sich: für den Versuch

1. d. berechn. Erkält. = 5,88; d. beobacht. = 5, 8; also d. Untersch. = + 0,08
2. — — — — = 3,21; — — = 3,25; — — — = — 0,04

Betrachten wir nun zuerst diese Versuche, in wiefern sich aus ihnen die Brauchbarkeit unserer allgemeinen Formel Log. $T.$ = Log. $T_0 - at$ für verschiedene anfängliche Temperaturunterschiede T_0 bestätigt, so finden wir, wenn wir die mittleren gefundenen Coefficienten als die wahren annehmen, die grössten Unterschiede der Berechnung und Beobachtung der Erkältung:

für stilles Wasser = 0,41
für 0',268 Geschw. = 0,14
für 1',245 — — = 0,19
für 2',004 — — = 0,08

Wir sehen dass unsere Formel für bewegtes Wasser sehr gut anwendbar ist, denn die stattfindenden Unterschiede können bei dieser Art von Versuchen mit Recht als Fehler der Beobachtung angesehen werden; nur für stilles Wasser findet sich der Unterschied der Rechnung und Beobachtung etwas bedeutend; zum Glücke hat dieses auf unsere Versuche keinen Einfluss, wie wir bald sehen werden.

Stellen wir die verschiedenen Coefficienten zusammen, so haben wir die folgende Vergleichungstabelle

für stilles Wasser ist der Coefficient	= 0,001623	
		Differenz 0,001196
für einen Strom = 0',268 — —	= 0,002819	
		— — 0,000971
— — — = 1',245 — —	= 0,003790	
		— — 0,000017
— — — = 2',004 — —	= 0,003807	

Setzen wir diese Werthe in unsere Formeln (pag. 44) zur Bestimmung der Coefficienten b, d und f unserer allgemeinen Formel für den Coefficienten $a = \alpha + bc + dc^2 + fc^3$ (pag. 43) so finden wir

$$\alpha = + 0{,}001623$$
$$b = + 0{,}0055803$$
$$d = - 0{,}0044675$$
$$f = + 0{,}0011110$$

und unsere Formel wird also

$$\ldots a = 0{,}001623 + 0{,}0055803 \cdot c - 0{,}0044675 \cdot c^2 + 0{,}0011110 \cdot c^3$$

Diese Formel gilt aber nur zwischen 0 und 2 Fuss Geschwindigkeit; wir konnten auf der Newa keine grössere Geschwindigkeit auftreiben. Bei unsern Versuchen auf dem Meere war aber die Geschwindigkeit des Heraufziehens immer über 2 Fuss und meist auch über 3 Fuss. Für 3 Fuss gäbe unsere Formel $a = 0{,}008154$, welches offenbar zu viel ist; wir können also diese Formel bei unseren Versuchen nicht brauchen.

Zum Glücke ergiebt es sich aber schon aus den in obiger Tabelle gefundenen Werthen der Coefficienten, dass wir eine solche Formel zur Berechnung unserer Versuche gar nicht nöthig haben, denn wir sehen aus dieser Tabelle dass der Unterschied der Coefficienten von 1′,245 und 2′,004 so unbedeutend ist (nur 0,000017) dass man ihn mit vollem Rechte für einen Fehler der Beobachtung ansehn kann; es entspricht nämlich dieser Unterschied einem Unterschied der Erkältung von 0°,01 des Thermometers, einer an unserm gebrauchten Thermometer unschätzbaren Grösse. Da nun aber der Coefficient von 1′,245 bis 2′,004 Geschwindigkeit gar nicht, oder wenigstens für uns um eine unbestimmbar kleine Grösse variirt, so wird dieses um so mehr von 2′ bis 3′ und 3′ bis 4′ Geschwindigkeit statt finden und wir haben also den Satz durch die Erfahrung gefunden, dass der Coefficient a unserer allgemeinen Formel (A) für alle Geschwindigkeiten des Stroms über 1′,245 als gleich anzunehmen ist. Da nun bei un-

sern Versuchen auf dem Meere die Geschwindigkeit des Heraufziehens immer mehr als 2′ in der Secunde betrug, so ist unser Coefficient, als Function der Geschwindigkeit betrachtet, immer derselbe.

Es bleibt uns nur noch übrig unsere Formel (A) in Rücksicht auf die Zeit t zu prüfen; zu dem Ende ward wiederum in der Newa das Instrument mit heisserem Wasser gefüllt und bei ungefähr gleichem anfänglichen Temperaturunterschieden T_0 verschiedene Zeiten lang in dem erkältenden Strome gelassen; so ergaben sich folgende Resultate bei einer Temperatur des äussern Wassers $= 11°,3$.

Für 10	Minuten Dauer war	$T_0 =$	13,29	und $T =$	11,89
— 20	— — — —	$=$	13,45	— $=$	11,00
— 30	— — — —	$=$	13, 4	— $=$	10,15
— 40	— — — —	$=$	12,76	— $=$	8,96
— 50	— — — —	$=$	13,43	— $=$	8,63
— 60	— — — —	$=$	13,28	— $=$	7,83

Berechnet man hieraus die Coefficienten a, so findet man

für 10	Minuten Dauer	$a = 0,004834$
— 20	— — —	$a = 0,004366$
— 30	— — —	$a = 0,004021$
— 40	— — —	$a = 0,003838$
— 50	— — —	$a = 0,003841$
— 60	— — —	$a = 0,003824$

Hieraus ersieht man, dass der Coefficient a sich allerdings mit der Zeit des Erwärmens ändere und dass daher unsere Formel Log. $T_0 =$ Lag. $T - at$ nicht ohne Weiteres bei der Correctur unserer Versuche anwendbar sey. Da a mit t variirt, also eine Function von t ist, so versuchten wir es zuerst statt a die Form $\alpha + bt$ zu setzen; wir fanden alsdann nach der Methode der kleinsten Quadrate bei Bestimmung der Coefficienten α und b

$$a = 0,004775 - 0,0000168.\ t$$

und es ergaben sich die Abweichungen der Rechnung von der Beobachtung, wenn man diejenigen, wo die Beobachtung grösser ist, mit —, die, wo das Umgekehrte statt findet, mit + bezeichnet:

für 10 Minut. d. Abweich.	= — 0,000227,	u. das Quadrat d. Abweich. (mit Weglassung der Nullen)		51529
— 20 — — —	= + 0,000073	— — — — —		5329
— 30 — — —	= + 0,000196	— — — — —		38416
— 40 — — —	= + 0,000181	— — — — —		32761
— 50 — — —	= — 0,000014	— — — — —		196
— 60 — — —	= — 0,000192	— — — — —		36864
		Folg. die Summe d. Quadrate d. Fehler	=	165095

Da diese Formel noch zu grosse Abweichungen der Rechnung und Beobachtung zu geben schien, so versuchten wir $a = \alpha + bt + ct^2$ zu setzen und fanden wieder mit Anwendung der Methode der kleinsten Summe der Quadrate

$$a = 0{,}0033667 + 0{,}000088159 . t - 0{,}000001538\, t^2$$

Hieraus ergaben sich die Abweichungen der Rechnung und Beobachtung bei derselben Bedeut. der Zeichen wie oben

für 10 Minuten d. Abw.	= — 0,000650;	folg. das Quadrat d. Abw.	=	422500
— 20 — — —	= + 0,000129	— — — — —	=	16641
— 30 — — —	= + 0,000535	— — — — —	=	286225
— 40 — — —	= + 0,000531	— — — — —	=	281961
— 50 — — —	= + 0,000071	— — — — —	=	5041
— 60 — — —	= — 0,000615	— — — — —	=	378225
		Summe der Quadrate	=	1390593

Hier ist die Summe der Quadrate der Fehler noch um Vieles grösser, als bei der Formel $a = \alpha + bt$; wir können also nach der Formel $a = \alpha + bt + ct^2$ das Gesetz der Abnahme der Coefficienten für die Zunahme der Zeiten nicht genau finden. Wie dieses Gesetz aber auch seyn möge, so werden wir doch um etwas sehr Unbedeutendes fehlen, wenn wir zwischen jeden 10° die einzelnen Grade nach der Formel $a = \alpha + bt$ interpoliren, indem wir die Coeffi-

cienten α und b für die jedesmaligen zwischenliegenden Grade besonders bestimmen z. B. für die zwischen 10° und 20° aus den Beobachtungen bei 10° und 20°, für die zwischen 20° und 30° aus denen bei 20° und 30° u. s. w. Es ist ferner wahrscheinlich, dass die Beobachtung bei 50 Minuten einen kleinen Fehler in sich einschliesst, da sie einen grössern Coeffic. liefert, als die Beobachtung für 40 Minuten. Ein solcher Fehler ist in der That sehr möglich, da bei $T_0 = 20°$ und $t = 50'$ ein Fehler in der 5ten Decimalstelle $= 1$ einem Fehler in der beobachteten Erkältung $= 0{,}015$ entspricht. Wir lassen daher die Beobachtung bei 50 Minuten weg und interpoliren zwischen 40 und 60 Minuten. Auf diese Weise haben wir als Interpolationsformeln

zwischen 0 und 20 Minuten . . . . $a = 0{,}005302 - 0{,}0000468 \cdot t$
— — 20 — 30 — — . . . . $a = 0{,}005056 - 0{,}0000345 \cdot t$
— — 30 — 40 — — . . . . $a = 0{,}004570 - 0{,}0000183 \cdot t$
— — 40 — 60 — — . . . . $a = 0{,}003866 - 0{,}0000007 \cdot t$

und aus diesen Formeln berechneten wir folgende Tafel

t	*a*	*t*	*a*	*t*	*a*	*t*	*a*
1	0,005255	16	0,004553	31	0,004003	46	0,003834
2	0,005209	17	0,004506	32	0,003984	47	0,003833
3	0,005162	18	0,004460	33	0,003966	48	0,003832
4	0,005115	19	0,004413	34	0,003948	49	0,003832
5	0,005068	20	0,004366	35	0,003929	50	0,003831
6	0,005022	21	0,004331	36	0,003911	51	0,003830
7	0,004974	22	0,004297	37	0,003893	52	0,003829
8	0,004928	23	0,004262	38	0,003875	53	0,003829
9	0,004881	24	0,004228	39	0,003856	54	0,003828
10	0,004834	25	0,004193	40	0,003838	55	0,003827
11	0,004787	26	0,004159	41	0,003837	56	0,003827
12	0,004740	27	0,004124	42	0,003837	57	0,003826
13	0,004694	28	0,004090	43	0,003836	58	0,003825
14	0,004647	29	0,004055	44	0,003835	59	0,003825
15	0,004600	30	0,004021	45	0.003834	60	0,003824

Aus dieser Tabelle sehen wir, dass der Coefficient bei 50 Minuten 0,003831 ist, statt dass wir ihn aus den früheren Versuchen für eine Stromgeschwindigkeit über 1,2 Fuss = 0,00380 fanden, also um 0,000031 geringer. Da aber bei den Versuchen, aus denen obige Tabelle entstand, (pag. 273) die Geschwindigkeit des Stroms gleichfalls über 1,2 war, so fragt es sich, welche Bestimmung die richtigere sey. Wir geben der letzteren deshalb den Vorzug, weil die Versuche, aus denen sie hergenommen ist, auf einem Flosse gemacht wurden, statt dass die früheren Versuche, wie schon oben erwähnt wurde, auf einem Boote geschahen; auf dem Flosse aber konnte das Herausheben genauer geschehen, so wie auch das Auf- und Niederschwanken wegfiel, welches beides den, dem Unterschiede des Coefficienten = 0,00003 entsprechenden, geringen Unterschied der Erkältung 0,043 hinlänglich erklärt.

So liefert uns denn die auf der vorhergehenden Seite enthaltene Tabelle den jedesmal anzuwendenden Coefficienten bei unserer Correctur.

Bei unsern Versuchen auf dem Meere ward das Instrument nicht immer in gleichmässiger Temperatur fortbewegt, sondern es durchlief allmählig alle Temperaturen von unten bis oben. So lange wir das Gesetz der Abnahme der Temperaturen des Meeres mit der Zunahme der Tiefe nicht kennen, nehmen wir für jede Reihe von Beobachtungen diese Abnahme innerhalb jeder Station in arithmetischer Progression an und betrachten die Sache so, als habe sich das Instrument während der Zeit des Heraufziehens in der mittleren Temperatur der Station bewegt. Nennt man nun x den Temperaturunterschied von dem Wasser oben und in der Mitte der Station, τ aber die Temperatur wie sie in dem Instrument ist, wenn es oben bei der Station ankömmt, ϑ die Temperatur des Meeres dort oben, so hat man die mittlere Temperatur der Station $= \vartheta - x$ und den Temperaturunterschied nach der Erwärmung zwischen dem Wasser des Instruments und dem, in welchem es sich erwärmt, $= \vartheta - x - \tau$ folglich nach unserer allgemeinen Gleichung (A)

$$\text{Log.}\ (\vartheta - x - \tau) = \text{Log.}\ x - at$$

und hieraus ergiebt sich $x = \frac{10^{at}\ (\vartheta - \tau)}{1 + 10^{at}}$

a wird dann aus unserer Tabelle (pag. 275) entlehnt.

Als Beispiel der wirklichen Berechnung wählen wir die Reihe vom 18. May 1824 aus unserer obigen Reihe von Versuchen (pag. 251) die, wenn man die Correction für die Reckung und den Winkel des Seils bereits nach dem obigen (pag. 265) Beispiel gemacht hat, folgende Gestalt hat

Zeit des Heraufziehens.	Beobachtete Temperatur.	Tiefe in Toisen.
0	26,4 C.	0
6	16,7 C.	140,7
17	5,1 C.	413,0
32	4,9 C.	665,1
56	4,6 C.	914,9

Diese Reihe besteht aus 4 Stationen; für jede muss die Erwärmung besorders berechnet werden:

Für die erste Station ist der Coefficient der Erwärmung bei sechs Minuten aus unserer obigen Tabelle (pag. 275) $a = 0{,}005022$. Die oben so eben gegebene Formel wird also, da hier $\vartheta = 26{,}4$; $\tau = 16{,}7$; $t = 6$ ist:

$$x = \frac{10^{0{,}005022.6}.(26{,}4 - 16{,}7)}{1 + 10^{0{,}005022.6}} = \frac{1{,}07185 \cdot 9{,}7}{2{,}07185} = 5{,}02$$

Wir haben also den Temperaturunterschied von oben und von der Mitte der Station $= 5{,}02$, folglich, da wir angenommen haben die Temperatur wachse in arithmetischer Progression innerhalb jeder Station, der Temperaturunterschied von unten und oben $= 10{,}04$ und die Temperatur unten $= 26{,}4 - 10{,}04 = 16{,}36$ statt der beobachteten 16,7. Die mittlere Temperatur der Station $= 21{,}38$.

Für die zweite Station, die von 140,7 bis 413 T. reicht und $17 - 6 = 11$ Minuten dauerte, können wir die Formel so unmittelbar nicht anwenden, weil wir die am obern Ende der Station oder bei 140,7 T. abgelesene Temperatur

(in unsrer Formel τ) nicht kennen; wir können sie aber finden, indem wir nach der aus dem Obigen bekannten mittleren Temperatur der ersten Station $= 21{,}38$ und der abgelesenen $= 5{,}1$ des zweiten Versuchs in unserer Hauptformel (A) haben

$$\text{Log.}\,(21{,}38 - 5{,}1) = \text{Log.}\,(21{,}38 - \tau) - 0{,}005022 \cdot 6$$

und daraus endlich

$$\tau = 21{,}38 - 10^{0{,}030132} \cdot 16{,}28 = 3{,}93$$

Folglich haben wir $\vartheta = 16{,}36$ (nach der Berechnung für die Correctur in der ersten Station) $\tau = 3{,}93$; $t = 11$ und folglich nach unserer Tabelle $a = 0{,}004787$.

folglich $$x = \frac{10^{0{,}004787 \cdot 11} \cdot 12{,}43}{1 + 10^{0{,}004787 \cdot 11}} = \frac{1{,}129 \cdot 12{,}43}{2{,}129} = 6{,}59$$

Also haben wir für den Unterschied der Temperatur am obern Ende und in der Mitte der zweiten Station 6,59, folglich vom obern und untern Ende $= 13{,}18$, folglich die Temperatur am untern Ende oder bei 413 T. $= 16{,}36 - 13{,}18 = 3{,}18$. Die mittlere Temperatur der Station $= 9{,}77$.

Die dritte Station reicht von $413 \cdot T$ bis $665{,}1 \cdot T$, und die Dauer der Bewegung in dieser Station ist 15 Minuten. Wir fangen damit an zu berechnen, wie die oben abgelesene Temperatur des heraufgeholten Wassers 4°,9 am Anfang der zweiten Station gewesen sey und finden, ganz wie bei der zweiten Station, nur dass hier 4,9 für 5,1 gesetzt werden muss, diese Temperatur

$$21{,}38 - 16{,}48 \cdot 10^{0{,}030132} = 3{,}72$$

und hieraus wiederum auf ganz ähnliche Art die Temperatur am Anfang der dritten Station oder unser gegenwärtiges τ, indem wir nur die mittlere Temperatur der zweiten Station und deren Coefficient, statt der mittleren Temperatur der ersten Station und deren Coefficient anwenden

$$\tau = 9{,}77 - 6{,}05 \cdot 10^{0{,}052657} = 2{,}94$$

Nun ist also $\vartheta = 3{,}18$; $\tau = 2{,}94$; $t = 15$ und dafür aus unserer Tabelle $a = 0{,}004600$

folglich $$x = \frac{10^{0{,}004600 \cdot 15} \cdot 0{,}24}{1 + 10^{0{,}004600 \cdot 15}} = \frac{1{,}172 \cdot 0{,}24}{2{,}172} = 0{,}13$$

Der Temperaturunterschied von oben und der Mitte der dritten Station ist also $= 0{,}13$, folglich der Temperaturunterschied von oben und unten $0{,}26$, also die Temperatur unten $= 3{,}18 - 0{,}26 = 2{,}92$ bei $665{,}1\ T$. Die mittlere Temperatur der Station $= 3{,}05$.

Für die vierte Station, von $665 \cdot T$ bis $914{,}9 \cdot T$, und von der Dauer des Versuchs $= 24$ Minuten, müssen wir nun wiederum die abgelesene Temperatur $= 4{,}6$ berechnen, wie sie am Anfang der zweiten, dann wie sie am Anfang der dritten und endlich wie sie am Anfang der vierten Station gewesen wäre, und das giebt uns unser gegenwärtiges τ, und so finden wir diese Werthe

für den Anfang der zweiten Station $= 21{,}38 - 16{,}78 \cdot 10^{0{,}030132} = 3{,}39$
„ „ „ „ „ dritten „ „ $= 9{,}77 - 6{,}38 \cdot 10^{0{,}052657} = 2{,}57$
„ „ „ „ „ vierten „ „ $= 3{,}05 - 0{,}48 \cdot 10^{0{,}06900} = 2{,}49 = \tau$.

Also haben wir für unsere Station $\vartheta = 2{,}92$; $\tau = 2{,}49$; $t = 24$, also nach der Tabelle $a = 0{,}004228$

$$x = \frac{10^{0{,}004228 \cdot 24} \cdot 0{,}43}{1 + 10^{0{,}004228 \cdot 24}} = \frac{1{,}263 \cdot 0{,}43}{2{,}263} = 0{,}24$$

Also ist der Temperaturunterschied der Mitte und oben $= 0{,}24$, folglich von oben und unten $= 0{,}48$ und die Temperatur unten $= 2{,}92 - 0{,}48 = 2{,}44$.

Aus der Berechnung dieser als Beispiel gewählten Reihe ist die bei unserer Berechnung der Correction angewandte Methode deutlich zu ersehen. Wendet man sie daher auch auf unsere übrigen Beobachtungen an, so verwandelt sich unsere obige Tabelle (pag. 251) in die folgende, wo die Versuche nach der geogr. Breite der Oerter geordnet sind:

Breite.	Länge von Greenwich.	Tiefe in Toisen.	Corrigirte Temperatur.	Bemerkungen.
7° 20′ N.	21° 59′ W.	0	25,80	October 1823.
— — . .	— — . .	539	2,20	Atlantischer Ocean.
21 14 N.	196 1 W.	0	26,40	May 1824.
— — . .	— — . .	140,7	16,36	Südsee.
— — . .	— — . .	413,0	3,18	
— — . .	— — . .	665,1	2,92	
— — . .	— — . .	914,9	2,44	
25 6 N.	156 58 W.	0	21,50	Februar 1825.
— — . .	— — . .	167	14,00	Südsee.
32 6 N.	136 48 W.	0	21,45	August 1825.
— — . .	— — . .	89,8	13,35	Südsee.
— — . .	— — . .	214,0	6,51	
— — . .	— — . .	450,2	3,75	
— — . .	— — . .	592,6	2,21	
32 20 N.	42 30 W.	0	20,86	May 1826. *)
— — . .	— — . .	1014,8	2,24	Atlantischer Ocean.
41 12 N.	141 58 W.	0	19,2	August 1825.
— — . .	— — . .	205,0	5,16	Südsee.
— — . .	— — . .	512,1	2,14	
45 53 N.	15 17 W.	0	14,64	May 1826.
— — . .	— — . .	197,7	10,36	Atlantischer Ocean.
— — . .	— — . .	396,4	9,95	

*) Für die Beobachtung bei 32° 20′ nördlicher Breite auf 1014,8 T. wäre offenbar, wenn die Correctur auf die frühere Art angestellt und die mittlere Temperatur zwischen oben und unten als Temperatur des erwärmenden Mittels angesehen würde, eine zu grosse Correctur gefunden worden, wie wir aus den früheren Beobachtungen, die aus mehreren Stationen bestanden, ersehen können. Wir stellten daher die Correctur auf die Weise an, dass wir bei den Beobachtungen von 21° 14′ Br. die letzte herausnahmen und berechneten nach unserer allgemeinen Formel (pag. 265) wie viel Zeit erfordert wird zu der gefundenen Erwärmung 2,16, wenn man diese, als in der mittleren Temperatur von oben und unten geschehen, betrachtet. Auf diese Weise ergab sich uns sogleich das Glied in jener Formel $at = 0{,}08707$ und wir hatten daher für unseren gegenwärtigen Fall

Tab. III. Fig. 2 enthält unsere obige Versuchsreihe graphisch dargestellt, indem die Abscissen die Tiefen in Toisen, die Ordinaten aber die entsprechenden Temperaturen angeben. Es lassen sich aus der Ansicht dieser graphischen Verzeichnung folgende Schlüsse ziehen:

1. Die Temperatur des Weltmeeres nimmt, von 45° N. bis zum Aequator, bis auf 1000 T. Tiefe beständig ab. Tiefen von mehr als 1000 T. sind noch nicht untersucht worden.

2. Diese Abnahme der Temperatur geschieht anfangs schleunig, wird immer langsamer und zuletzt fast unmerklich.

3. Der Punkt, wo die Abnahme unmerklich zu werden anfängt, scheint mit der grössern Breite höher heraufzurücken. Bei 41° und 32° Breite liegt er zwischen 200 und 300 T., bei 21° bei 400 T. Bei 45° und 53° scheint unsere Beobachtung zwar eine sehr geringe Abnahme anzugeben, die Temperatur ist noch 10° bei 400 T.; allein vielleicht ist diese Beobachtung durch die Nähe des Landes modificirt, da sie im atlantischen Ocean nur 15° von Greenwich, also ziemlich nahe von der europäischen Küste, geschah, während die übrigen in offner Südsee, fern von allem Festlande, statt fanden. Aber auch bei der geringen Temperaturabnahme bemerkt man doch deutlich den Punkt des Unmerklichwerdens derselben bei 200 T.

4. Die niedrigste Temperatur, die wir in der Tiefe fanden, war 2°,2 C., und von dieser Temperatur sind ungefähr alle Tiefen, wo die Abnahme unmerklich zu werden anfängt. Diese Temperatur rückt also nach Obigem mit höherer Breite immer mehr herauf und es wäre interessant zu beobachten, in welcher Breite dieselbe die Oberfläche erreicht.

$$x = \frac{10^{0,08707} \cdot 16,94}{1 + 10^{0,08707}} = 9,31$$

folglich der Unterschied von oben und unten 18,62 und die wahre Temperatur unten $= 20,86 - 18,62 = 2,24$.

Auf diese Art glauben wir in der Correctur der Wahrheit ziemlich nahe gekommen zu seyn.

Das Gesetz der Abnahme der Temperatur oder die Formel für die Curve lässt sich aus unsern wenigen Beobachtungen nicht bestimmen. Eine solche Bestimmung erfordert eine Expedition, die mit Fleiss die Gegenden besucht, wo Windstillen vorherrschend sind, und sie nicht eher verlässt, als bis die Temperatur des Wassers daselbst wenigstens von 100 zu 100 T. genau bestimmt ist. Im Allgemeinen wird die Curve die in unserer Tafel in der Ecke abgebildete Form haben.

ÜBER DEN SALZGEHALT DES WELTMEERES
in verschiedenen Tiefen.

Die Art der Beobachtung des specifischen Gewichtes, so wie das Verfahren, um alle gefundenen specifischen Gewichte auf 14° *R* = 17,5 *C* zu reduciren, findet man in einem der folgenden Aufsätze: über das spezifische Gewicht des Seewassers an der Oberfläche (pag. 285) in verschiedenen Breiten. Hier erwähnen wir bloss, dass wir uns des Instrumentes Nr. 1 bedienten, ausser bei einer Beobachtung im atlantischen Ocean bei 45° 53′ nördlicher Breite, wo Nr. 2 angewandt ward. Die Berechnungen geschahen ganz wie in dem angeführten Aufsatze. Als Resultat ergab sich folgende Tabelle:

Nummer des Versuchs.	Breite.	Länge von Greenwich.	Specifisches Gewicht:	Differenz des specifischen Gewichts, wenn das Wasser der Tiefe vom obern abgezogen wird.	Tiefe des untersuchten Wassers in Toisen.
1.	7° 20′ N.	21°59′ W	1,02574		0
			1,02644	— 0,00070	539
2.	21 14 . .	196 1 . .	1,02701		0
			1,02666	+ 0,00035	665,1
			1,02659	+ 0,00042	929,4
3.	25 6 . .	156 58 . .	1,02706		0
			1,02674	+ 0,00032	167
4.	41 12 . .	141 58 . .	1,02562		0
			1,02609	— 0,00047	205
			1,02658	— 0,00096	512,1
5.	32 6 . .	136 48 . .	1,02678		0
			1,02624	+ 0,00054	214
			1,02651	+ 0,00027	450,2
			1,02629	+ 0,00049	592,6
6.	32 20 . .	42 30 . .	1,02825		0
			1,02714	+ 0,00111	1014,8
7.	45 53 . .	15 17 . .	1,02738		0
			1,02732	+ 0,00006	396,4

Aus dieser Tabelle ersehen wir, dass bei Nr. 1 und 4 das spezifische Gewicht des Meerwassers in der Tiefe ein wenig grösser ist, als an der Oberfläche, dass aber bei Nr. 2, 3 und 5 das Umgekehrte statt findet. Bei Nr. 7 ist das spezifische Gewicht der Oberfläche so wenig von dem in der Tiefe verschieden, dass beide mit vollkommenem Rechte als gleich angesehen werden können. Für die beiden ersten Fälle lässt sich vielleicht annehmen, dass eine an diesem Tage stärkere Ausdünstung diese kleine Vergrösserung des spezifischen Gewichts an der Oberfläche bewirkt habe, so wie vielleicht starke Regen die kleine Verringerung bei 2, 3 und 5; merkwürdig ist es wenigstens, dass die spezifischen Gewichte in den verschiedenen Tiefen ausser der Oberfläche an ein und demselben Orte alle fast vollkommen übereinstimmend sind; hier, wo die eben erwähnten Störungen in dem Gleichbleiben des spezifischen Gewichtes wegfallen, ist auch dieses immer dasselbe. Nur Nr. 6 macht eine auffallende Ausnahme, indem dort das spezifische Gewicht bei 1000 T. Tiefe bedeutend geringer ist, als an der Oberfläche; ein Fehler der Beobachtung ist hier um so weniger annehmbar, da das spezifische Gewicht der Tiefe aus 3 verschiedenen, nach der Correctur vollkommen übereinstimmenden Abwägungen desselben Wassers bei 3 Temperaturen bestimmt ist und das spezifische Gewicht der Oberfläche mit dem des vorhergehenden und folgenden Tages sehr gut harmonirt. Ob die Unregelmässigkeit vielleicht von dem in der Tiefe vom Pol zum Aequator strömenden kälteren und weniger salzigen Wasser herrühre, mögen erst mehrere über diesen Gegenstand angestellte Versuche entscheiden. Lassen wir diesen einen Fall über 1000 T. weg, so folgt aus unsern Versuchen der Satz:

Das Weltmeer hat, vom Aequator bis zu 45° Breite, in allen Tiefen bis auf 1000 T. ein und denselben Salzgehalt.

ÜBER DEN SALZGEHALT DES WELTMEERES, *an der Oberfläche.*

Zur Bestimmung des verschiedenen Salzgehalts des Meeres nach Verschiedenheit der Breiten bietet sich auf Seereisen das Aräometer als das bequemste Mittel dar. Obgleich man dadurch nicht unmittelbar den Salzgehalt angegeben findet, sondern nur das durch denselben bedingte spezifische Gewicht, so ist dieses doch für die Theorie der Erde gleichgültig, da es hier nur auf Verhältnisse ankommt; es fragt sich nur, ob geringe Unterschiede im Salzgehalt noch bedeutende Aenderungen des spez. Gewichtes hervorbringen. Zur Beantwortung dieser Frage heben wir eine Tabelle aus GILBERT's Annalen heraus (Bd. 33 oder Jahrg. 1819. St. 10. pag. 204), welche die Resultate GAY-LUSSAC's enthält, die er bei Abdampfung verschiedener Proben Seewassers in Vergleich mit ihrem spezifischen Gewichte, bei ein und derselben Temperatur von 8° C., fand. Wir haben die Beobachtungen nach den wachsenden spezifischen Gewichten geordnet.

Seewasser von dem spez. Gewicht	= 1,0272	enthält an Procenten Salz	= 3,48
— — — — — —	= 1,0275	— — — — —	= 3,57
— — — — — —	= 1,0278	— — — — —	= 3,77
— — — — — —	= 1,0278	— — — — —	= 3,48
— — — — — —	= 1,0283	— — — — —	= 3,67
— — — — — —	= 1,0284	— — — — —	= 3,57
— — — — — —	= 1,0286	— — — — —	= 3,70
— — — — — —	= 1,0288	— — — — —	= 3,75
— — — — — —	= 1,0289	— — — — —	= 3,68
— — — — — —	= 1,0290	— — — — —	= 3,67
— — — — — —	= 1,0291	— — — — —	= 3,71
— — — — — —	= 1,0293	— — — — —	= 3,61
— — — — — —	= 1,0294	— — — — —	= 3,63
— — — — — —	= 1,0294	— — — — —	= 3,76
— — — — — —	= 1,0297	— — — — —	= 3,75

Bei näherer Betrachtung dieser Tabelle fallen uns sogleich merkliche Irregularitäten auf, indem die Salzgehalte keinesweges eine stetig wachsende Reihe bilden. So z. B. giebt die dritte Beobachtung das Maximum an Salzgehalt, obgleich das spezifische Gewicht geringer ist, als bei den 12 folgenden Beobachtungen u. s. w. Zwar sind die verschiedenen Proben vom Wasser unter ganz verschiedenen Breiten geschöpft, allein das kann offenbar auf das Verhältniss des spezifischen Gewichts zum Salzgehalt keinen Einfluss haben, denn die Verhältnisse der verschiedenen einzelnen Salze des Meerwassers zu einander sind in allen Breiten dieselben und nur das Verhältniss aller zusammen zum Wasser, in dem sie aufgelösst sind, variirt mit der geographischen Lage des Orts (vergl. Gilb. Annalen Bd. 33 pag. 130 neueste Folge). Es muss also entweder die Bestimmung des spezifischen Gewichts oder des Rückstandes beim Verdampfen unzuverlässig seyn und hier werden wir wohl mit vollem Rechte diese Unzuverlässigkeit dem letzten Verfahren zuschreiben können. Bei vollkommener Ruhe beim Beobachten, wie im Laboratorium, und von Physikern, wie die Herren Gay-Lussac und Despretz, die die Bestimmung des spezifischen Gewichts durch Abwägung einer und derselben Flasche mit den verschiedenen Proben von Seewasser bei 8° C. vornahmen, ist bei dieser durchaus kein Fehler zu begreifen; dagegen kann er leicht durch grössere oder geringere Hitze beim Trocknen des Rückstandes verursacht werden. Man sieht also, dass die Bestimmung des spezifischen Gewichtes zur Ausmittelung des relativen Salzgehaltes des Seewassers verschiedener Breiten vor der Bestimmung des Rückstandes beim Verdampfen den Vorzug verdient, um so mehr auf Seereisen, wo die genaue Abwägung auf der Wage unmöglich wird. Um aber doch ungefähr das Verhältniss des spezifischen Gewichts zum Salzgehalt zu haben, nehmen wir mit Gay-Lussac das Mittel aus obiger Tabelle und haben

bei der Temperatur 8° C. entspricht spez. Gew. = 1,0286 ein Salzgehalt = 3,65 pCt.
oder bei — — 14° R. — — — — — = 1,0266 — — — = 3,65 —

Letztere ist die Temperatur, auf die wir unsere Beobachtungen reducirt haben, wie wir gleich sehen werden.

Wir hatten zwei Aräometer zu unserer Disposition; beide waren Aräometer mit Gewichten, das erste, Nr. 1, war in Dorpat, das andere, Nr. 2, in London verfertigt.

Ersteres war von englischem Blech und wog im luftleeren Raum mit einem constanten Auflegegewicht von 2898 Gr. zusammen = 9778 Gr. med. Gew.; mit diesem constanten Auflegegewicht tauchte es in destillirtem Wasser von 14° Reaum. bis zu dem auf seinem dünnen Halse verzeichneten Striche. Eine Zulage von 0,1 Gr. gab bei geringem Schaukeln des Schiffes einen noch sehr sicher zu beobachtenden Ausschlag; bei stärkerem Schaukeln konnten aber nur 0,5 Gr. mit Sicherheit beobachtet werden, daher geht die Genauigkeit auch dann noch bis auf 0,00005 bei Bestimmung des spezifischen Gewichts. Nennt man die Zulage zum constanten Auflegegewicht n, so hat man das spezifische Gewicht für die Temperatur, bei der man beobachtet, $= \frac{9778 + n}{9778}$. Dieses Instrument, Nr. 1, wurde in der Regel von uns gebraucht, weil es genauer war, als das zweite, bis es im letzten Jahre unserer Reise im chinesischen Meere dadurch unbrauchbar ward, dass es unten, wo die Schale angelöthet ist, am hohlen Körper eine Oeffnung bekam, die das Wasser in diesen eindringen liess; von dort ist also immer an dem Instrument Nr. 2 beobachtet worden. Gleichfalls bei sehr starkem Schaukeln ward es unmöglich an Nr. 1 zu beobachten und wir mussten zu Nr. 2 unsre Zuflucht nehmen.

Dieses zweite Instrument war von Atkins in London aus Messing verfertigt, wog 700 Gr. und tauchte mit 300 Gr. Auflage gleichfalls bei 14° R. in destillirtem Wasser bis zum Zeichen; heisst daher n die Zulage zu 300 Gr., so haben wir für die Temperatur des Versuchs das spez. Gewichts $= \frac{1000 + n}{1000}$.

Für die Ausdehnung des Blechs und Messings ward bei beiden Instrumenten das spezifische Gewicht sogleich corrigirt, indem wir die cubische Ausdehnung des ersteren nach Lavoisier und Laplace = 0,000045, die des Messings aber = 0,00007098 für jeden Grad Reaum. setzten. Letztere Angabe ist von le Roy und wir wählten sie, weil sie ungefähr in der Mitte von den zahlreichen An-

gaben steht, die wir darüber haben (vergl. GEHLER's neues phys. Wörterbuch. Art. Ausdehnung).

Um aber das spezifische Gewicht des Meerwassers mit der Genauigkeit bestimmen zu können, die der jetzige Zustand der Naturwissenschaft erfordert, war vor Allem nöthig, die Ausdehnung desselben für die einzelnen Grade des Thermometers genau zu kennen. Diejenigen, die vor uns Beobachtungen über diesen Gegenstand anstellten, begnügten sich unseres Wissens damit, die Ausdehnung für alle Grade des Thermometers gleichförmig anzunehmen; sie erwärmten eine Portion Meerwasser auf einen gewissen Grad, bestimmten die erforderliche Auflage des Aräometers, liessen das Wasser erkalten und bestimmten wiederum die Auflage. Aus dem Unterschiede der beiden Auflagen ersahen sie die für den angewandten Temperaturunterschied erforderliche Zulage. Dividirten sie diese mit der Anzahl von Graden, so hatten sie die Veränderung für jeden Grad.

Allein dass diese Methode unvollkommen sey, ist leicht vorauszusehen, da wir die Anomalien des distillirten Wassers bei der Ausdehnung durch die Wärme kennen. In einer, in Poggend. Annalen der Physik (1828. St. 3) eingerückten, Abhandlung bestimmt Dr. ERMANN jun. die Zusammenziehung des Salzwassers von 1,027 spez. Gewichts von 12° R. bis zu — 3° herab, und bewies, dass dasselbe kein Maximum der Dichtigkeit vor dem Frieren habe, wie das gemeine Wasser. An diese Beobachtungen von ihm knüpften wir eine ähnliche Reihe höher hinauf bis zu 24° R.; daher haben wir, mit seinen Beobachtungen verbunden, eine Reihe von — 3° bis + 24° R., wo alle Bestimmungen im Weltmeere eingeschlossen sind, denn höher pflegt die Temperatur des Meeres nicht zu gehen.

Wir wählten, wie Dr. ERMANN, zu unserer Untersuchung Wasser vom spez. Gewicht = 1,027, weil dies ungefähr das mittlere des Meerwassers ist; um uns aber zu überzeugen, dass sich die Ausdehnung durch die Wärme mit Aenderung des spez. Gewichts nicht bedeutend ändere, stellten wir vorläufig zwei Reihen von Versuchen an über die Ausdehnung zweier Wasserportionen von 1,02

und 1,03 spez. Gewichts, zwischen welchen Grenzen alle Bestimmungen, die wir im offenen Weltmeere erhielten, eingeschlossen sind. Daraus ergab sich folgende Tabelle:

Temperatur C.	Wasser vom spez. Gew. = 1,02.		Temperatur C.	Wasser vom spez. Gew. = 1,03.	
	Spez. Gewichte.	Differenzen.		Spez. Gewichte.	Differenzen.
10°	1,020675	0,000125	10°	1,031450	0,000170
11	1,020550	0,000100	11	1,031280	0,000170
12	1,020450	0,000150	12	1,031110	0,000160
13	1,020300	0,000100	13	1,030950	0,000175
14	1,020200	0,000150	14	1,030775	0,000175
15	1,020050	0,000225	15	1,030600	0,000150
16	1,019825	0,000200	16	1,030450	0,000250
17	1,019625	0,000175	17	1,030200	0,000200
18	1,019450	0,000150	18	1,030000	0,000230
19	1,019300	0,000225	19	1,029770	0,000200
20	1,019075	0,000150	20	1,029570	0,000200
21	1,018925	0,000250	21	1,029370	0,000250
22	1,018675	0,000200	22	1,029120	0,000300
23	1,018475	0,000300	23	1,028820	0,000200
24	1,018175	0,000275	24	1,028620	0,000250
25	1,017900	0,000225	25	1,028370	0,000300
26	1,017675	0,000250	26	1,028070	0,000100
27	1,017425	0,000350	27	1,027970	0,000550
28	1,017075		28	1,027420	

Fasst man die Beobachtungen von 5° zusammen und nimmt das Mittel aus ihnen, aber zur grösseren Genauigkeit so, dass man, um z. B. das Mittel von 20—25 zu haben, die Mittel aus 20—25 aus 19—24 und 21—26 und hieraus wieder das Mittel nimmt, so hat man aus der Columne der Differenzen folgende Zusammenstellung:

Correction für 1° C. zwischen	10°—15° . .	für die Misch. 1,02 = 0,000128 . .	für die Misch. 1,03	= 0,000167
„ „ „ „ „	15°—20° . .	„ „ „ = 0,000187 . .	„ „ „	= 0,000217
„ „ „ „ „	20°—25° . .	„ „ „ = 0,000239 . .	„ „ „	= 0,000243
„ „ „ „ „	25°—28° . .	„ „ „ = 0,000262 . .	„ „ „	= 0,000262

und folglich die Differenzen zwischen beiden Mischungen von

10 — 15° = 0,000039
15 — 20° = 0,000030
20 — 25° = 0,000004
25 — 28° = 0,000000

Man sieht, dass die Unterschiede der Ausdehnung beider Mischungen unbedeutend sind, ja für Temperaturen über 20° ganz verschwinden, denn der Unterschied in der 6ten Stelle ist zu vernachlässigen. Da aber das spezifische Gewicht, wenigstens bei unseren Beobachtungen, selten unter 1,024 sank und sich nie über 1,029 erhob, so werden die Differenzen mit der Mischung = 1,027, mit der die folgende Versuchsreihe gemacht ist, noch um Vieles geringer ausfallen.

Es kam also darauf an, für das spezifische Gewicht = 1,027 die Aenderungen desselben mit jedem Grade der Temperatur zu bestimmen und dazu wurde die folgende Reihe von Versuchen mit einer Mischung von Kochsalz und Wasser von diesem spezifischen Gewicht mit aller möglichen Sorgfalt angestellt. Die Grade sind nach der Scala von Reaum. angegeben und das Thermometer vorher gehörig berichtigt. Die Angaben sind bereits für die Ausdehnung des Messings des Aräometers auf gleiches Volumen reducirt, indem wir nach LE ROY die kubische Ansdehnung des Messings für jeden Grad Reaum. = 0,00007098 setzten.

Therm.	Gewicht eines gleichen Volumen Wasser.	Therm.	Gewicht eines gleichen Volumen Wasser.	Therm.	Gewicht eines gleichen Volumen Wasser.
6°	1028,10 Gr.	13°	1026,33 Gr.	20°	1023,75 Gr.
7	1027,94 —	14	1025,96 —	21	1023,37 —
8	1027,67 —	15	1025,59 —	22	1022,95 —
9	1027,37 —	16	1025,24 —	23	1022,48 —
10	1027,22 —	17	1024,89 —	24	1022,01 —
11	1026,92 —	18	1024,47 —		
12	1026,62 —	19	1024,12 —		

Setzt man diese Beobachtungen mit denen des Dr. ERMANN in Verbindung, indem man die zweite Beobachtung bei 7° mit der in seiner Tabelle (Poggend. Annalen 1828. 3. pag. 375) bei 7° angestellten gleichsetzt *), so erhält man

Temperaturen. Reaum.	Spezifisches Gewicht der Mischung		Temperaturen. Reaum.	Spezifisches Gewicht nach unserer Beobachtung.
	nach Ermann's	nach unsern Beobtungen.		
0	1,00000		13	0,997009
1	0,99976		14	0,996647
2	0,99946		15	0,996287
3	0,99936		16	0,995943
4	0,99924		17	0,995610
5	0,99900		18	0,995200
6	0,99875	0,998726	19	0,994858
7	0,99857	0,998570	20	0,994497
8	0,99830	0,998304	21	0,994135
9	0,99789	0,998020	22	0,993725
10	0,99773	0,997871	23	0;993267
11	0,99758	0,997607	24	0,992808
12	0,99716	0,997293		

*) Wir wählen die zweite Beobachtung unsrer Reihe und nicht die erste bei 6°, weil die erste gleich beim Anfang der Beobachtungen gewöhnlich unzuverlässiger zu seyn pflegt, als die folgenden

*

Aus dieser Tabelle nahmen wir bis 7° Dr. ERMANN'S, von 7° an aber unsere Beobachtungen und suchten die Abnahme der Dichtigkeit bei Zunahme der Temperatur durch die Formel

$$d^t = 1 + at + bt^2 + ct^3$$

auszudrücken, wo d^t die der Temperatur t zukommende Dichtigkeit bedeutet. Indem wir die Coefficienten nach der Methode der kleinsten Summe der Quadrate zu bestimmen suchten, kamen wir auf folgende Endgleichungen

$$298{,}695823 = 300 + 4900 \cdot a + 90000 \cdot b + 1763020 \cdot c$$
$$4875{,}452455 = 4900 + 90000 \cdot a + 1763020 \cdot b + 35970000 \cdot c$$
$$89510{,}810541 = 90000 + 1763020 \cdot a + 35970000 \cdot b + 754740700 \cdot c$$

Hieraus a, b, c bestimmt, ergab sich unsere Formel

$$d^t = 1 - 0{,}00020533 \cdot t + 0{,}0000003723 \cdot t^2 - 0{,}000000188086 \cdot t^3$$

Nach dieser Formel ergab sich die folgende Tabelle:

Thermometer. Reaum.	Spezifisches Gewicht.	Abweichung von der Beobachtung.	Thermometer. Reaum.	Spezifisches Gewicht.	Abweichung von der Beobachtung.
0°	1,000000	0,000000	13°	0,996980	—0,000029
1	0,999795	+0,000035	14	0,996682	+0,000035
2	0,999589	+0,000129	15	0,996369	+0,000082
3	0,999382	+0,000022	16	0,996042	—0,000099
4	0,999173	—0,000067	17	0,995693	+0,000083
5	0,998959	—0,000041	18	0,995328	+0,000128
6	0,998741	—0,000009	19	0,994943	+0,000085
7	0,998516	—0,000054	20	0,994538	+0,000041
8	0,998285	—0,000019	21	0,994110	—0,000025
9	0,998045	+0,000025	22	0,993660	—0,000065
10	0,997796	0,000075	23	0,993186	—0,000081
11	0,997536	—0,000071	24	0,992686	—0,000122
12	0,997265	—0,000028			

Wir haben die Abweichung von der Beobachtung + gesetzt, wenn die Beobachtung kleiner, — wenn sie grösser als das durch Rechnung gefundene spezifische Gewicht ist.

Nach dieser Tabelle sind alle unsere während der Reise erhaltenen Bestimmungen des spezifischen Gewichtes des Meerwassers corrigirt und auf eine und dieselbe Temperatur von 14° R. gebracht; das spez. Gewicht des distillirten Wassers bei dieser Temperatur ist hierbei gleich 1,000000 angenommen.

Auf den folgenden Seiten findet man unsere Beobachtungen, so wie sie der Reihe nach angestellt worden sind.

Tag der Beobachtung. Alt. St.	Breite.	Länge von Greenwich.	Auflage.	Temperatur. Reaum.	Spez. Gewicht corrig. für die Ausdehnung des Metalls.	Spez. Gewicht auf die Temper. =14° reducirt.
1823.						
13. Sept.	50° 25′ N.	2° 39′ W.	Nr.1=266,5	11,4	1,027385	1,026639
			Nr.2=327,1	11,4	1,027289	1,026543
14. —	50 16 —	3 18 —	Nr.1=268,5	12,1	1,027548	1,027043
			Nr.2=327,5	11,9	1,027653	1,026993
15. —	50 10 —	5 4 —	Nr.1=273,5	10,7	1,028124	1,027192
			Nr.2=327,8	10,5	1,028056	1,027072
16. —	48 54 —	5 57 —	Nr.1=264,0	12,24	1,027083	1,026563
			Nr.2=327,2	12,24	1,027331	1,026805
17. —	47 48 —	7 36 —	Nr.1=270,0	12,2	1,027696	1,027170
			Nr.2=327,6	12,2	1,027731	1,027203
18. —	47 10 —	8 33 —	Nr.2=326,9	12,6	1,026766	1,026351
20. —	43 3 —	11 35 —	Nr.2=327,5	13,2	1,027322	1,027083
21. —	41 2 —	12 38 —	Nr.1=267,5	14,2	1,027348	1,027411
			Nr.2=327,3	14,2	1,027286	1,027349
22. —	40 2 —	12 38 —	Nr.1=266,8	15,2	1,027230	1,027608
			Nr.2=327,2	15,1	1,027120	1,027466
24. —	38 0 —	13 20 —	Nr.1=267,0	15,8	1,027223	1,027798
			Nr.2=327,2	15,8	1,027069	1,027644

Tag der Beobachtung.	Breite.	Länge von Greenwich.	Auflage.	Temperatur. Reaum.	Spez. Gewicht corrig. für die Ausdehnung des Metalls.	Spez. Gewicht auf die Temper. =14° reducirt.
1823.						
25. Sept.	36° 20′ N.	14° 6′ W.	Nr.2=327,6	15,7	1,027476	1,028017
26. —	33 9,5 —	14 53 —	Nr.1=265,0	16,2	1,027000	1,027922
			Nr.2=327,4	16,1	1,027247	1,027710
27. —	30 55 —	15 19 —	Nr.1=266,0	16,5	1,027088	1,027902
			Nr.2=327,4	16,5	1,027218	1,028032
28. —	28 13 —	16 14 —	Nr.1=264,0	16,6	1,026880	1,027729
			Nr.2=327,1	16,5	1,026918	1,027732
29. —	25 39 —	17 45 —	Nr.1=263,0	17,7	1,026702	1,027979
			Nr.2=327,0	17,7	1,026730	1,027951
30. —	23 52 —	19 48 —	Nr.1=259,0	17,8	1,026313	1,027598
			Nr.2=326,5	17,8	1,026223	1,027508
1. Octob.	22 24 —	21 23 —	Nr.1=257,6	18,5	1,026137	1,027683
			Nr.2=326,2	18,5	1,025872	1,027418
2. —	21 0 —	23 18 —	Nr.2=326,4	18,8	1,026050	1,027683
3. —	19 1 —	25 5 —	Nr.1=255,8	19,4	1,025912	1,027812
			Nr.2=326,2	19,3	1,025814	1,027674
4. —	16 23 —	26 27 —	Nr.2=325,9	20	1,025463	1,027607
5. —	13 38 —	25 41 —	Nr.2=325,2	20,2	1,024764	1,026994
6. —	11 29 —	24 25 —	Nr.2=325,2	20,2	1,024764	1,026994
7. —	9 54 —	22 59 —	Nr.2=325,0	21,0	1,024490	1,027062
8. —	8 45 —	21 53 —	Nr.2=325,0	21,0	1,024490	1,027062
9. —	7 28 —	21 53 —	Nr.2=323,8	21,0	1,023291	1,025863
10. —	7 20 —	21 59 —	Nr.1=233,1	20,8	1,023432	1,025918
			Nr.2=323,5	20,8	1,023006	1,025492
12. —	6 12 —	21 10 —	Nr.2=324,2	20,4	1,023782	1,026097
13. —	5 45 —	21 39 —	Nr.2=325,0	20,6	1,024590	1,026921
14. —	5 10 —	20 32 —	Nr.2=324,2	20,4	1,023788	1,026103
16. —	5 1 —	18 44 —	Nr.2=324,1	20,4	1,023635	1,025950

Tag der Beobachtung.	Breite.	Länge von Greenwich.	Auflage.	Temperatur. Reaum.	Spez. Gewicht corrig. für die Ausdehnung des Metalls.	Spez. Gewicht auf die Temper. =14° reducirt.
1823.						
17. Octob.	4° 23′ N.	18° 46′ W.	Nr. 2 = 324,1	20,4	1,023635	1,025950
18. —	3 33 —	20 15 —	Nr. 2 = 324.6	20,2	1,024149	1,026379
19. —	3 12 —	21 11 —	Nr. 2 = 325,2	20,0	1,024764	1,026908
20. —	2 3 —	22 46 —	Nr. 2 = 325,6	19,2	1,025221	1,027001
21. —	0 00 —	24 16,5	Nr. 1 = 248,5	19,0	1,025184	1,026923
			Nr. 2 = 326,0	19,0	1,025636	1,027375
22. —	1 25 S.	26 10 —	Nr. 2 = 325,9	19,2	1,025521	1,027341
23. —	4 7 —	28 00 —	Nr. 1 = 253,5	19,4	1,025676	1,027577
24. —	6 51 —	29 19 —	= 254,0	19,4	1,025727	1,027628
25. —	9 36 —	31 00 —	= 255,2	19,4	1,025850	1,027751
27. —	14 16 —	34 14 —	= 262,6	18,9	1,026630	1,028331
28. —	16 15 —	34 58 —	= 261,9	19,1	1,026537	1,028316
29. —	18 29 —	35 56 —	= 262,2	19,0	1,026584	1,028323
30. —	20 11 —	37 33 —	= 263,3	18,7	1,026710	1,028333
31. —	22 21 —	39 28 —	= 263,3	18,6	1,026715	1,028300
30. Nov.	26 55 —	44 5 —	= 261,9	17,3	1,026632	1,027730
1. Decbr.	29 21 —	45 16 —	= 265,5	17,7	1,026036	1,027280
2. —	31 12 —	46 25 —	= 263,7	17,1	1,026825	1,027850
3. —	32 37 —	47 19 —	= 261,5	17,4	1,026586	1,027721
4. —	33 31 —	49 22 —	Nr. 2 = 327,0	16,5	1,026818	1,027632
5. —	34 58 —	51 3 —	Nr. 1 = 260,0	15,0	1,026544	1,026857
5. — (um 9h Ab.)			= 261,5	14,0	1,026743	1,026743
6. —	37 24 —	52 31 —	= 248,8	13,7	1,025459	1,025370
8. —	40 41 —	53 20 —	= 270,5	13,2	1,027700	1,027462
9. —	43 45 —	55 32 —	= 266,0	10,2	1,027380	1,026318
10. —	54 2 —	56 34 —	= 267,5	10,2	1,027533	1,026471
11. —	44 49 —	48 9 —	= 263,5	11,6	1,027060	1,026369

Tag der Beobachtung.	Breite.	Länge von Greenwich.	Auflage.	Temperatur. Reaum.	Spez. Gewicht corrig. für die Ausdehnung des Metalls.	Spez. Gewicht auf die Temper. = 14° reducirt.
1823.						
14. Decbr.	44° 15′ S.	60° 33′ W.	Nr. 2 = 326,4	10,5	1,026655	1,025671
18. —	48 7 —	63 15 —	Nr. 1 = 262,1	9,3	1,027022	1,025733
19. —	48 54 —	63 14 —	= 262,6	9,2	1,027078	1,025764
20. —	50 18 —	63 24 —	= 259,1	11,0	1,026637	1,025783
22. —	53 27 —	63 58 —	= 265,1	9,1	1,027339	1,026001
23. —	54 6 —	64 15 —	= 263,1	8,8	1,027147	1,025736
24. —	54 49 —	63 5 —	= 261,1	7,7	1,026994	1,025345
25. —	55 59 —	66 7 —	= 259,1	9,8	1,026692	1,025528
26. —	56 2 —	66 41 —	= 259,1	9,8	1,026692	1,025528
27. —	56 41 —	68 19 —	= 262,1	9,9	1,026994	1,025855
29. —	57 27 —	70 47 —	= 268,7	8,1	1,027753	1,026174
1824.						
4. Januar.	54 17 —	80 57 —	= 268,1	7,9	1,027701	1,026075
8. —	49 6 —	80 23 —	Nr. 2 = 326,7	10,0	1,026992	1,025872
11. —	44 47 —	78 22 —	Nr. 1 = 257,1	11,0	1,206435	1,025581
12. —	43 6 —	78 14 —	= 256,1	12,4	1,026266	1,025797
15. —	37 55 —	74 28 —	= 260,1	13,9	1,026605	1,026575
4. Febr.	32 36 —	74 59 —	= 250,1	18,5	1,025370	1,026916
5. —	29 43 —	77 38 —	= 252,1	15,7	1,025727	1,026268
6. —	27 31 —	79 48 —	= 253,6	16,3	1,025830	1,026575
8. —	25 3 —	83 24 —	= 255,1	17,0	1,025950	1,026939
9. —	23 49 —	84 49 —	= 254,1	17,3	1,025823	1,026921
10. —	22 18 —	86 39 —	= 255,6	17,6	1,025974	1,027182
11. —	21 35 —	88 41 —	= 252,1	17,7	1,025634	1,026878
13. —	19 41 —	94 9 —	= 256,6	18,6	1,026030	1,027615
14. —	19 17 —	97 8 —	= 258,1	18,5	1,026188	1,027734
15. —	18 58 —	99 53 —	= 257,6	18,7	1,026128	1,027751
16. —	18 41 —	102 34 —	= 257,1	19,0	1,026063	1,027791

Tag der Beobachtung.	Breite.	Länge von Greenwich.	Auflage.	Temperatur. Reaum.	Spez. Gewicht corrig. für die Ausdehnung des Metalls.	Spez. Gewicht auf die Temper. = 14° reducirt.
1824.						
17. Febr.	18° 24′ S.	105° 9′ W	Nr. 1 = 256,6	19,3	1,025961	1,027821
20. —	17 35 —	113 34 —	= 252,6	20,2	1,025547	1,027787
21. —	17 25 —	116 15 —	= 254,6	20,2	1,025752	1,027992
22. —	17 13 —	119 6 —	= 254,1	20,6	1,025683	1,028084
24. —	16 50 —	124 15 —	= 250,6	20,7	1,025343	1,027817
27. —	16 21 —	131 52 —	= 248,6	21,4	1,025083	1,027835
28. —	16 8 —	134 34 —	= 249,1	21,0	1,025153	1,027725
29. —	16 2 —	136 13 —	= 248,6	21,0	1,025101	1,027673
1. März.	16 7 —	138 00 —	= 244,3	21,8	1,024625	1,027557
2. —	15 54 —	139 19 —	= 245,1	21,8	1,024706	1,027638
4. —	15 57 —	140 8 —	= 244,1	21,9	1,024590	1,027567
7. —	14 32 —	143 55 —	= 241,6	22,6	1,024313	1,027599
10. —	15 42 —	146 14 —	= 243,1	21,3	1,024525	1,027232
12. —	16 55 —	148 52 —	= 240,8	22,4	1,024240	1,027452
29. —	15 16 —	159 41 —	= 244,3	21,8	1,024625	1,027557
30. —	15 6 —	161 55 —	= 238,1	22,4	1,023964	1,027176
1. April.	14 57 —	165 46 —	= 241,1	21,6	1,024308	1,027160
2. —	14 30 —	168 1 —	= 235,1	22,2	1,023666	1,026783
4. —	14 15 —	170 50 —	= 241,3	21,9	1,024078	1,027055
7. —	13 19 —	172 54 —	= 235,1	22,4	1,023634	1,026846
8. —	11 24 —	174 14 —	= 232,1	22,2	1,023360	1,026477
9. —	9 59 —	175 6 —	= 231,6	22,8	1,023281	1,026682
11. —	8 2 —	175 33 —	= 236,9	22,1	1,023855	1,026924
14. —	4 39 —	177 29 —	= 240,1	22,4	1,024168	1,027380
18. —	2 50 —	177 55 —	= 236,1	22,8	1,023741	1,027142
21. —	1 28 —	178 52 —	= 241,3	21,8	1,024319	1,027251
23. —	1 1 N.	180 26 —	= 238,5	22,6	1,023995	1,027281
27. —	8 22 —	186 52 —	= 240,1	20,6	1,024251	1,027537

Tag der Beobachtung.	Breite.	Länge von Greenwich.	Auflage.	Temperatur. Reaum.	Spez. Gewicht corrig. für die Ausdehnung d. Metalls.	Spez. Gewicht auf die Temper. = 14° reducirt.
1824.						
7. May.	10° 2′ N.	191° 3′ W	Nr. 1 = 239,3	21,0	1,024151	1,026723
9. —	13 3 —	192 35 —	= 239,1	21,1	1,024126	1,026743
10. —	15 10 —	193 21 —	= 240,6	21,0	1,024284	1,026856
11. —	17 8 —	194 5 —	= 238,7	21,6	1,024062	1,026904
13. —	18 59 —	195 2 —	= 241,1	21,8	1,024298	1,027230
15. —	19 29 —	195 36 —	= 243,1	21,0	1,024549	1,027121
17. —	21 14 —	196 10 —	= 246,1	20,4	1,024875	1,027190
18. —	21 14 —	196 1 —	= 242,5	21,2	1,024469	1,027131
19. —	21 44 —	195 44 —	= 245,7	20,4	1,024833	1,027148
21. —	23 33 —	196 25 —	= 245,6	20,8	1,024804	1,027290
26. —	33 5 —	201 4 —	= 259,2	14,7	1,026476	1,026695
27. —	34 15 —	201 2 —	= 254,6	16,6	1,025918	1,026767
29. —	37 2 —	202 00 —	= 258,8	15,3	1,026408	1,026819
31. —	41 52 —	200 52 —	= 255,6	13,8	1,026149	1,026089
4. Juny.	46 42 —	200 14 —	= 263,1	6,2	1,027268	1,025254
5. —	47 33 —	199 29 —	= 261,3	7,8	1,027010	1,025361
6. —	49 22 —	199 42 —	= 261,3	7,7	1,027010	1,025191
21. July.	50 25 —	192 26 —	= 259,6	7,8	1,026692	1,025042
23. —	50 2 —	187 16 —	= 258,6	9,0	1,026678	1,025315
25. —	49 50 —	184 41 —	= 258,6	9,0	1,026678	1,025315
27. —	49 36 —	180 45 —	= 254,1	9,4	1,026200	1,024937
28. —	49 27 —	178 49 —	= 255,0	10,1	1,026259	1,025171
3. Aug.	51 8 —	154 36 —	= 255,4	9,2	1,026341	1,025028
4. —	52 7 —	151 10 —	= 252,6	10,2	1,026009	1,024947
5. —	52 55 —	148 10 —	= 254,5	10,1	1,026209	1,025121
6. —	53 52 —	144 58 —	= 247,1	13,2	1,025308	1,025074
8. —	56 22 —	138 1 —	= 247,1	10,8	1,025419	1,024563
29. Nov.	27 53 —	128 17 —	= 256,6	14,3	1,026228	1,026322

Tag der Beobachtung.	Breite.	Länge von Greenwich.	Auflage.	Temperatur. Reaum.	Spez. Gewicht corrig. für die Ausdehnung des Metalls.	Spez. Gewicht auf die Temper. = 14° reducirt.
1824.						
1. Decbr.	25° 30′ N.	130° 46′ W	Nr. 1 = 256,6	15,2	1,026186	1,026564
3. —	23 12 —	134 27 —	= 255,6	16,4	1,026029	1,026729
10. —	19 47 —	147 6 —	= 252,4	17,7	1,025642	1,026787
11. —	20 13 —	150 35 —	= 252,4	17,8	1,025638	1,026919
12. —	21 5 —	153 42 —	= 252,8	17,8	1,025679	1,026960
13. —	21 16 —	156 9 —	= 253,1	17,8	1,025710	1,026991
1825.						
4. Febr.	23 5 —	157 53 —	= 257,1	17,1	1,026151	1,027176
5. —	23 41 —	156 40 —	= 256,6	17,1	1,026099	1,027124
8. —	25 6 —	156 58 —	= 256,3	17,1	1,026069	1,027094
10. —	27 52 —	156 34 —	= 262,6	14,9	1,026714	1,026996
11. —	29 34 —	156 00 —	= 263,1	14,0	1,026907	1,026907
14. August.	55 11 —	139 13 —	= 252,6	11,4	1,025717	1,024971
16. —	51 32 —	138 57 —	= 256,6	10,2	1,206412	1,025350
18. —	48 9 —	139 29 —	= 255,6	11,1	1,026320	1,025493
19. —	46 9 —	140 32 —	= 263,6	12,1	1,026024	1,025469
21. —	44 15 —	140 28 —	= 251,1	13,0	1,025726	1,025428
23. —	41 25 —	141 43 —	= 251,2	13,8	1,025699	1,025639
24. —	41 12 —	141 58 —	= 246,6	15,8	1,025137	1,025712
25. —	40 42 —	142 41 —	= 247,6	15,6	1,025254	1,025763
26. —	39 46 —	142 40 —	= 247,1	15,4	1,025206	1,025650
27. —	37 30 —	140 47 —	= 252,6	16,1	1,025736	1,026446
28. —	35 22 —	139 19 —	= 254,2	16,3	1,025891	1,026636
30. —	32 53 —	137 48 —	= 252,6	17,3	1,025680	1,026778
1. Sept.	31 17 —	137 5 —	= 256,1	16,6	1,026072	1,026921
3. —	28 54 —	137 57 —	= 256,3	17,4	1,026054	1,027189
4. —	27 6 —	138 47 —	= 253,1	17,8	1,025710	1,026991
6. —	24 49 —	142 15 —	= 253,1	18,6	1,025673	1,027258

Tag der Beobachtung.	Breite.	Länge von Greenwich.	Auflage.	Temperatur. Reaum.	Spez. Gewicht corrig. sür die Ausdehnung des Metalls.	Spez. Gewicht auf die Temper. = 14° reducirt.
1825.						
8. Sept.	23° 27′ N.	146° 58′ W	Nr. 1 = 248,6	19,7	1,025161	1,027184
10. —	21 59 —	151 1 —	= 249,1	20,2	1,025190	1,027419
12. —	21 7 —	154 19 —	= 247,3	20,4	1,024977	1,027312
21. —	18 36 —	161 13 —	= 243,1	20,6	1,024558	1,026959
23. —	16 44 —	163 50 —	= 243,6	21,0	1,024590	1,027162
25. —	15 23 —	127 22 —	= 242,4	21,2	1,024482	1,027144
27. —	14 32 —	169 38 —	= 241,8	21,4	1,024388	1,027140
1. Octob.	12 6 —	181 18 —	= 239,8	21,8	1,024166	1,027098
3. —	11 19 —	186 5 —	= 240,1	21,5	1,024209	1,027006
5. —	11 11 —	189 56 —	= 236,6	21,4	1,023833	1,026585
8. —	11 11 —	193 35 —	= 237,6	21,7	1,023968	1,026855
0. —	11 37 —	195 40 —	= 236,1	21,8	1,023787	1,026719
12. —	11 34 —	198 27 —	= 234,9	22,0	1,023654	1,026676
26. —	18 1 —	223 12 —	= 238,1	22,3	1,023969	1,027132
28. —	19 57 —	228 59 —	= 239,4	21,9	1,024072	1,027049
29. —	20 12 —	230 59 —	= 241,1	21,6	1,024308	1,027150
31. —	20 13 —	234 28 —	= 242,1	21,0	1,024437	1,027009
2. Nov.	20 8 —	237 56 —	= 239,1	21,2	1,024121	1,026783
3. —	18 12 —	239 44 —	= 234,6	21,3	1,023659	1,026362
5. —	16 28 —	240 33 —	= 228,1	22,2	1,022948	1,026065
1826.						
12. Januar.	13 29 —	244 17 —	= 234,6	20,2	1,023707	1,025937
13. —	13 00 —	246 47 —	= 239,6	19,3	1,024262	1,026122
15. —	9 17 —	251 20 —	= 241,1	19,0	1,024428	1,026167
18. —	5 12 —	254 50 —	= 229,6	21,7	1,023126	1,026013
20. —	2 42 —	255 22 —	= 228,8	21,0	1,023070	1,025642
27. —	6 58 S.	255 26 —	Nr. 2 = 323,5	21,4	1,022726	1,025478
28. —	9 15 —	256 4 —	= 323,2	21,7	1,022640	1,025527

Tag der Beobachtung.	Breite.	Länge von Greenwich.	Auflage.	Temperatur. Reaum.	Spez. Gewicht corrig. für die Ausdehnung des Metalls.	Spez. Gewicht auf die Temper. =14° reducirt.
1826.						
30. Jan.	12° 13' S.	256° 9' W	Nr.2=323,4	21,1	1,022883	1,025500
2. Febr.	12 29 —	257 59 —	=324,1	20,6	1,023620	1,026621
3. —	13 19 —	259 56 —	=324,4	20,2	1,023949	1,026179
5. —	14 36 —	265 5 —	=324,0	20,9	1,023499	1,026028
6. —	14 6 —	266 48 —	=324,1	20,7	1,023613	1,026057
8. —	14 55 —	269 46 —	=324,3	20,6	1,023820	1,026221
9. —	16 24 —	273 5 —	=324,3	20,7	1,023813	1,026257
11. —	18 23 —	278 5 —	=324,5	20,3	1,024042	1,026314
12. —	19 43 —	281 35 —	=324,9	20,0	1,024464	1,026608
13. —	20 45 —	284 59 —	=325,5	19,8	1,024628	1,026691
14. —	22 2 —	288 25 —	=325,0	20,0	1,024564	1,026708
15. —	22 39 —	291 31 —	=325,0	20,0	1,024564	1,026708
17. —	23 33 —	294 26 —	=325,0	19,9	1,024571	1,026675
19. —	24 33 —	298 18 —	=325,0	19,7	1,024585	1,026607
20. —	25 4 —	301 9 —	=325,0	20,0	1,024564	1,026708
22. —	26 55 —	306 22 —	=325,0	20,1	1,024556	1,026743
26. —	28 26 —	312 49 —	=325,5	19,0	1,025143	1,026873
27. —	28 48 —	315 2 —	=325,4	19,0	1,025036	1,026775
1. März.	30 5 —	320 4 —	=325,5	18,9	1,025143	1,026844
3. —	31 24 —	322 46 —	=325,8	18,7	1,025458	1,027081
8. —	34 2 —	327 9 —	=326,1	17,1	1,025874	1,026899
11. —	33 58 —	330 34 —	=326,3	16,9	1,026089	1,027043
13. —	34 7 —	332 18 —	=326,4	16,6	1,026210	1,027059
14. —	35 10 —	335 28 —	=326,0	17,2	1,025760	1,026858
15. —	35 21 —	339 17 —	=326,5	16,7	1,026303	1,027187
17. —	34 3 —	342 31 —	=326,7	15,2	1,026613	1,026991
18. —	31 49 —	343 36 —	=326,7	13,9	1,026707	1,026671
19. —	30 34 —	345 13 —	=327,0	14,8	1,026941	1,027191

Tag der Beobachtung.	Breite.	Länge von Greenwich.	Auflage.	Temperatur. Reaum.	Spez. Gewicht corrig. für die Ausdehnung des Metalls.	Spez. Gewicht auf die Temper. =14° reducirt.
1826.						
20. März.	28° 46′ S.	347°29′W	Nr.2 =326,75	15,6	1,026634	1,027143
21. —	26 45 —	350 30 —	=326,8	15,7	1,026676	1,027218
22. —	24 49 —	350 30 —	=326,6	16,0	1,026454	1,027099
24. —	21 29 —	357 49 —	=327,1	16,9	1,026888	1,027842
27. —	18 5 —	2 44 —	=327,0	18,0	1,026472	1,027826
30. —	15 58 —	5 49 —	=327,0	17,9	1,026716	1,028034
8. April.	14 18 —	8 7 —	=326,6	18,7	1,026255	1,027878
10. —	11 12 —	12 33 —	=326,3	20,1	1,025856	1,028043
12. —	8 4 —	16 19 —	=325,4	21,1	1,024883	1,027500
15. —	2 20 —	22 18 —	=325,4	20,8	1,024905	1,027391
17. —	1 55 N.	23 10 —	=324,3	21,4	1,023762	1,026514
19. —	3 22 —	23 30 —	=324,5	21,7	1,023940	1,026827
21. —	4 36 —	25 24 —	=325,4	20,8	1,024905	1,027391
23. —	6 8 —	28 41 —	=325,9	20,2	1,025448	1,027678
26. —	11 22 —	33 48 —	=326,55	18,5	1,026222	1,027768
27. —	13 15 —	35 23 —	=326,6	18,3	1,026287	1,027756
28. —	15 11 —	36 41 —	=326,4	18,6	1,026041	1,027626
29. —	17 16 —	37 57 —	=326,9	18,6	1,026564	1,028149
30. —	19 22 —	39 13 —	=327,4	18,3	1,027086	1,028555
1. May.	21 45 —	40 33 —	=327,5	18,0	1,027208	1,028562
2. —	24 10 —	41 18 —	=327,6	17,1	1,027374	1,028399
3. —	27 7 —	41 45 —	=327,7	16,8	1,027495	1,028414
5. —	31 55 —	42 18 —	=327,5	16,8	1,027295	1,028214
6. —	32 20 —	42 30 —	=327,5	16,7	1,027300	1,028184
8. —	35 20 —	40 2 —	=327,7	15,4	1,027600	1,028044
9. —	36 43 —	37 17 —	=327,75	14,8	1,027735	1,027798
10. —	38 3 —	36 57 —	=327,85	13,7	1,027872	1,027783
11. —	39 53 —	36 37 —	=328,0	13,8	1,028015	1,027955

Tag der Beobachtung.	Breite.	Länge von Greenwich.	Auflage.	Temperatur. Reaum.	Spez. Gewicht corrig. für die Ausdehnung d. Metalls.	Spez. Gewicht auf die Temper. =14° reducirt.
1826.						
12. May.	41° 6′ N.	34° 15′ W	Nr. 2 = 327,9	13,6	1,027929	1,027710
14. —	42 40 —	30 31 —	= 328,0	13,3	1,028051	1,027842
16. —	43 17 —	24 8 —	= 328,02	12,6	1,028127	1,027715
19. —	44 0 —	18 39 —	= 328,2	12,1	1,028339	1,027784
21. —	45 1 —	17 16 —	= 327,95	11,3	1,028147	1,027374
23. —	45 31 —	16 22 —	= 328,1	11,8	1,028260	1,027623
24. —	45 53 —	15 17 —	= 327,9	12,0	1,028044	1,027481
26. —	47 19 —	15 54 —	= 327,8	13,6	1,027831	1,027712
29. —	48 16 —	11 57	= 327,8	12,2	1,027931	1,027405
1. Juny.	49 30 —	6 14 —	= 327,7	12,3	1,027824	1,027325

Aus diesen nach der Zeit der Anstellung geordneten Beobachtungen enthält die nun folgende Tabelle alle Bestimmungen im atlantischen Ocean, der geographischen Breite nach geordnet, um zu sehen, ob sich ein allgemeines Gesetz der Abnahme des Salzgehaltes mit der höhern Breite ableiten lasse.

Atlantischer Ocean.

Breite.	Länge von Greenwich.	Spez. Gewicht.	Monat der Beobachtung.
50° 25′ N.	2° 39′ W.	1,026639	September.
50 16 —	3 18 —	1,026993	——
50 10 —	5 4 —	1,027192	——
49 30 —	6 14 —	1,027325	May.
48 54 —	5 57 —	1,026563	September.
48 10 —	11 57 —	1,027405	May.
47 48 —	7 36 —	1,027170	September.
47 19 —	15 54 —	1,027712	May.
47 10 —	8 33 —	1,026354	September.

Atlantischer Ocean.

Breite.	Länge von Grenwich.	Spez. Gewicht.	Monat der Beobachtung.
45° 53′ N.	15° 17′ W.	1,027451	May.
45 31 —	16 22 —	1,027623	——
45 1 —	17 16 —	1,027374	——
44 0 —	18 39 —	1,027784	——
43 17 —	24 8 —	1,027715	——
43 3 —	11 35 —	1,027083	September.
42 40 —	30 31 —	1,027842	May.
41 6 —	34 15 —	1,027710	——
41 2 —	12 38 —	1,027411	September.
40 2 —	12 38 —	1,027608	——
39 53 —	36 37 —	1,027955	May.
38 3 —	36 57 —	1,027783	——
38 0 —	13 20 —	1,027798	September.
36 43 —	37 17 —	1,027798	May.
36 20 —	14 6 —	1,028017	September.
35 20 —	40 2 —	1,028049	May.
33 9 —	14 53 —	1,027710	September.
32 20 —	42 30 —	1,028184	May.
31 53 —	42 18 —	1,028214	——
31 49 —	42 10 —	1,028195	——
30 55 —	15 19 —	1,027902	September.
28 13 —	16 14 —	1,027729	——
27 7 —	41 45 —	1,028414	May.
25 39 —	17 45 —	1,027951	September.
24 10 —	41 48 —	1,028399	May.
23 52 —	19 48 —	1,027598	September.
22 24 —	21 23 —	1,027683	October.
21 45 —	40 33 —	1,028562	May.

Atlantischer Ocean.

Breite.	Länge von Greenwich.	Spez. Gewicht.	Monat der Beobachtung.
21° 00′ N.	23° 18′ W.	1,027711	October.
19 22 —	39 13 —	1,028555	April.
19 1 —	25 5 —	1,027812	October.
17 16 —	37 57 —	1,028149	April.
16 23 —	26 27 —	1,027607	October.
15 11 —	36 41 —	1,027626	April.
13 38 —	25 41 —	1,026994	October.
13 15 —	35 23 —	1,027756	April.
11 29 —	24 25 —	1,026980	October.
11 22 —	33 48 —	1,027768	April.
9 45 —	22 59 —	1,027062	October.
7 28 —	21 53 —	1,025863	——
7 20 —	21 59 —	1,025918	——
6 12 —	21 10 —	1,026097	——
6 8 —	28 41 —	1,027678	April.
5 45 —	21 39 —	1,026921	October.
5 10 —	20 32 —	1,026103	——
5 1 —	18 44 —	1,025950	——
4 36 —	25 24 —	1,027391	April.
3 33 —	20 15 —	1,026379	October.
3 22 —	23 30 —	1,026827	April.
3 12 —	21 11 —	1,026908	October.
2 3 —	22 46 —	1,027001	——
1 55 —	23 10 —	1,026514	April.
0 00 —	24 16 —	1,027375	October.
1 25 S.	26 10 —	1,0273410	——
2 20 —	22 18 —	1,027391	April.
4 7 —	28 00 —	1,027577	October.

Atlantischer Ocean.

Breite.	Länge von Greenwich.	Spez. Gewicht.	Monat der Beobachtung.
6° 51′ S.	29° 19′ W.	1,027628	October.
8 4 —	16 19 —	1,027500	April.
9 36 —	31 00 —	1,027751	October.
11 12 —	12 33 —	1,028043	April.
14 16 —	34 14 —	1,028244	October.
14 18 —	8 7 —	1,027875	April.
15 58 —	5 49 —	1,028034	März.
16 15 —	34 58 —	1,028316	October.
18 5 —	2 44 —	1,027826	März.
18 29 —	35 56 —	1,028323	October.
20 11 —	37 33 —	1,028333	——
21 29 —	357 49 —	1,027842	März.
22 21 —	39 28 —	1,028300	October.
24 49 —	350 30 —	1,027099	März.
26 45 —	350 30 —	1,027218	——
26 55 —	44 5 —	1,027730	November.
28 46 —	347 29 —	1,027143	März.
29 21 —	45 16 —	1,027280	December.
30 34 —	345 13 —	1,027191	März.
31 12 —	46 25 —	1,027850	December.
31 49 —	343 36 —	1,026677	März.
32 37 —	47 19 —	1,027721	December.
33 31 —	49 22 —	1,027632	——
34 3 —	342 31 —	1,026991	März.
34 58 —	51 3 —	1,026857	December.
35 00 —	51 16 —	1,026743	——
37 24 —	52 31 —	1,025570	——
40 41 —	52 20 —	1,027462	——

Atlantischer Ocean.

Breite.	Länge von Greenwich.	Spez. Gewicht.	Monat der Beobachtung.
43° 45′ —	55° 32′ W.	1,026318	December.
44 2 —	56 34 —	1,026471	——
44 49 —	48 9 —	1,026369	——
44 15 —	60 33 —	1,025675	——
48 7 —	63 15 —	1,025733	——
48 54 —	63 14 —	1,025764	——
50 18 —	63 24 —	1,025764	——
53 27 —	63 58 —	1,026001	——
54 6 —	64 15 —	1,025736	——
54 49 —	63 5 —	1,025345	——
55 59 —	66 7 —	1,025528	——
56 41 —	68 19 —	1,025855	——

Aus dieser Zusammenstellung der Beobachtungen des spez. Gew. des atlantischen Oceans sind die beiden Beobachtungszeiten bei der Hin- und Rückreise sogleich zu unterscheiden. Nämlich die Beobachtungen im May, Apr. und März geschahen auf der Rückreise 1826 und die im Sept., Octob., Novemb., December auf der Hinreise 1823. Betrachtet man nun die Reihe der Beobachtungen, so findet man, dass, wenn sich eine Beobachtung vom May z. B. mit einer vom Septemb. (z. B. bei 24°10′ und 23°52 nördl. Br.) unmittelbar folgt, ein bedeutender Unterschied im spez. Gew. statt findet. Auf den ersten Blick möchte man daher sagen, solche Beobachtungen in verschiednen Jahren seien nicht mit einander zu verbinden; allein unter diesen Beobachtungen findet nicht blos der Unterschied der Zeit, sondern auch der der Länge statt und es ist daher die Frage, ob diese letzte, nämlich die verschiedene Länge, nicht allein die Differenzen zu erklären im Stande sey. Bei genauerer Ansicht unserer Tabelle wird uns Letzteres immer klarer werden. Wir sehen nämlich anfangs, wo die Beobachtungen vom May 1826 westlicher sind als die vom Sept. 1823, dass jene durchgängig

ein grösseres spez. Gew. geben. Von 3° N. bis 0° Br. werden die Längen beider Beobachtungen vom Apr. 1826 und Oct. 1823 ziemlich gleich und dort finden sich auch fast ganz dieselben spez. Gewichte; von nun an sind die Beobachtungen vom Oct., Nov., Dec. mehr westlich und von dort an ist auch das gefundene spez. Gewicht in diesen Monaten durchgängig grösser als das vom Apr. und März in denselben Breiten. Wir können also unsere Anomalieen vollkommen erklären, wenn wir den Satz feststellen: der atlantische Ocean ist von grösserem Salzgehalt im Westen als im Osten bei gleicher geographischer Breite. Dieser Satz folgt aus unsern Beobachtungen unwiderleglich.

Hieraus ersieht man aber auch, dass uns solche Tabellen wie die vorliegende des atlantischen Oceans, wo die Beobachtungen nach der Breite geordnet sind, wenig helfen zur Ausmittelung des Gesetzes der Abnahme des Salzgehaltes mit der Zunahme der Breiten, eben weil die Beobachtungen in verschiedenen Längen angestellt sind und daher haben wir unsre übrigen Beobachtungen nicht in solche Form gebracht.

Betrachten wir die Beobachtungen (pag. 293 ect.) wie sie auf der Hinreise im atlantischen Ocean angestellt sind und nehmen wir, wo sie sich finden, die Beobachtungen mit dem Instrumente N°. 1, so sehen wir das sp. Gew. von 50°25′ N. Breite nach Süden zunehmen, mit einigen geringen Ausnahmen dazwischen, die wir irgend einem Zufalle oder Fehler der Beobachtung zuschreiben müssen, bis es bei 25°39′ nördl. Breite und 17°45′ Länge sein Maximum erreicht = 1,027979, von da nimmt es wieder bedeutend ab und scheint etwa zwischen 7°28′ und 4°23′ nördl. Br. sein Minimum zu haben; von dort nimmt es rasch zu, welche Raschheit der zugleich statt findenden bedeutenden Bewegung nach Westen zuzuschreiben ist, und erreicht bei 20°11′ südl. Br. und 37°33′ Länge sein Maximum im Süden = 1,028333. Von dort an nimmt es regelmässig mit der Zunahme der Breite ab.

Nehmen wir eben so die Beobachtungen auf der Rückreise im atlantischen Ocean vor, so finden wir, von Süden nach Norden vorrückend, Zunahme des spezifischen Gewichtes bis zum südlichen Maximum zwischen 15°58′ und 14°18′ südl. Br. und etwa 7° Länge = 1,02800, dann wieder Abnahme, aber etwas unregelmässig, da wir zugleich stark nach Westen vorrückten, doch sehen wir das Minimum zwischen 1°55′ und 3°22 nördl. Br. Das nördliche Maximum ist wiederum deutlich zu erkennen zwischen 19°22′ und 21°45′ Br. und 40° Länge = 1,028560. Von diesem Maximum nimmt das spezif. Gewicht regelmässig ab mit der grössern Breite.

Wir haben also nach unsern beiden Durchschiffungen des atlantischen Oceans

Das nördliche Maximum bei	25°39′	Br. und	17°45′	L.	=	1,027979
— — — — — —	20°34′	— —	40°00′	—	=	1,028550
Das südliche Maximum bei	20°11′	— —	37°33′	—	=	1,028333
— — — — — —	15° 8′	— —	7°00′	—	=	1,028000

Der Einfluss des mehr westlichen Liegens auf die Grösse der Maxima ist nicht zu verkennen. Aus den Beobachtungen von 1823 ist eine merkwürdig, nämlich die vom 6ten December, wir haben nämlich

am 5ten Dec. . .	34°58′ Br.	51° 3′ L.	sp. G.	=	1,026857
Abends um 9h	—	—	—	=	1,026743
am 6ten Dec. . .	37°24′ —	52°31′	—	=	1,025370
am 8ten Dec. . .	40°41′ —	53°20′	—	=	1,027462

Hier ist das sp. G. am 6ten ausserordentlich niedrig, sowohl gegen das nördlich, als südlich davon gefundene, und der Grund davon kann kein andrer seyn als der Rio de la Plata, der sein Wasser so weit ins Meer heraustreibt. Wir glaubten seinen Einfluss am 5ten Abends auszumitteln, wo wir ihm gerade gegenüber waren, allein sein Strom nimmt, wie man hieraus ersieht eine südlichere Richtung.

In der Südsee ist es schwerer aus unsern Beobachtungen die südlichen und nördlichen Maxima auszumitteln, weil unser Lauf in der Gegend derselben mei-

stentheils mehr der Länge als der Breite nach ging, allein zu verkennen sind sie auch hier nicht. In der südlichen Halbkugel bezeichnet sich das Maximum ziemlich deutlich bei 17°13′ Br. und 169°6′ L. = 1,02804. In der nördlichen liegt es zwischen 18°59′ und 23°33′ bei 196° Länge. Am 4ten Febr. 1825 scheint es sich gleichfalls bei 23°5′ Br. und 157°53′ Länge zu zeigen. Dann aber am 12 Sept. 1825 ist es deutlich bei 21°59′ und 154°19′ Länge zu erkennen. Letzteres wird wohl der Wahrheit am nächsten kommen, es fällt auch ziemlich in die Mitte der andern Bestimmungen.

So hätten wir denn für die Südsee

Das nördliche Maximum bei 22° Br. und 154° Länge = 1,027176
Das südliche — — — 17° — — 119° — = 1,028084

Was die Länge anbetrifft, so scheint sie in der Südsee wenig auf den Salzgehalt Einfluss zu haben, wie man aus den Beobachtungen vom 13. Feb. 1824 bis zum 1. Apr. ersehen kann, wo wir unsre Breite wenig, die Länge aber sehr stark änderten; die Unterschiede des spez. Gewichtes sind unbedeutend und kommen wahrscheinlich auf die doch immer stattfindende geringe Veränderung der Breite, indem das südliche Maxim. bei 17° Br. hier mit eingeschlossen ist.

Im Ganzen ist die Südsee nach unsern Beobachtungen weniger salzig als der atlantische Ocean; das spec. Gew. erhebt sich in ihr nur einmal bis zu 1,028, während es im atlantischen Ocean oft diesen Werth übersteigt. Dieses erklärt es wohl auch warum bei der Durchschiffung des indischen Oceans von Ost nach West die spez. Gewichte immer zunehmen, je näher wir dem atlantischen Ocean kamen, obgleich die Breite ebenfals zunahm, so dass bis zu 35° südl. Br. kein Maximum zu spüren war. Würde man dieses Meer gerade von Norden nach Süden oder umgekehrt durchschneiden, so würde man gewiss eben so wie im atlantischen Ocean und in der Südsee das südliche Maximum auffinden.

Die allgemeinen Schlüsse, die sich aus obigen Betrachtungen ziehen lassen, wären nun folgende:

1. Der atlantische Ocean ist von grösserem Salzgehalt als die Südsee; und der indische Ocean, als Verbindung beider grossen Wassermassen, ist daher zum atlantischen Ocean hin salziger als nach der Südsee zu, also westlich salziger als östlich.

2. In jedem der beiden grossen Oceane giebt es ein nördliches Maximum von Salzgehalt und ein südliches; das nördliche steht weiter vom Aequator ab als das südliche. Das Minimum zwischen beiden fällt im atlantischen Ocean einige Grade nördlich vom Aequator, wahrscheinlich auch in der Südsee, allein unsre Beobachtungen lassen es nicht erkennen, da sie gerade in dieser geringen nördlichen Breite der Südsee mangelhaft sind.

3. Im atlantischen Ocean ist der westliche Theil salziger als der östliche; in der Südsee scheint durch die Länge kein Unterschied im Salzgehalt bedingt zu werden.

4. Das grösste spez. Gewicht des atlantischen Oceans fand sich im nördlichen Maximo bei 40° westlicher Länge von Greenw. . . . . = 1,02856
das der Südsee im südlichen Maximo bei 119° Länge . . . . = 1,028084

Letzteres ist die einzige Beobachtung der Südsee, wo sich das spez. Gew. bis 1,028 erhob.

5. Von dem nördlichen Maximo nach Norden und dem südlichen nach Süden nimmt das spez. Gewicht mit Zunahme der Breite beständig ab.

Es entsteht nun die Frage, woher diese nördlichen und südlichen Maxima statt finden; warum giebt es nicht ein Maximum auf dem Aeqnator selbst, statt dass dort das spez. Grwicht bedeutend geringer ist als in der Gegend der Maxima? Zur Beantwortung dieser Frage, müssen wir zuerst ausmachen, wodurch der Salzgehalt der Oberfläche bestimmt wird. Den vorzüglichsten Einfluss übt wohl auf denselben die Ausdünstung aus, und wir glauben, dass wir durch sie den Umstand der Maxima nördlich und südlich zu erklären im Stande seyn werden. Die Ausdünstung nämlich wird wiederum bedingt durch die Sonnenwärme und durch den schnellern oder langsamern Wechsel der Luftschichten. Die Sonnen-

wärme wäre nun zwar am Aequator am bedeutendsten, allein der schnellere Wechsel der Luftschichten ist wiederum dort am wenigsten zu suchen Es ist merkwürdig, dass im atlantischen Ocean die Gegend des Minimums gerade mit der Gegend zusammenfällt, die von den Seefahrern so gefürchtet wird, nämlich mit der Gegend der fast beständigen Windstillen. Die Dünste, die die brennende Sonnenhitze in die Luft steigen lässt, bleiben über der Wasserfläche schweben und verhindern die weitere Ausdünstung. Das Meer verliert weniger von seinen wässrigen Theilen und ist daher weniger salzig als etwa bei 22 nördl. und 18 südl. Breite, wo die in ihrer ganzen Frische wehenden Passatwinde die, in einer Sonnenhitze, die bekanntlich der unter dem Aequator wenig nachsteht, aufsteigenden, Dünste sogleich weiter führt und den neu sich bildenden Raum giebt, so dass die Verdunstung rasch vor sich geht. Daher der starke Salzgehalt des so schnell verdunstenden Wassers. Dies würde auch den grössern Salzgehalt des westlichen Theils des atlantischen Oceans erklären, da bekanntlich, je näher den Africanischen Küsten, desto anhaltender und von weiterem Umfange die Windstillen sind. In der Südsee findet dieser Umstand der grösseren Windstillen nach Osten nicht statt, und daher ist auch dort der Einfluss der Länge auf den Salzgehalt so unmerklich.

STÜNDLICHE BEOBACHTUNG DES BAROMETERS IN CAVITE

auf d. Insel Luzon (14° 34′ nördl. Br. u. 239° 9′ westl. v. Gr.)

zur Ausmittelung der Perioden des regelmässigen Steigens und Fallens während 24 Stunden.

Die Beobachtungen geschahen in der Festung von *Cavite*, etwa 6 Tois. über der Meeresfläche. Das Zimmer war gewölbt und immer kühl, da der Sonne der Zutritt durch Läden versagt war. Auf diese Art war die Temperatur daselbst immer ziemlich gleich, Tags und Nachts; wir reducirten bei jeder Reihe die Barometerhöhen auf die bei den ersten Beobachtungen statt findende Temperatur. Die Correctur war selten grösser als für 1° C., so wenig änderte sich die Temperatur, und diese Correctur geschah auf der Stelle nach der jedesmaligen Beobachtung. — Leider bemerkten wir später in unserem Journal, dass wir besonders bei den letzteren Reihen vergessen hatten die Temperatur, auf die die Reihe corrigirt war, anzumerken, so dass wir nicht im Stande waren, wie wir die Absicht hatten, alle Beobachtungen auf eine Temperatur zu reduziren. Indessen sehen wir aus andern angestellten Versuchen, dass wir für diese letzteren Reihen im Durchschnitt 25° C. als Temperatur annehmen können, auf welche dieselben reducirt sind. — Wenn dadurch auch die absoluten Höhen ungewiss werden, so schadet dieses Versehen dem Hauptzweck bei diesen Beobachtungen nicht, nämlich der Ausmittelung der Perioden des Steigens und Fallens, denn jede Reihe für sich ist auf ein und dieselbe Temperatur reducirt und daher sind die einzelnen Beobachtungen derselben volkommen vergleichbar.

Die Beobachtungen sind in den folgenden Tabellen enthalten und in pariser Linien ausgedrückt.

Stunden d. Beob.		Barometer
d. 12. Decemb. Th. = 20,5 C.		
$1^h 00'$ mittags		339''',00
„ 15	—	338, 99
„ 30	—	338, 88
„ 45	—	338, 80
2 00	—	338, 75
„ 15	—	338, 73
„ 30	—	338, 73
„ 45	—	338, 65
3 5	—	338, 58
„ 15	—	338, 55
„ 30	—	338, 52
„ 45	—	338, 50
4 00	—	338, 55
„ 15	—	338, 55
„ 30	—	338, 55
„ 45	—	338, 55
5 00	—	338, 55
„ 15	—	338, 55
„ 30	—	338, 55
„ 45	—	338, 55
6 00	—	338, 55
„ 15	—	338, 55
„ 40	—	338, 55

Stunden d. Beob.		Barometer
6 55	—	338''',55
7 15	—	338, 60
„ 30	—	338, 65
d. 13. Decemb. Th. = 20,8 C.		
$7^h 15'$ morg.		338''',88
„ 30	—	338, 86
„ 45	—	339, 06
8 00	—	339, 17
„ 15	—	339, 16
„ 30	—	339, 23
„ 45	—	339, 20
9 00	—	339, 20
„ 15	—	339, 22
„ 30	—	339, 17
„ 45	—	339, 14
10 00	—	339, 08
„ 15	—	339, 03
„ 30	—	339, 00
1 50	—	338, 28
2 5	—	338, 19
„ 20	—	338, 17
„ 35	—	338, 05
„ 50	—	338, 02
3 5	—	338, 10*

*) Zwischen $3^h 5'$ und $3^h 20'$ fand ein sehr heftiger Windstoss statt, der noch während $3^h 20'$ fort dauerte.

Stundeu d. Beob.		Barometer
3h 20′	abends.	338‴,04
„ 35	—	338, 00
„ 50	—	338, 00
4 5	—	338, 00
„ 20	—	338, 00
„ 35	—	338, 00
„ 50	—	338, 00
5 5	—	338, 00
„ 20	—	338, 00
„ 35	—	338, 10
„ 50	—	338, 14
d. 14. Decemb. Th. = 20° C. Regen.		
7h 30	morg.	337‴,50
„ 45	—	337, 51
8 00	—	337, 51
„ 15	—	337, 50
„ 30	—	337, 50
„ 45	—	337, 55
9 00	—	337, 53
„ 15	—	337, 53
„ 30	—	337, 52
„ 45	—	337, 39
10 00	—	337, 45
„ 15	—	337, 37
„ 30	—	337. 31
11 00	—	337, 20
1 00	—	336, 80

Stunden d. Beob.		Barometer
den 15ten December.		
7h 30′	morg.	338‴,43
„ 45	—	338, 37
8 00	—	338, 35
„ 15	—	338, 30
„ 30	—	338, 26
„ 45	—	338, 26
9 00	—	338, 65
„ 15	—	338, 75
„ 30	—	338, 67
„ 45	—	338, 63
10 00	—	338, 60
„ 15	—	338, 55
„ 30	—	338, 53
11 5	—	338, 50
1 45	—	337, 85
2 00	—	337, 75
„ 20	—	337, 67
„ 35	—	337, 60
„ 50	—	337, 55
3 5	—	337, 55
„ 15	—	337, 52
„ 30	—	337, 50
„ 45	—	337, 50
4 15	—	337, 50
„ 30	—	337, 50
„ 45	—	337, 52

*

Stunden d. Beob.	Barometer
5^h 5′ abends.	337‴,50
„ 20 —	337, 50

den 18ten December.

Stunden d. Beob.	Barometer
7^h 15′ morg.	338‴,70
„ 45 —	338, 75
8 15 —	338, 75
„ 45 —	338, 75
9 15 —	338, 75
„ 45 —	338, 75
10 15 —	338, 70
„ 45 —	338, 66
11 15 —	338, 50
12 00 mittags.	338, 40
„ 30 —	338, 35
1 00 —	338, 25
„ 30 —	338, 04
2 5 —	337, 99
„ 30 —	337, 85
3 00 —	337, 70
„ 30 —	337, 67
4 00 —	337, 67
„ 30 —	337, 67
5 00 —	337, 67
„ 30 —	337, 67
6 00 —	337, 67
„ 30 —	337, 67
7 00 —	337, 70
7^h 30′ abends.	337‴,75
8 00 —	337, 75
„ 30 —	337, 80
9 5 —	337, 95
„ 40 —	338, 35
10 00 —	338, 35
„ 30 —	338, 35
11 00 —	338, 32
„ 30 —	338, 3
12 00 —	338, 27
„ 30 —	338, 22
1 00 —	338, 11
„ 30 —	338, 07
2 00 —	338, 02

den 19ten December.

Stunden d. Beob.	Barometer
7^h 20′ morg.	338‴,51
„ 40 —	338, 50
8 10 —	338, 50
„ 40 —	338, 50
9 10 —	338, 50
„ 40 —	338, 50
10 10 —	338, 48
„ 40 —	338, 40
12 15 mittags.	338, 00
1 00 —	337, 86
„ 10 —	337, 82
„ 40 —	337, 73

Stunden d. Beob.	Barometer
2h 20′ nachm.	337‴,60
„ 45 —	337, 51
3 10 —	337, 50
„ 40 —	337, 50
4 10 —	337, 50
„ 40 —	337, 52
5 10 —	337, 52
„ 40 —	337, 52
6 10 —	337, 55
„ 40 —	337, 60
7 10 —	337, 79
„ 40 —	337, 82
8 10 —	337, 92
„ 40 —	338, 01
9 10 —	338, 10
„ 40 —	338, 10
10 10 —	338, 10
„ 40 —	338, 04
11 10 —	338, 04

den 20sten December.

Höchster Stand d. Morgens . = 338‴, 5

Niedrigster Stand d. Nachmit. = 337‴, 1

den 21sten December.

Stunden d. Beob.	Barometer
6h 35′ morg.	338‴,00
„ 45 —	338, 00
7 15 —	337, 90
7h 45′ morg.	337‴,92
8 15 —	338, 02
„ 45 —	338, 05
9 15 —	338, 10
„ 45 —	338, 03
10 15 —	338, 00
12 30 mittags.	337, 73
„ 45 —	337, 67
1 15 —	337, 55
„ 45 —	337, 45
2 15 —	337, 33
„ 45 —	337, 21
3 15 —	337, 16
„ 45 —	337, 16
4 15 —	337, 16
„ 45 —	337, 19
5 15 —	337, 20
„ 45 —	337, 25
6 45 —	337, 35
7 15 —	337, 39
„ 45 —	337, 51
8 15 —	337, 59
„ 45 —	337, 71
9 15 —	337, 83
„ 45 —	337, 89
10 15 —	337, 94
„ 45 —	337, 93
11 15 —	337, 90

Stunden d. Beob.	Barometer
11^{h}45′ nachts	337‴,84
12 15 —	337, 75

den 22sten December.

Höchster Stand d. Morgens . = 338‴,35
Niedrigster Stand d. Nachmit. = 337‴,55

d. 22sten bis 23sten December.

Stunden d. Beob.	Barometer
1^{h}45′ nachts	338‴,00
„ 30 —	337, 90
2 00 —	337, 80
„ 30 —	337, 73
3 00 —	337, 71
„ 30 —	337, 67
4 00 —	337, 67
„ 30 —	337, 67
5 00 —	337, 67
„ 30 —	337, 73
6 00 —	337, 79
„ 30 —	337, 84
7 00 —	337, 88
„ 30 —	337, 95
8 00 —	338, 01
„ 30 —	338, 07
9 00 —	338, 07
10 00 —	338, 07
„ 30 —	338, 07

Stunden d. Beob.	Barometer.
11^{h}00′ morg.	338‴,05
„ 30 —	337, 98

den 24sten December.

Stunden d. Beob.	Barometer.
7^{h}15′ morg.	337‴,92
„ 30 —	337, 95
8 00 —	338, 01
„ 30 —	338, 01
9 00 —	338, 01
„ 30 —	338, 01
10 00 —	338, 01
„ 30 —	338, 01
11 00 —	338, 00
„ 30 —	337, 91
2^{h}00′ mittags	337‴,50
„ 30 —	337, 41
3 00 —	337, 35
„ 30 —	337, 32
4 00 —	337, 32
„ 30 —	337, 32
5 00 —	337, 32
„ 30 —	337, 32
6 00 —	337, 32
„ 30 —	337, 32
7 00 —	337, 36
„ 30 —	337. 45
8 00 —	337, 59

Stunden d. Beob.		Barometer
den 25sten December.		
12h00′	nachts	338‴,08
„ 30	—	338, 05
1 00	—	338, 02
„ 30	—	337, 90
2 00	—	337, 85
„ 30	—	337, 78
3 00	—	337, 73
„ 30	—	337, 73
4 00	—	337, 72
„ 30	—	337, 71
5 00	—	337, 71
„ 30	—	337, 74
6 00	—	337, 80
„ 30	—	337, 85

Stunden d. Beob.		Barometer
7h00′	morg.	337‴,95
„ 30	—	338, 14
8 00	—	338, 19
„ 30	—	338, 20
9 00	—	338, 20
den 26sten December.		
2h00′	nachts	337‴,44
„ 30	—	337, 40
3 00	—	337, 38
„ 30	—	337, 33
4 00	—	337, 33
„ 30	—	337, 33
5 00	—	337, 33
„ 30	—	337, 33
6 00	—	337, 36
„ 30	—	337, 40

Aus den so eben mitgetheilten Beobachtungen ergeben sich folgende Stunden des höchsten und niedrigsten Barometerstandes:

Tag der Beobachtung.	Maximum Vormittags	Minimum Nachmittags	Maximum Abends	Minimum Nachts
den 12. Decem.		5h 5′		
— 13. —	9h 15′	4 50		
— 14. —	8 45			
— 15. —	9 15	4 00		
— 18. —	8 45	5 00	10h 00′	
— 19. —	8 40	3 40	9 40	
— 21. —	8 45	3 45	10 15	
— 23. —	9 30			4h 15′
— 24. —	9 15	5 00		
— 25. —	9 00			4 45
— 26. —				4 30
Als Mitt. erg. sich	9h 1′,1	4h 28′,6	9h 28′,3	4h 30′

Als Grösse der Schwankung findet sich aus obigen Beobachtungen

Maxim. Vormittags	339‴,23	338‴,7	338‴,75	338‴,5	338‴,5	338‴,06	338‴,35	338‴,01
Minim. Nachmittags	337,99	337,5	337,67	337,5	337,1	337,16	337,55	337,32
Die Schwankung also	1,24	1,2	1,08	1,0	1,4	0,9	0,80	0,69

und nimmt man aus allen diesen Schwankungen das Mittel, so ist dieses = 1‴,04

Minimum Nachmittags	337‴,67	337‴,5	337‴,16
Maximum Abends	338, 35	338, 1	337, 94
also die Schwankungen	0, 68	0, 6	0, 78

folglich die mittlere Schwankung = 0,687

Für die Schwankung zwischen dem Maximum Abends und dem Minimum Nachts fehlen uns Beobachtungen. — Allein vom Minimum Nachts bis zum Maximum Morgens haben wir

Minimum Nachts	337‴,67	337‴,72
Maximum Morgens	338, 07	338, 20
folglich die Schwankung	0, 40	0, 49

und als Mittel aus beiden = 0,445

Aus allen diesen Betrachtungen lassen sich also folgende Endresultate ziehen:

Der Barom. hat ein Maxim. der Höhe morg.		um 9^h 1′,1		
dann fällt er bis zum Nachmittage	„ „	um 4 28,6	im Durchsch. um	1‴,04
steigt wiederum bis zum Abend	„ „	um 9 58,3	— — —	0,687
fällt wiederum bis in die Nacht	„ „	um 4 30,0	— — —	—
und steigt endlich bis zum Morgen	„ „	um 9 1,1	— — —	0,445

Auf Tab. IV. findet man die 24 stündige Schwankung des Barometers in Cavite graphisch dargestellt, indem dazu die Beobachtungsreihe vom 18ten December ausgewählt ward. Für die fehlenden Stunden der Nacht von 2^h bis 7^h wurde die Reihe vom 22 bis 23 Dec. genommen, indem zur Verbindung mit jener die Barometerhöhe um 2^h = 337,8 der in jener Reihe um dieselbe Stunde beobachteten = 338,02 gleich gesetzt und die übrigen Beobachtungen nach Proportion corrigirt wurden.

VERGLEICHUNG DER MITTLEREN TEMPERATUR DER LUFT UND DES WASSERS,

an der Oberfläche des Meeres innerhalb 24 Stunden.

Zur Ausmittelung dieser Mitteltemperatur wurden vier Beobachtungen innerhalb 24 Stunden angestellt: eine des Morgens, eine halbe Stunde vor Sonnenaufgang, die zweite $1\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Mittage, und dann noch zwei in gleichen Intervallen zwischen der letzten Mittags- und nächsten Morgenbeobachtung: die beiden ersten gaben die Extreme der niedrigsten und höchsten Temperatur. Zur Messung der Temperatur des Wassers ward ein Eimer hinabgelassen und eine Zeitlang im Wasser gehalten, dann aber schnell, mit dem zu untersuchenden Wasser gefüllt, heraufgezogen und der Thermometer eingesteckt und abgelesen. Ein und derselbe Thermometer diente für das Wasser und die Luft, so dass die Fehler des Instruments auf das Verhältniss der Temperatur beider keinen bedeutenden Einfluss haben, da die beiden Temperaturen nicht so sehr von einander unterschieden sind; dennoch wurden aber alle Temperaturen nach dem Thermometer, dessen Berichtigung wir in der Abhandlung über die Temperatur des Weltmeeres in der Tiefe erläutert haben (pag. 253.), corrigirt.

In der dieser Seite beigefügten Tabelle unserer Versuche bezeichnen wir mit 1. 2. 3. 4. die Beobachtungen des Morgens, Mittags, Abends und Nachts; mit *M* und *m* aber die Mittel aus allen vieren für die Luft und das Wasser. *M-m* enthällt die Unterschiede beider Mittel, indem immer das des Wassers von dem der Luft abgezogen ist. *A.* bedeutet: Atlantischer Ocean; *S.* Südsee; *Ch.* Chinesisches Meer; *I.* Indischer Ocean. Die Breite und Länge ist die um Mittag stattgefundene, die Länge immer nach Westen von Greenwich bis 360° gezählt.

Breite.	Länge. westlich von Greenwich.	Temperatur der Luft.					Temperatur des Wassers.					M - m	Bemerkung.
		1	2	3	4	M	1	2	3	4	m		
55°36′ N.	140° 56′	11,4	14,2	13,5	11,7	12, 70	12,5	13,0	13,1	12,5	12,775	—0,025	S. Aug.
51 8 —	154 36	10,1	11,0	10,6	10,0	10,425	10,2	10,3	10,3	10,2	10,250	+0,175	— —
49 27 —	178 49	10,1	11,3	11,1	10,3	10,700	10,2	10,3	10,7	10,2	10,350	+0,350	S. July.
49 23 —	185 54	9,6	12,9	13,0	9,9	11,350	9,6	10,6	11,6	9,6	10,200	+1,150	— —
48 54 —	5 57	12,4	14,6	13,9	13,7	13,650	13,8	13,8	14,3	14,3	14,050	—0,400	A. Sept.
47 33 —	199 29	3,4	5,0	4,1	4,8	4,350	4,0	4,0	4,1	3,9	4,000	+0,350	S. Juny.
45 33 —	141 16	14,0	16,5	14,6	13,8	14,725	13,8	14,7	14,7	13,6	14,200	+0,525	S. Aug.
45 31 —	16 22	13,8	15,3	14,6	14,0	14,425	14,6	14,7	17,7	14,6	14,650	—0,225	A. May.
40 2 —	12 38	16,4	17,6	17,3	16,3	16,900	17,5	18,6	18,1	16,8	17,750	—0,850	A. Sept.
38 3 —	36 57	16,2	18,0	16,8	15,8	16,700	16,4	16,6	16,4	16,4	16,450	+0,250	A. May.
33 27 —	327 20	20,9	21,9	22,2	21,4	21,600	21,7	22,3	22,3	21,5	21,950	—0,350	I. März.
33 31 —	49 22	17,8	18,9	17,9	17,9	18,125	17,0	17,64	17,8	17,8	17,560	+0,650	A. Dec.
34 7 —	332 18	18,6	21,5	20,6	17,5	19,550	22,2	21,90	22,3	21,4	21,950	—2,400	I. März.
43 45 —	55 32	11,1	12,2	11,1	11,2	11,400	9,8	10,5	10,2	9,9	10,100	+1,300	A. Dec.
44 50 —	61 13	10,0	11,2	10,5	10,0	10,425	10,6	11,0	11,1	10,7	10,875	—0,450	— —
53 27 —	63 58	7,0	10,0	6,9	7,2	7,800	7,3	6,8	6,9	7,4	7,100	+0,700	— —
56 41 —	68 19	4,4	7,8	6,0	5,0	5,800	7,9	9,0	8,6	8,1	8,400	—2,600	— —
57 27 —	70 47	6,6	7,6	7,0	6,8	7,000	6,6	6,3	6,5	6,9	6,575	+0,425	— —

Breite.	Länge. westlich von Greenwich.	Temperatur der Luft. 1	2	3	4	M	Temperatur des Wassers. 1	2	3	4	m	$M-m$	Bemerkung.
53°36′ N.	140°56′	11,4	14,2	13,5	11,7	12, 70	12,5	13,0	13,1	12,5	12,775	—0,025	S. Aug.
51 8 —	154 36	10,1	11,0	10,6	10,0	10,425	10,2	10,3	10,3	10,2	10,250	+0,175	— —
49 27 —	178 49	10,1	11,3	11,1	10,3	10,700	10,2	10,3	10,7	10,2	10,350	+0,350	S. July.
49 23 —	185 54	9,6	12,9	13,0	9,9	11,350	9,6	10,6	11,6	9,6	10,200	+1,150	— —
48 54 —	5 57	12,4	14,6	13,9	13,7	13,650	13,8	13,8	14,3	14,3	14,050	—0,400	A. Sept.
47 33 —	199 29	3,4	5,0	4,1	4,8	4,350	4,0	4,0	4,1	3,9	4,000	+0,350	S. Juny.
45 33 —	141 16	14,0	16,5	14,6	13,8	14,725	13,8	14,7	14,7	13,6	14,200	+0,525	S. Aug.
45 31 —	16 22	13,8	15,3	14,6	14,0	14,425	14,6	14,7	17,7	14,6	14,650	—0,225	A. May.
40 2 —	12 38	16,4	17,6	17,3	16,3	16,900	17,5	18,6	18,1	16,8	17,750	—0,850	A. Sept.
38 3 —	36 57	16,2	18,0	16,8	15,8	16,700	16,4	16,6	16,4	16,4	16,450	+0,250	A. May.
37 30 —	140 47	19,7	20,7	20,0	19,7	20,025	20,0	20,0	20,3	20,0	20,750	—0,725	S. Aug.
37 2 —	202 00	17,2	17,5	18,4	18,2	17,825	17,9	17,9	17,9	18,2	17,975	—0,150	— —
33 9 —	14 53	18,7	20,5	18,4	18,5	19,025	20,2	20,3	20,1	19,3	19,975	—0,950	A. Sept.
32 8 —	136 48	19,8	21,3	20,4	20,3	20,450	21,5	21,5	21,4	21,6	21,500	—1,050	S. Aug.
29 34 —	156 00	18,5	19,8	19,5	18,7	19,125	19,8	20,0	20,0	19,9	19,925	—0,800	S. Febr.
27 6 —	138 47	22,0	23,5	22,1	21,7	22,325	22,4	23,2	22,9	22,4	22,725	—0,400	S. Sept.
25 39 —	17 45	21,2	22,5	19,4	21,1	21,025	(18,7)	22,1	21,6	21,1	20,875	+0,150	A. Sept.
23 5 —	157 32	19,5	20,4	18,9	20,0	19,700	21,2	21,2	21,0	21,2	21,150	—1,450	S. Febr.
21 44 —	195 44	24,5	27,5	27,0	24,9	25,975	25,4	27,8	27,0	25,4	26,400	—0,425	S. May.
19 57 —	228 59	26,4	27,5	27,0	26,6	26,875	27,0	27,4	27,4	27,0	27,200	—0,325	S. Oct.
19 22 —	39 13	21,6	22,5	22,6	2 ,5	22,650	22,8	22,4	22,7	22,8	22,675	—0,025	A. Apr.
19 1 —	25 5	22,8	24,2	23,2	22,8	23,250	23,3	23,7	23,8	23,5	23,575	—0,225	A. Oct.
15 10 —	139 21	25,0	26,3	26,2	25,1	25,675	25,7	26,5	26,5	25,8	26,125	—0,450	S. May.
14 32 —	169 38	25,9	28,4	26,9	26,3	26,875	26,5	26,9	26,9	26,5	26,700	+0,175	S. Sept
13 15 —	35 23	21,7	23,4	23,1	21,8	22,500	22,4	22,9	22,9	22,5	22,675	—0,175	A. Apr.
13 2 —	203 34	27,2	27,7	27,4	26,6	27,225	27,6	27,6	27,6	27,4	27,550	—0,325	S. Oct.
11 13 —	92 11	26,6	27,6	27,4	26,8	27,100	27,4	27,6	27,6	27,4	27,500	—0,400	— —
5 40 —	21 10	24,1	24,3	24,9	24,3	24,550	25,0	25,8	25,6	25,1	25,375	—0,825	A. Oct.
5 12 —	254 50	22,7	23,9	23,4	22,9	23,225	23,5	23,9	23,8	23,5	23,675	—0,450	Ch. Jan.
1 49 —	180 52	26,0	27,2	26,2	26,2	26,400	26,7	27,0	27,1	26,8	26,900	—0,500	S. Apr.
0 9 —	253 45	25,6	26,8	25,9	25,6	25,975	25,8	26,4	26,3	26,3	26,200	—0,225	Ch. Jan.
1 35 S.	26 10	23,4	25,3	24,0	23,7	24,100	23,9	24,2	24,2	23,6	23,975	+0,125	A. Oct.
2 20 —	22 18	24,8	26,4	26,1	25,0	25,575	25,7	25,9	25,9	25,8	25,825	—0,250	A. Apr.
8 2 —	175 33	25,4	28,3	27,1	27,1	26,975	28,0	28,4	28,4	28,4	28,300	—1,325	S. Apr.
11 12 —	12 33	23,9	25,5	24,8	24,3	24,625	24,8	25,3	25,3	25,3	25,175	—0,550	A. Apr.
14 16 —	34 14	23,5	24,5	23,9	22,9	23,700	23,3	23,6	23,5	23,4	23,450	+0,250	A. Oct.
14 48 —	144 39	25,0	27,5	27,3	26,0	26,450	27,6	29,1	28,2	27,7	28,150	—1,700	S. May.
16 1 —	136 13	25,4	27,4	26,5	25,4	26,175	26,8	27,7	27,3	26,8	27,150	—0,975	S. Feb.
16 24 —	273 5	24,2	25,0	24,4	24,4	24,500	25,9	25,9	25,8	25,9	25,875	—1,775	I. Febr.
16 55 —	148 52	25,5	28,5	25,5	26,3	26, 45	27,4	28,7	28,7	27,4	28,050	—1,600	S. März.
17 35 —	1 3 34	24,6	25,6	24,8	24,1	24,775	25,2	25,2	25,3	25,2	25,225	—0,450	S. Febr.
21 35 —	88 41	21,8	21,5	23,2	22,1	22,150	22,4	22,3	22,5	22,6	22,450	—0,300	— —
22 39 —	291 31	23,7	24,6	24,2	23,8	24,075	24,8	25,0	25,0	24,7	24,925	—0,850	— —
24 49 —	350 30	19,2	20,9	20,5	19,3	19,975	19,8	20,2	20,0	19,8	19,950	+0,025	A. May.
26 21 —	82 9	20,2	21,7	20,5	20,4	20,700	20,9	21,0	21,4	21,1	21,100	—0,400	S. Febr.
28 36 —	312 49	21,6	22,6	21,8	21,1	21,775	22,5	23,6	23,4	22,3	22,950	—1,175	I. Febr.
31 49 —	343 36	16,4	17,8	17,5	16,5	17,050	17,3	17,4	17,6	17,3	17,400	—0,350	A. März.
33 27 —	327 20	20,9	21,9	22,2	21,4	21,600	21,7	22,3	22,3	21,5	21,950	—0,350	I. März.
33 31 —	49 22	17,8	18,9	17,9	17,9	18,125	17,0	17,64	17,8	17,8	17,560	+0,650	A. Dec.
34 7 —	332 18	18,6	21,5	20,6	17,5	19,550	22,2	21,90	22,3	21,4	21,950	—2,400	I. März.
43 45 —	55 32	11,1	12,2	11,1	11,2	11,400	9,8	10,5	10,2	9,9	10,100	+1,300	A. Dec.
44 50 —	61 13	10,0	11,2	10,5	10,0	10,425	10,6	11,0	11,1	10,7	10,875	—0,450	— —
53 27 —	63 58	7,0	10,0	6,9	7,2	7,800	7,3	6,8	6,9	7,4	7,100	+0,700	— —
56 41 —	68 19	4,4	7,8	6,0	5,0	5,800	7,9	9,0	8,6	8,1	8,400	—2,600	— —
57 27 —	70 47	6,6	7,6	7,0	6,8	7,000	6,6	6,3	6,5	6,9	6,575	+0,425	— —

Betrachten wir in vorliegender Tabelle die mit *M-m* bezeichnete Spalte oder die Differenzen zwischen der Temperatur des Wassers und der Luft, so sehen wir, dass von 0° bis 45° nördlicher Breite, mit einer Ausnahme von 3 Beobachtungen auf 30, die Luft in der mittleren Temperatur weniger erwärmt ist, als das Meer; von 45° bis 55° aber zeigen 5 Beobachtungen von 7 eine grössere Temperatur der Luft als des Meeres. In der südlichen Halbkugel geben von 0° bis 33° Breite 17 Beobachtungen, mit Ausnahme von dreien, eine höhere Temperatur des Meeres wie der Luft; von 33° bis 57° Br. ist das Meer nach vier Beobachtungen kälter, nach drei aber wärmer als die Luft. Wir müssen daher als Regel annehmen, dass von 0° bis 45° N. und 33° S. das Meer im Mittel aus Tag und Nacht wärmer sey als die Luft, die wenigen Ausnahmen gehen in allen unsern Fällen nicht über 0°,25 über 0 und sind meist durch eine besonders hohe Mittagstemperatur der Luft bedingt. In einem dieser Fälle, bei 25°39′ N., ist die, die Abweichung verursachende, auffallend niedrige Morgentemperatur des Wassers offenbar entweder einem Versehen beim Ablesen oder einem ganz besonderen Umstande zuzuschreiben. Die obige Regel gilt übrigens, wie man aus der letzten Kolumne ersieht, für alle Monate des Jahrs. Ueber 45° nördlicher und 33° südlicher Breite schwankt es zwischen der höheren Wasser-und Lufttemperatur.

Da die Beobachtungen über 45° N. und 33° S. alle in den Sommermonaten für die dortigen Gegenden angestellt sind, so lässt sich aus ihnen kein Schluss über das Verhalten der mittleren Temperatur des Jahrs für das Wasser und die Luft ziehen und wir beschränken uns daher auf den folgenden Satz, der als Resultat aus unseren Beobachtungen folgt:

In der Zone von 45° N. bis 33° S. ist auf dem Weltmeere die Oberfläche des Wassers wärmer als die sie berührende Luft, im Mittel sowohl des Jahres als auch der einzelnen Monate und Tage. Ueber diese Breiten hinaus sind im Mittel aus 24 Stunden in den Sommermonaten die Resultate schwankend, bald ist die Luft, bald das Meer wärmer.

Dass die durchgängig wärmere Temperatur des Wassers im Norden bis 45°, im Süden bis 33° Br. reiche, ist nicht auffallend, wenn man das Verhältniss beider mittleren Temperaturen, des Wassers und der Luft, als durch die mittlere Jahrestemperatur des Ortes bedingt, ansieht; bekanntlich ist diese in der nördlichen Halbkugel bei gleichen Breitengraden wärmer als in der südlichen.

Als höchste Mitteltemperatur aus 24 Stunden giebt uns unsre Tabelle:

in der nördlichen Halbkugel für die Luft = 27,225 fürs Wasser = 27,550

in der südlichen — — — — — = 26,975 — — — = 28,300

UEBER DIE COMPRESSION DES QUECKSILBERS.

Die Bestimmung derselben geschah mittelst des in der Instruction (pag. 223) erwähnten Elaterometers fürs Quecksilber. Dieses Instrument bestand aus einer weiten Thermometerröhre, bei der unten eine Kugel, wie beim Thermometer, angeblasen, das obere Ende aber nicht verschlossen war. Sie wurde mit Quecksilber gefüllt und auf dieses ein Oeltropfen gelegt. Lässt man dieses Instrument, um einen starken Druck zu haben, in die Tiefe des Meeres hinab, so fixirt das Oehl das Minimum des Volums durch sein Hängenbleiben am Glase, wenn sich das Quecksilber auch wieder hernach drüber ausdehnt. Hat man nun vorher das Volum der Kugel zu dem der Röhre ausgemittelt, so kann man letztere in Grade theilen, von denen jeder ein aliquoter Theil des ganzen Volumens ist, nur muss man sich vorher von der überall gleichen Weite der Röhre überzeugt haben, oder, falls man keine solche findet, auf die Ungleichförmigkeit in der Theilung Rücksicht nehmen, und daher nicht in gleiche Theile theilen. Letzteres geschah bei unserm Instrumente; jeder Grad betrug 0,001 des Volums und 0,0001 konnte durch Schätzung noch sehr sicher angegeben werden. Bei dem Versuche in der Tiefe des Meeres muss aber auch natürlich auf die in derselben stattgefundene Temperatur Rücksicht genommen werden, weil das Instrument zugleich ein wirkliches Thermometer ist. Bei 19° C. stand das Quecksilber in unsrer Röhre bei 0 der Eintheilung.

Nennt man diese Normaltemperatur $= T$, die in der Tiefe $= t$, die Ausdehnung des Quecksilbers $= m$, die des Glases $= n$ (beide für 1° C.) und das Volum bei $T = V$ so hat man

das Volum des Raums bei $t = V\ (1 - (T - t)\ n)$

„ „ „ „ Quecksilbers $= V\ (1 - (T - t)\ m)$

folgl. d. Zusammenz. d. Quecks. durch Wärme $= V\ (1 - (T - t)\ n) - V(1 - (T - t)\, m)$

$= V\ (T - t)\ (m - n)$

Bei unserm bathometrischen Versuche bei 21° 14 N. Breite und 196° 1 Länge auf 914.9 T. (pag. 280) fanden wir die Temperatur unten = 2,44, die Anzeige des Elaterometers = 3,1 Grad also 0,0031 des Volums. Wir haben also

$$T = 19 \quad ; \quad t = 2,44$$

ferner haben wir $n = 0,0000274$ $m = 0,000185$

also ergiebt sich die Zusammenziehung des Quecksilbers durch die Wärme

$$= V. \; 16,56 \cdot 0,000158 = 0,0026\, V.$$

Da nun aber die wirklich beobachtete Zusammendrückung 0,0031 V betrug, so hat man für die Compression des Quecksilbers durch den Druck von 914.9 T. 0,0031 — 0,0026 = 0,0005.

Nimmt man an, die Compression sey dem Drucke proportional, so ergiebt sich für die Compression durch den Druck einer Atmosphäre.

0,0000027

ein Resultat, das das Dreifache beinahe des von Oersted angegebenen (0,000001) ist.

UEBER DIE COMPRESSION DES WASSERS.

Obgleich wir aus sogleich anzuführenden Gründen kein Resultat mit dem Wasserelaterometer erhielten, so wollen wir die Beschreibung desselben dennoch folgen lassen, vielleicht dass es einem spätern Reisenden von mehr Nutzen seyn möchte, denn die Idee desselben ist richtig und gut; sie gehört dem Staatsrath von PARROT.

Tab. III. Fig. 1. giebt uns die Abbildung desselben in halber Naturgrösse. Es besteht aus einem Cylinder *ABC*, der sich unten in einer Halbkugel endigt und in unsrer Figur im Durchschnitt gezeichnet ist. Am obern Ende wird eine Scala mit einer, wie die Figur zeigt, gekrümmten Glasröhre eingeschraubt, von der das eine offene Ende durch den eingeschraubten Deckel luftdicht durchgeht, das andre aber in eine offne Spitze ausgezogen und horizontal gebogen ist. Die Röhre wird mit Quecksilber gefüllt bis zur Spitze, der Cylinder aber mit Wasser

(wobei die Luftblasen sorgfältig herausgeschafft werden müssen) und die Scala mit der Röhre mit etwas dazwischen gelegtem Fett luftdicht eingeschraubt. Damit aber, wenn die Schraube schon gefasst hat, das Wasser bei weiterem Einschrauben gehörig entweichen kann, ist der Deckel mit einem feinen Kanal *ab* durchbohrt, der hernach mit einer angeschraubten Platte *a* vollkommen verschlossen wird. Setzt man nun das Instrument, auf diese Weise gefüllt, einem bedeutenden Wasserdrucke aus, so kann das im Cylinder eingeschlossene Wasser nur dadurch comprimirt werden, dass eine Portion Quecksilber aus der Röhre durch die feine Spitze in den Cylinder gepresst wird und die Menge des nach dem Heraufziehen fehlenden giebt an, wie viel die Compression beträgt. Zu dem Ende hat die Scala eine Eintheilung von $\frac{1}{2}$ Linien wo jede $\frac{1}{2}'''$ im Fallen des Quecksilbers auf beiden Seiten $\frac{1}{2673}$ des zu comprimirenden Wassers ausmacht; da nun noch $\frac{1}{5}$ der Eintheilung geschätzt werden kann, so steigt die Genauigkeit auf $\frac{1}{13365}$ des Volums. Man sieht leicht, dass die mit diesem Elaterometer erhaltenen Resultate von der Temperatur abhängig sind; man muss daher jeden Versuch in der Tiefe mit einem bathometrischen verbinden, der einem die Temperatur dieser Tiefe angiebt, und alsdann die gehörige Correctur anbringen.

Dies ist die Einrichtung unseres Instrumentes und man sieht, dass die Idee richtig und ausführbar sey. Das Misslingen unserer Versuche lag in der Eile, mit der wir die Ausrüstung betreiben mussten. Wir construirten nämlich, um ihn schnell fertig zu haben, den Cylinder von Blech und glaubten denselben durch ein starkes Ueberfirnissen im Innern vor dem Amalgamiren mit dem ausgeflossenen Quecksilber hinlänglich gesichert zu haben; allein der Mechanikus muss den Firniss nicht überall in gehöriger Dicke aufgetragen haben, so dass nach dem ersten Versuch das Instrument unbrauchbar ward. Dieser erste Versuch geschah aber zugleich mit dem ersten des Bathometers und diesen können wir nur als Probeversuch ansehn und haben ihn daher oben (pag. 280) aus unsrer Tabelle ausgeschlossen.

UEBER DEN SAUERSTOFFGEHALT DER LUFT IN VERSCHIEDENEN *Breiten und Längen.*

Als eudiometrische Substanz diente uns der Phosphor; den Absorbtionsraum aber bildete eine einfache graduirte Röhre, die an dem einen Ende zugeblasen war, an dem andern Ende aber mit einer Schraube und etwas Fett luftdicht verschlossen werden konnte, nachdem der Phosphor in zwei Stangen hineingebracht worden war. Um die zu prüfende Luft mit Bestimmtheit in der Röhre zu haben, ward diese vor dem Versuch mit Wasser gefüllt und dann auf dem Verdecke des Schiffs in freier Luft ausgeleert. Die an dem Glase hängenbleibende feine Wasserschicht gewährte uns den Vortheil, die Luft immer von demselben Feuchtigkeitszustand, nämlich vollkommen gesättigt, zu erhalten. Der Phosphor lag 24 Stunden in der Röhre und ward während der Zeit öfters hin uud hergerückt, um mit jeder Luftschicht in Berührung zu kommen. Die nach der Correctur für den veränderten Barometer-und Thermometerstand erhaltenen Resultate sind folgende:

Breite.	Länge von Grenwich.	Sauerstoffgeh.	Breite.	Länge von Grenwich.	Sauerstoffgeh.
39° 15′ N.	12° 48′ W.	20,71 pr. C.	32° 37′ S.	47° 19′ W.	22,49 pr. C.
63 20 —	14 6 —	21,56 —	56 43 —	69 23 —	20,86 —
25 39 —	17 45 —	21,38 —	19 17 —	97 8 —	21,20 —
16 23 —	26 27 —	20,44 —	20 34 N.	196 6 —	21.22 —
5 45 —	21 10 —	21.12 —	46 42 —	200 14 —	21,13 —

Nach dem letzten Versuche ward der Eudiometer noch öfters gefüllt, allein die Absorbtion ging nur bis 17 und 18 pct., ein Zeichen, dass der Phosphor schlecht geworden war, daher übergehen wir diese Versuche ganz.

Man findet in obiger Tabelle so manche Unregelmässigkeit, namentlich den hohen Sauerstoffgehalt bei 32°37′ Br. = 22,49, allein es wäre wohl zu voreilig dieselben blos auf Fehler bei der Manipulation des Instrumentes oder der Beob-

achtung zu schieben, da der beständig gleichmässige Gehalt an Sauerstoff noch nicht so bestimmt in allen Zonen und auf allen Meeren erwiesen ist. Der weit verbreitete Einfluss der Vegetation und Fäulniss auf den Sauerstoffgehalt der Luft muss sich in einem oder dem andern Falle doch gewiss auch durchs Eudiometer nachweisen lassen und mag dann Veranlassung geben zu der scheinbaren Anomalie, wie sie z. B. in dem angeführten Falle stattfindet. Auf alle Fälle verdienen solche Versuche in verschiedenen Meeren so viel möglich vervielfältigt zu werden.

Die in der Instruction uns angegebenen Versuche über den Kohlensäuregehalt der Luft konnten wir leider nicht anstellen, da das Anthracometer auf dem Transport nach St.-Petersburg zerbrochen war und der Schade, der unmittelbar drauf erfolgten Abreise wegen, nicht mehr ersetzt werden konnte. Zwei ähnliche Instrumente, die uns vom Staatsrath von Parrot durch Schiffsgelegenheit nachgesendet wurden, haben uns leider nicht erreicht.

ÜBER DEN SALZGEHALT DER LUFT UEBER DEM MEERE.

Um zu untersuchen ob die Luft über dem Meere Salztheilchen enthalte, wurde etwas destillirtes Wasser in einer Bouteille mit der in derselben befindlichen Luft stark und anhaltend geschüttelt und dann mittelst etwas salpetersauren Silbers geprüft, ob dasselbe aus der Luft Salztheilchen aufgenommen habe. In den meisten Fällen fand sich eine geringe Weissfärbung durch dasselbe, in einigen wenigen war jedoch diese geringe Spur nicht zu entdecken. Dieses Salz ist aber in die Luft schwerlich durch Ausdünstung mit übergetreten, sondern der, bei starkem Winde in die Luft sprützende, feine Wasserstaub verdunstet, ehe er wieder herabfällt und die zurückbleibenden äusserst fein zertheilten Salztheilchen bleiben in derselben schweben.

BAROMETRISCHE HOEHENMESSUNGEN.

1. *Der Vulkan von Awatscha in Kamtschatka.*

Die Höhenbestimmung konnte nur durch isolirte Beobachtungen geschehen, von denen folgende fünf uns zur Bestimmung der Höhe dienten:

Um 12^h Mitt. Am Tage d. Abr. stand d. Barom. am Ufer d. Meers auf 336‴ Thr. 11°R
12^h — Am 3ten Tage der Reise — am Fuss des Kegels 271‴ — 6°,9 —
3^h 15′ — — — — — am rauchenden Krater 251,2 — 6°,4 —
4^h 30′ — — — — — auf der Spitze des Kegels 249,5 — 2°,4 —
10^h 00′ — 5ten Tage — — — am Ufer des Meers 336,5 — 11°,0 —

Das Wetter von allen fünf Tagen war gleich trübe und meistens regnigt. Wir berechnen zuerst aus der ersten und zweiten Beobachtung, die an einer Tageszeit statt fanden, die Höhe des Fusses des eigentlichen vulkanischen Kegels und finden dieselbe, mit Zuziehung der Wärmecorrectur für die Luft, nach der Formel von LAPLACE = 906,5 Tois. Die Höhe vom Fuss bis zum Krater findet sich aus der zweiten und dritten Beobachtung = 316,6, und von dort bis zum Gipfel = 22,4

Wir haben also bis zum Fusse = 906,5 T.
von dort bis zum Krater = 316,6 T.
von dort bis zum Gipfel = 22,4 T.

folglich die Höhe des Gipfels = 1245,5 = 7473 paris. Fuss

Die 4te und 5te Beobacht. combinirt gäbe = 1250,8 = 7504,8 allein das erste Resultat kommt der Wahrheit offenbar näher.

2. *Der Berg Edjecumbe auf der Insel Sitcha.*

Die auf 0° reducirten Barometerhöhen sind folgende:

Um 6^h morgens war dieselbe = 760,4 millim. am Meere. Therm. = 9,2 R
— 12^h,5 mittags — — = 681,2 — auf der Spitze. — = 10,8 „
— 6^h abends — — = 757,6 — — am Meere. — = 14,4 „

Der Barometer auf der Spitze musste 40 Fuss niedriger hinter einer chützenden Felswand abgelesen werden, des heftigen Windes wegen.

Aus anderweitigen Beobachtungen ergab sich, dass wenn die Temperatur an trüben Tagen, wie der des Versuchs einer war, um 6^h Abends 14°,4 war, dieselben um Mittag etwa 15° angab. Die Beobachtungen unten, oben und wieder unten geschahen um 6^h; $12{,}5^h$; 6^h also alle drei etwa in der Mitte des höchsten und niedrigsten Barometerstandes am Tage, wenn man die regelmässige Veränderung wie in europäischen Orten unter derselben Breite um 9^h und 3^h annimmt; was daher diese betrifft, so müssten die Barometerstände um 6; 12,5; 6 am Meeresstrande gleich seyn. Den in unsern Beobachtungen statt gefundenen Unterschied wird man daher auf ein unregelmässiges Fallen des Barometers schieben müssen, was auch sehr wahrscheinlich ist durch die Veränderung des Wetters, das am Tage vorher völlig heiter, am Tage der Beobachtung sich trübte, und am folgenden Regen war.

Wir werden nach diesen Betrachtungen nicht sehr fehlen wenn wir das Mittel aus der ersten und dritten Beobachtung für den wahren Barometerstand um Mittag annehmen, so dass wir also haben für die auf 0 reducirte Barometerhöhe.

Um 12^h Barometer am Meere	= 759,0mm.	Therm.	= 15° R.
— — — 40 Fuss unter der Spitze	= 681,1	— — —	= 10,6 ,,

Folglich die Höhe = 906,3 mètr. + 40 Fuss = 2759′ paris. Maass., wobei die Temperatur der Luft bei der Correctur nicht übergangen worden ist.

3. *Der Pyramidenberg auf Sitcha am Hafen von Neu-Archangel.*

Die Data der Messung sind:

1. Um 8^h morgens am Meere Barometer . .	=	340,5‴	10,8 R.
2. — 12^h auf dem ersten Gipfel (Kreutzberg)	=	310,75	9,5 —
3. — 2^h auf dem höchsten Gipfel	=	301,5	7,8 —
4. — 7^h am Meere	=	340,1	11,9 —

Daraus giebt die Rechnung bis zum Kreutzberg . . . . . . 376 T,
— — — — von dort bis zur Spitze der Pyramide 122 —
folglich die Höhe der Pyramide vom Meere 498 —
Die Berechnung aus einer Station bis zur Pyramide gäbe nach 1 u. 3 die Höhe = 507,4
— — — — — — — 3 u. 4 — = 504,9

Nimmt man aus diesen drei Resultaten das Mittel so hat man = 503,4 T. oder 3020,4 pariser Fuss.

ANHANG.

ÜBER DIE KRUMME LINIE, DIE EIN IN STRÖMENDEM WASSER HÄNGENDES BLEILOTH BILDET.

Bei Bearbeitung der vorhergegangenen Beobachtungen, die ich auf meiner Seereise unter dem Kapitän Kotzebue in Bezug auf die Temperatur des Meeres in der Tiefe angestellt hatte, ward ich darauf geführt die Gleichung für die krumme Linie zu suchen, die das Seil meines Bathometers bildete, wenn es nicht vertikal hinunterhing, sondern durch eine progressive Bewegung des Schiffes einen Winkel mit der senkrechten Richtung bildete. Allein die Lösung dieser Aufgabe war für meine dortigen Beobachtungen eigentlich von keinem practischen Nutzen, da sich der Winkel während des Versuches beständig änderte, so dass wir daraus ersehen, dass das Schiff keine regelmässig progressive Bewegung nach einer Richtung hatte, sondern durch die Wellen bald hierhin, bald dorthin geworfen wurde. Ich behielt mir daher die Lösung jener Aufgabe bis auf spätere Zeit vor und betrachtete dort in einer Anmerkung nur den hypothetischen Fall, wie man, bei Voraussetzung, das Seil mit dem daran hängenden Cylinder bilde eine gerade Linie, aus dem Winkel die Stärke der Bewegung des Schiffs finden könnte, oder mit anderen Worten, welche Geschwindigkeit dem Winkel entspräche, den ein unten mit einem schweren Cylinder belasteter Stab in einem Strome mit der Vertikalen mache; eine Aufgabe, die, wie ich glaube, einer praktischen Anwendung auf die Construction eines Strommessers sehr wohl fähig ist.

In diesem Anhange habe ich das dort gegebene Problem weiter durch Rechnung verfolgt und obgleich ich bei der Rectification der krummen Linie auf drei Gleichungen von höherem Grade gestossen bin, zur Bestimmung dreier unbekannter Grössen, so lässt sich doch eine Näherung finden mit Zuziehung der

Bedingungen, dass man die Schnelligkeit des Laufes des Schiffes kenne und dass dieselbe sehr klein sey; beide Bedingungen sind für den practischen Gebrauch zulässlich.

In der obengenannten Anmerkung (pag. 262) findet sich der Beweis für den Satz, *dass die Wirkung des Stosses des gegen eine Kreisperipherie anströmenden Wassers gleich sey der Wirkung auf eine gerade Linie von der Länge des vierten Theils der Peripherie, welche dem Strome gerade entgegengesetzt wird.*

Mit Voraussetzung dieses Satzes können wir nun zur Auflösung unsrer eigentlichen Aufgaben schreiten.

Ich bemerke zuerst, dass es einerlei ist, ob wir annehmen, das Schiff bewege sich und die Wassermasse sey in Ruhe, oder der Punkt, von welchem das Bleiloth hinabgelassen werde, ruhe und die ganze Wassermasse bewege sich nach entgegengesetzter Richtung. Ich werde mich in Zukunft der letzteren Ansicht bedienen, als der einfachern und deutlichern. Wir denken uns also ein Seil von bekanntem spezifischen Gewichte und an seinem untern Ende einen Cylinder daran befestigt, dessen Dimensionen und spezifisches Gewicht gleichfalls bekannt sind, beide in einen Strom von überall gleichmässiger Geschwindigkeit gesenkt.

Auf Tab. V. Fig. 4. stelle daher *am* die krumme Linie vor, in welcher das Seil in dem von h nach p fliessenden Strome hinunterhängt. Wir nehmen die Abscissen in der Linie ax und die Ordinaten parallel mit ay an und setzen den Anfangspunkt der Coordinaten in a. Der Winkel α ist uns durch unmittelbare Beobachtung gegeben. Betrachten wir ein Stück des Seils $= s$, von a bis zum Puncte m, dem die Coordinaten x und y zugehören, so haben wir aus der Theorie der Seilpolygone den Satz, dass das Seilstück s im Gleichgewicht sey, wenn alle auf dieses Stück wirkende Kräfte, parallel mit ihrer Richtung in einen Punkt versetzt, mit einander im Gleichgewicht stehen. Ziehen wir also zu a und m die Tangenten ap und mp und versetzen wir alle auf s wirkende Kräfte parallel mit ihrer Richtung nach p: so muss der Punct p im Gleichgewicht seyn. Auf das Stück *am* wirken aber, ausser den Spannungen in a und m, das Gewicht

des Stücks *am* in der Richtung *pg* und der Strom des Wassers in der Höhe x und in der Richtung *ph*. Beide Kräfte müssen wir als Gewichte, auf dieselbe Einheit bezogen, ausdrücken. Sei daher der Halbmesser des Seildurchschnitts $= r$, das spezifische Gewicht des Seils gegen das des Meerwassers $= m$, die Geschwindigkeit des Stromes $= v$, so haben wir:

Das Gewicht des Seils von der Länge s im Wasser $= r^2\pi(m - 1)\ s = ps$ wobei als Einheit des Gewichtes das Gewicht einer Portion Meerwassers, die den Cubus der Längeneinheit gleich ist, gilt. Da es aber hier blos auf das Verhältniss beider Kräfte (des Gewichts des Seils und des Wasserstosses) ankömmt, so ist die Gewichtseinheit gleichgültig, nur muss sie bei Bestimmung beider Kräfte dieselbe seyn.

Die Kraft des mit der Geschwindigkeit $= v$ strömenden Wassers kann nach dem bekannten toricellischen Satze ausgedrückt werden durch $\frac{v^2}{2g}$, wo g der doppelte Fallraum der ersten Secunde beträgt. Die ganze auf das Seil in der Tiefe $= x$ wirkende Kraft wird also nach unserm obigen Satz für den Wasserstoss auf eine Kreisperipherie seyn:

$$\frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\pi r}{2} \cdot x = qx$$

Es wirken also auf den Punkt p, in welchen wir uns alle Kräfte versetzt denken

die Spannung $= a$ in der Richtung *pa*
die Spannung $= b$ in der Richtung *pm*
die Kraft $= ps$ in der Richtung *pg*
die Kraft $= qx$ in der Richtung *hp*

Diese Kräfte müssen mit einander im Gleichgewicht seyn; wir kennen von ihnen nur p und q, dagegen a und b uns unbekannt sind.

Zerlegen wir diese 4 Kräfte in 2 in der Richtung der Coordinaten wirkende, so haben wir mit Rücksicht auf die Zeichen, je nachdem die Richtung derselben ist, folgende 2:

in der Richtung von x . . . $ps + b \cdot \cos.\, \omega - a \cdot \cos.\, \alpha$

in der Richtung von y . . . $qx + b \cdot \sin.\, \omega - a \cdot \sin.\, \alpha$

Beide Kräfte müssen im Fall des Gleichgewichtes $= 0$ seyn, nach dem bekannten Satze der Statik; wir haben daher, wenn wir statt $\cos.\, \omega$ und $\sin.\, \omega$ ihre Werthe $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$ setzen, folgende zwei Grundgleichungen

$$\left.\begin{aligned} ps + b \cdot \frac{dx}{ds} - a \cdot \cos.\, \alpha &= 0 \\ qx + b \cdot \frac{dy}{ds} - a \cdot \sin.\, \alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Bestimmen wir aus beiden Gleichungen b und setzen die Werthe einander gleich, so haben wir

$$\frac{(a \cdot \cos.\, \alpha - ps)}{dx}\, ds = \frac{(a \cdot \sin.\, \alpha - qx)}{dy}\, ds$$

und hieraus

$$(a \cdot \cos.\, \alpha - ps)\, dy = (a \cdot \sin.\, \alpha - qx)\, dx$$

Da es uns aber nicht so sehr auf die Bestimmung der Gleichung der krummen Linie, als auf ihre Rectification ankommt, so schaffen wir dy aus obiger Gleichung heraus, indem wir setzen $dy = \sqrt{ds^2 - dx^2}$, alsdann haben wir, wenn wir zugleich mit $a \cdot \sin.\, \alpha - ps$ dividiren und auf beiden Seiten zum Quadrat erheben

$$ds^2 - dx^2 = \frac{(a \cdot \sin.\, \alpha - qx)^2}{(a \cdot \cos.\, \alpha - ps)^2} \cdot dx^2$$

oder setzen wir der Kürze halber $a \cdot \sin.\, \alpha - qx = t$ und $a \cdot \cos.\, \alpha - ps = z$, so dass also $dx = -\frac{dt}{q}$ und $ds = -\frac{dz}{p}$ ist, und diese Werthe in unsere Gleichung, so haben wir:

$$\frac{dz^2}{p^2} - \frac{dt^2}{q^2} = \frac{t^2}{z^2} \cdot \frac{dt^2}{q^2}$$

und daraus wird endlich nach gehöriger Reduction

$$qz \cdot dz = \sqrt{t^2 + z^2} \cdot p \cdot dt$$

Um nun die Variabeln zu trennen, setzen wir $z = \xi t$, wo ξ eine variable Grösse ist, also $dz = \xi \cdot dt + t \cdot d\xi$ und finden alsdann, wenn wir diese Werthe für z und dz suppliren

$$q \cdot \xi t\,(\xi \cdot dt + t \cdot d\xi) = \sqrt{t^2 + \xi^2 t^2}\; p \cdot dt$$

überall mit t dividirt und den ersten Theil mit $q\xi$ multiplicirt, so ergiebt sich

$$q\xi^2 \cdot dt + q\xi t d\xi = \sqrt{1 + \xi^2}\; p \cdot dt$$

oder endlich

$$\frac{dt}{t} = \frac{q\xi \cdot d\xi}{p\sqrt{1+\xi^2} - q\xi^2}$$

Um die irrationellen Grössen fortzuschaffen, setzen wir $\sqrt{1 + \xi^2} = v$, also $\xi = \sqrt{v^2 - 1}$ und $d\xi = \frac{v \cdot dv}{\sqrt{v^2 - 1}}$, unsre Gleichung wird also

$$\frac{dt}{t} = \frac{qv \cdot dv}{pv - q\,(v^2 - 1)} = \frac{qv \cdot dv}{q + pv - qv^2}$$

und wir haben die Rectification unserer Linie durch die Gleichung

$$\log.\, t = \int \frac{qv \cdot dv}{q + pv - qv^2} + \log.\, A$$

wo denn nach vollbrachter Integration v und t durch z und x ausgedrückt werden müssen.

Die Integration des Trinomiums können wir leicht auf die eines Binomiums bringen, wenn wir $v = \zeta + \frac{p}{2q}$ setzen, wodurch sich dasselbe verwandelt in

$$\int \frac{\left(q\zeta + \frac{p}{2}\right) d\zeta}{q + \frac{p^2}{4q} - q\zeta^2}$$

Daraus erhalten wir, wenn wir den Zähler wirklich mit $d\zeta$ multipliciren, zwei Binomien, die sich nach bekannten Regeln integriren lassen. In die gefundene Gleichung suppliren wir statt ζ seinen Werth $= v - \frac{p}{2q}$ und so finden wir endlich

$$\log.\, t = \log.\, A - \tfrac{1}{2}\log.\,(q + pv - qv^2) + \frac{p}{\sqrt{4q^2 + p^2}}\log.\,\frac{\sqrt{4q^2 + p^2} - p + 2qv}{2\sqrt{q\,(q + pv - qv^2)}}$$

Wir haben aber $v = \sqrt{1 + \xi^2}$ und $\xi = \frac{z}{t}$, folglich $v^2 = \frac{t^2 + z^2}{t^2}$ und $v = \frac{\sqrt{t^2 + z^2}}{t}$, also wenn wir $\frac{p}{\sqrt{4q^2 + p^2}} = P$ setzen, der Kürze halber,

$$\log. t = \log. A - \tfrac{1}{2} \log. \left(\frac{pt\sqrt{t^2 + z^2} - qz^2}{t^2}\right) + P \cdot \log. \left(\frac{t\sqrt{4q^2 + p^2} - pt + 2q\sqrt{t^2 + z^2}}{2\sqrt{(pt\sqrt{t^2 + z^2} - qz^2)q}}\right) \quad (B)$$

Zur Bestimmung der Const. log. A haben wir die Bedingung, dass für $x = 0$ auch $s = 0$ werden muss; da wir aber oben $a \cdot \sin. \alpha - qx = t$ und $a \cdot \cos. \alpha - ps = z$ gesetzt haben, so folgt, dass für x und $s = 0$ diese Gleichungen sich verwandeln in $a \cdot \sin. \alpha = t$ und $a \cdot \cos. \alpha = z$. Hierdurch wird unsere so eben gefundene Hauptgleichung in die folgende verwandelt, indem $a^2 \cdot \cos.^2 \alpha + a^2 \sin.^2 \alpha = a^2$ ist

$$\log. (a \sin. \alpha) = \log. A - \tfrac{1}{2} \log. \left(\frac{p \cdot \sin. \alpha - q \cdot \cos.^2 \alpha}{\sin.^2 \alpha}\right) + P \cdot \log. \frac{\sin. \alpha \sqrt{4q^2 + p^2} - p \sin. \alpha + 2q}{2\sqrt{(p \cdot \sin. \alpha - q \cdot \cos.^2 \alpha)q}}$$

Hieraus erhält man

$$A = a \cdot \frac{\sin. \alpha \cdot \sqrt{p \cdot \sin. \alpha - q \cdot \cos.^2 \alpha}}{\sin. \alpha} : \left(\frac{\sin. \alpha \cdot \sqrt{4q^2 + p^2} - p \cdot \sin. \alpha + 2q}{2\sqrt{(p \sin. \alpha - q \cdot \cos.^2 \alpha)q}}\right)^P$$

$$= a \cdot \left(\frac{2\sqrt{q}}{\sin. \alpha \sqrt{4q^2 + p^2} - p \sin. \alpha + 2q}\right)^P \cdot \left(\sqrt{p \cdot \sin. \alpha - q \cdot \cos.^2 \alpha}\right)^{P+1} = a \cdot B$$

wo also

$$B = \sqrt{p \sin. \alpha - q \cdot \cos.^2 \alpha}^{\,P} \cdot \left(\frac{2\sqrt{q}}{\sin. \alpha \sqrt{4q^2 + p^2} - p \sin. \alpha + 2q}\right)^{P+1}$$

also eine nicht vollständig bekannte Grösse ist, denn alle Grössen im Ausdruck desselben sind gegeben, bis auf v im Ausdruck q; P ist, als $= \frac{p}{\sqrt{4q^2 + p^2}}$, gleichfalls unbekannt.

Unsere allgemeine Gleichung (B) wird also, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht.

$$t = aB \left(\frac{t\sqrt{4q^2 + p^2} - pt + 2q\sqrt{t^2 + z^2}}{2\sqrt{q} \cdot \sqrt{pt\sqrt{t^2 + z^2} - qz^2}}\right)^P \cdot \frac{t}{\sqrt{pt\sqrt{t^2 + z^2} - qz^2}}$$

oder endlich

$$\left(pt\sqrt{t^2+z^2}-qz^2\right)^{\frac{P+1}{2}}=a\cdot B\cdot\left(\frac{t\sqrt{4q^2+p^2}-pt+2q\sqrt{t^2+z^2}}{2\sqrt{q}}\right)^P \quad (C)$$

In der so eben gefundenen Gleichung sind ausser x und s (in den Werthen von z und t) noch zwei unbekannte Grössen enthalten, die man zu bestimmen hat, ehe x durch s bestimmt werden kann, nämlich die Spannung a, die auch in den Werthen t und z steckt und die Geschwindigkeit des Stroms $= v$, die in dem Coefficienten q, B und P steckt.

Zu ihrer Bestimmung können wir aber noch zwei Gleichungen herleiten. Setzt man nämlich in z die ganze Länge des gebrauchten Seils für s oder lässt man s diese ganze Länge bedeuten, so ist b die Spannung an dem untersten Punkte, die durch das unten angehängte Gewicht und den Stoss des Wassers an dasselbe bestimmt wird. Rechnen wir für dieses, wie es bei unserem Bathometer der Fall ist, einen Cylinder von dem Halbmesser $= \varrho$, der Höhe $= \lambda$ und dem spezifischen Gewichte $= n$, so wird offenbar die Richtung des letzten Elementes des Seils blos durch diesen bestimmt, sie wird also mit der Axe des Cylinders (in sofern dieser als homogen oder wenigstens aus concentrischen homonen Schichten bestehend gedacht wird) in einer geraden Linie zusammenfallen. Diese Axe wird also den oben bezeichneten Winkel ω mit der Axe der x bilden, wenn wir in unserer Figur den Cylinder bei m hängend denken.

Wir haben aber das Gewicht des Cylinders $= \varrho^2\pi\,(n-1)\,\lambda = k$, folglich zerlegt:

in der Richtung der Axe $= \varrho^2\pi\,(n-1)\,\lambda\cdot\cos.\,\omega = k\cdot\cos.\,\omega$

senkrecht auf der Axe $= \varrho^2\pi\,(n-1)\,\lambda\cdot\sin.\,\omega = k\cdot\sin.\,\omega$

Der Stoss des Wassers auf diesen schief hängenden Cylinder ist doppelt, erstens auf die Seitenfläche desselben und dann auf den obern Boden. Die Ausdrücke dafür sind:

Druck auf die Seitenfläche in Richtung des Stroms $= \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{r\pi}{2} \cdot \lambda \cdot \cos.\omega = f \cdot \cos.\omega$

„ „ „ Bodenfläche „ „ „ „ „ $= \frac{v^2}{2g} \cdot r^2\pi \cdot \sin.\omega = h \cdot \sin.\omega$

wo wir also setzen:

$$f = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{r\pi}{2} \cdot \lambda \text{ und } h = \frac{v^2}{2g} \cdot r^2\pi$$

Zerlegen wir nun diese beiden Kräfte in zwei rechtwinklige, senkrecht auf der Axe des Cylinders und in der Richtung derselben, so haben wir die folgenden Componenten:

die erste zerlegt in Richtung der Axe $= f \cdot \cos.\omega \cdot \sin.\omega$,

senkrecht auf dieselbe $= f \cdot \cos.^2\omega$

die zweite zerlegt in Richtung der Axe $= h \cdot \sin.^2\omega$,

senkrecht auf dieselbe $= h \cdot \sin.\omega \cdot \cos.\omega$

Wir haben also die Spannung des Seils bei m, sowohl durch die Schwere des Cylinders als durch den Wasserdruck auf denselben,

$$b = k \cdot \cos.\omega + f \cdot \cos.\omega \cdot \sin.\omega + h \cdot \sin.^2\omega$$

Die beiden andern Kräfte, senkrecht auf der Axe, und von der Schwere und dem Wasserdrucke hervorgebracht, sind einander entgegengesetzt und im Gleichgewicht, man hat also

$$k \cdot \sin.\omega = f \cdot \cos.^2\omega + h \cdot \cos.\omega \cdot \sin.\omega$$

Wir haben aber früher die zwei Gleichungen entwickelt (pag. 334):

$$ps + b \cdot \cos.\omega - a \cdot \cos.\alpha = 0, \text{ daher } \cos.\omega = \frac{a \cdot \cos.\alpha - ps}{b} = \frac{z}{b}$$

$$qx + b \cdot \sin.\omega - a \cdot \sin.\alpha = 0, \text{ daher } \sin.\omega = \frac{a \cdot \sin.\alpha - qx}{b} = \frac{t}{b}$$

erheben wir auf beiden Seiten zum Quadrat und addiren alsdann die beiden Gleichungen, so ergiebt sich, weil $\sin.^2\alpha + \cos.^2\alpha = 1$ ist,

$$1 = \frac{z^2}{b^2} + \frac{t^2}{b^2}$$

daraus finden wir also $b = \sqrt{z^2 + t^2}$ und folglich ist $\cos.\,\omega = \frac{z}{\sqrt{z^2+t^2}}$ und $\sin.\,\omega = \frac{t}{\sqrt{z^2+t^2}}$

Unsere so eben gefundenen beiden Gleichungen verwandeln sich durch Substitution dieser Werthe von b, $\cos.\,\omega$, $\sin.\,\omega$ in die folgenden:

$$\sqrt{z^2+t^2} = k \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2+t^2}} + f \cdot \frac{zt}{z^2+t^2} + h \cdot \frac{t^2}{z^2+t^2} \qquad (D)$$

$$k \cdot \frac{t}{\sqrt{z^2+t^2}} = f \cdot \frac{z^2}{z^2+t^2} + h \cdot \frac{zt}{z^2+t^2} \qquad (E)$$

So haben wir denn zur Bestimmung der unbekannten Grössen a, v, s die drei Gleichungen C, D, E, die wir hier zusammenstellen, nachdem wir (D) und (E) auf eine etwas bequemere Form gebracht haben

$$\left(pt\sqrt{z^2+t^2} - qz^2\right)^{\frac{P+1}{2}} = a \cdot B \left(\frac{t\sqrt{4q^2+p^2} - pt + 2q\sqrt{t^2+z^2}}{2\sqrt{q}}\right)^{P} \qquad (C)$$

$$\left(z^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}} = kz\sqrt{z^2+t^2} + t\left(fz + ht\right) \qquad (D)$$

$$kt\sqrt{z^2+t^2} = z\left(fz + ht\right) \qquad (E)$$

Die unbekannten Grössen sind enthalten in t, z, q, f, h, B und P.

Setzen wir aber voraus, v sey gegeben, wie man denn die Geschwindigkeit der Bewegung des Schiffs leicht auf bekannte Art finden kann, so brauchen wir nur noch zwei Gleichungen zur Bestimmung von a und s, also etwa die Gleichungen D und E. Doch auch diese sind von höherem Grade und lassen sich so ohne Weiteres nicht auflösen. Da aber die bathometrischen Versuche auf jeden Fall nur bei äusserst geringem Laufe des Schiffs vorgenommen werden können, so wird der Winkel ω, den das Instrument im Wasser mit der Vertikalen macht, gleichfalls eine sehr kleine Grösse seyn; man wird die höheren Potenzen von $\sin.\,\omega$ vernachlässigen können und nur $\sin.\,\omega$ beibehalten dürfen; dann wird auch $\cos.\,\omega = \sqrt{1 - \sin.^2\omega} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\sin.^2\omega \cdots = 1$ gesetzt werden können. Nehmen wir daher unsere früheren Gleichungen wieder hervor, so haben wir dieselben

$$b \text{ oder } \frac{z}{\cos.\ \omega} = k \cdot \cos.\ \omega + f \cdot \cos.\ \omega \cdot \sin.\ \omega + h \cdot \sin.\ {}^2\omega$$

und

$$k \cdot \sin.\ \omega = f \cdot \cos.\ {}^2\omega + h \cdot \cos.\ \omega \cdot \sin.\ \omega.$$

Für die Annahme $\sin.\ {}^2\omega = 0$ und $\cos.\ \omega = 1$ verwandeln dieselben sich in

$$z = k + f \cdot \sin.\ \omega$$

$$k \cdot \sin.\ \omega = f + h \cdot \sin.\ \omega$$

oder setzt man für $\sin.\ \omega$ seinen Werth

$$= \frac{t}{\sqrt{t^2 + z^2}}$$

so verwandeln sich diese Gleichungen in

$$(z - k)^2 \cdot (t^2 + z^2) = f^2 t^2$$

$$(k - h)^2 \cdot t^2 = f^2 (t^2 + z^2)$$

Aus der zweiten Gleichung ergiebt sich

$$t^2 = \frac{f^2 z^2}{(k - h)^2 - f^2}$$

und dieser Werth in die erste supplirt, haben wir

$$(z - k)^2 \cdot \frac{[f^2 + (k - h)^2 - f^2]}{(k - h)^2 - f^2} \cdot z^2 = \frac{f^4 \cdot z^2}{(k - h)^2 - f^2}$$

oder wenn man aufhebt, was sich aufheben lässt und auf beiden Seiten die Wurzel zieht

$$(z - k)(k - h) = f^2$$

daraus

$$z = \frac{f^2 + k(k - h)}{k - h} = \varphi$$

Für z seinen Werth $= a \cdot \cos.\ \alpha - ps$ gesetzt, ergiebt sich

$$a = \frac{\varphi + ps}{\cos.\ \alpha}$$

Da aber $t = \frac{fz}{\sqrt{(k - h)^2 - f^2}}$, so ergiebt sich, wenn wir für t und z ihre Werthe $= a \cdot \sin.\ \alpha - qx$ und $a \cdot \cos.\ \alpha - ps$ setzen

$$a \cdot \sin. \alpha - qx = \frac{f \cdot (a \cdot \cos. \alpha - ps)}{\sqrt{(k-h)^2 - f^2}}$$

oder wenn wir $\sqrt{(k-h)^2 - f^2} = \beta$ setzen und den Werth von a entwickeln

$$a = \frac{\beta q x - fps}{\beta \cdot \sin. \alpha - f \cdot \cos. \alpha}$$

Diesen Ausdruck von a setzen wir dem vorigen gleich, und haben

$$\frac{\varphi + ps}{\cos. \alpha} = \frac{\beta q x - fps}{\beta \cdot \sin. \alpha - f \cdot \cos. \alpha}$$

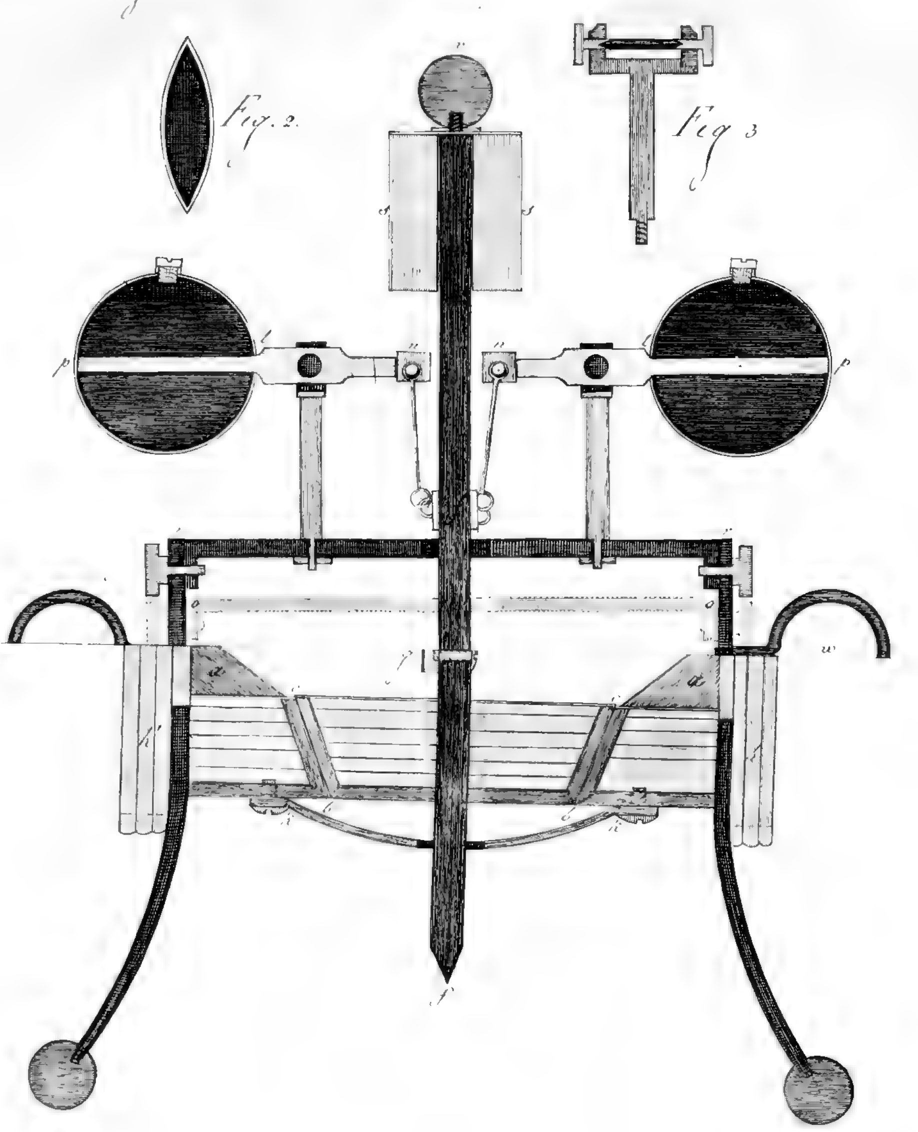
woraus nach gehöriger Reduction sich endlich ergiebt

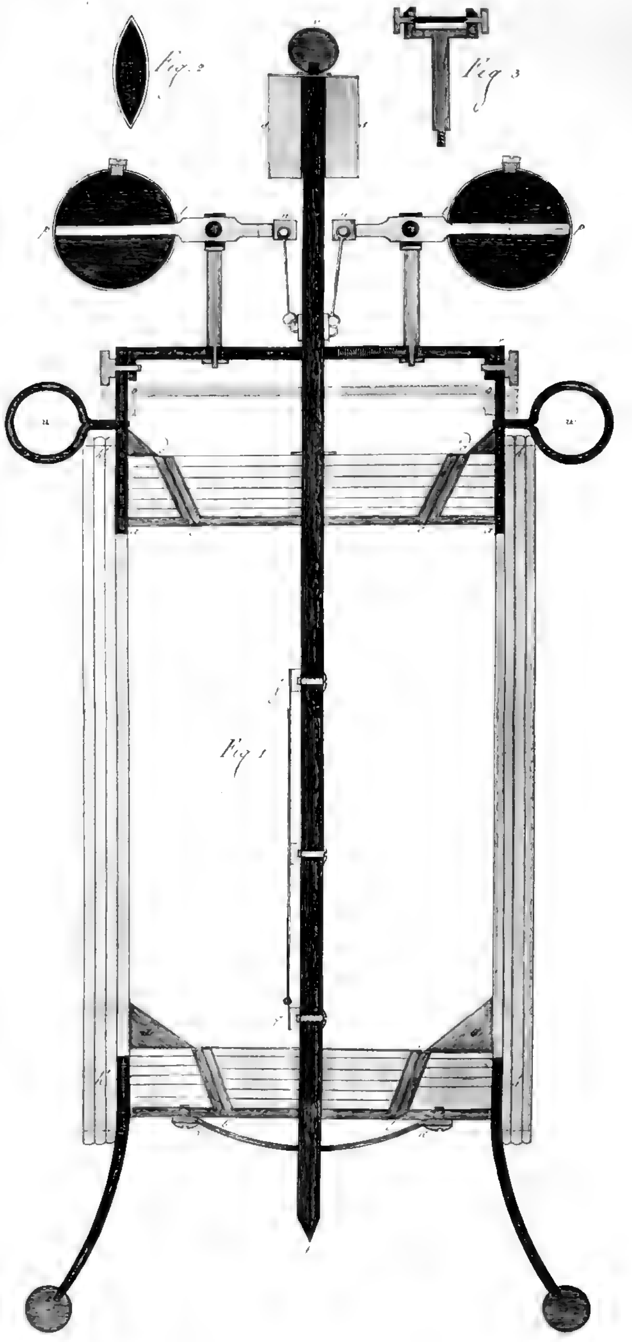
$$x = \frac{\varphi\beta \cdot \text{tang.}\ \alpha - \varphi f + \beta ps\ \text{tang.}\ \alpha}{\beta q}$$

oder wenn man für φ und β ihre Werthe $= \frac{f^2 + k(k-h)}{k-h}$ und $\sqrt{(k-h)^2 - f^2}$ setzt

$$x = \frac{f^2 + k(k-h)}{q(k-h)} \cdot \text{tang.}\ \alpha - \frac{f[f^2 + k(k-h)]}{q(k-h)\sqrt{(k-h)^2 - f^2}} + \frac{sp\ \text{tang.}\ \alpha}{q}$$

Nachschrift. Die uns aufgetragenen Beobachtungen der magnetischen Neigung sind zwar angestellt, allein wir nehmen Anstand sie hier mitzutheilen, weil sie, obgleich an einem sonst schön gearbeiteten 10zölligen Inclinatorium von Dolland angestellt, doch nicht die erforderliche Genauigkeit haben. Die Ursache davon, die wir besonders nach unserer Zurückkunft deutlich erkannten, war, dass die, nach Mayers Art mit anzuschraubenden Kugeln eingerichtete, Nadel zu wenig gehärtet war, so dass sie während des Versuchs ihre Intensität änderte.


Fig. 2.
Fig 3
Maasstab.


Fig. 2
Fig. 3
Fig. 1
Maasstab in Engl. Fussen

Lenz. Physik. Beobachtungen.

Tab. II

Fig. 2

Fig. 2

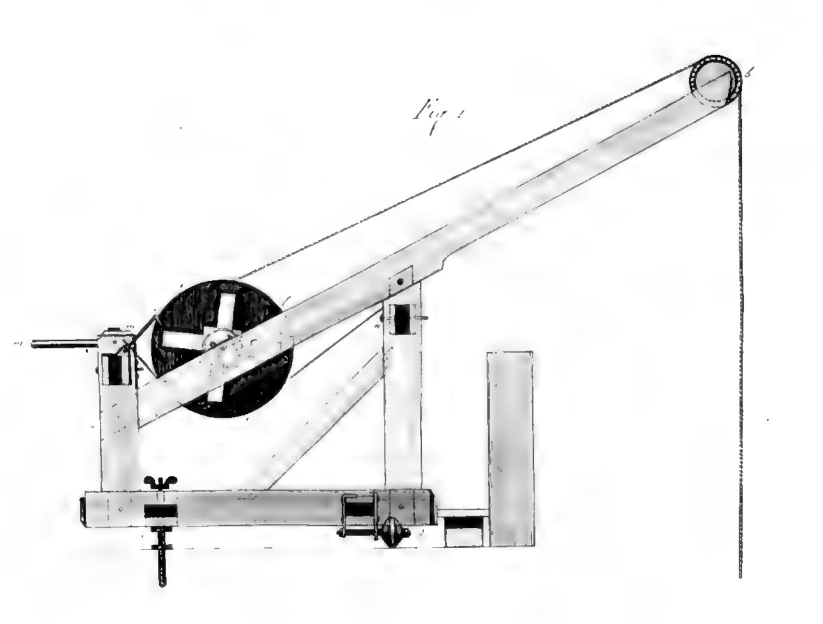
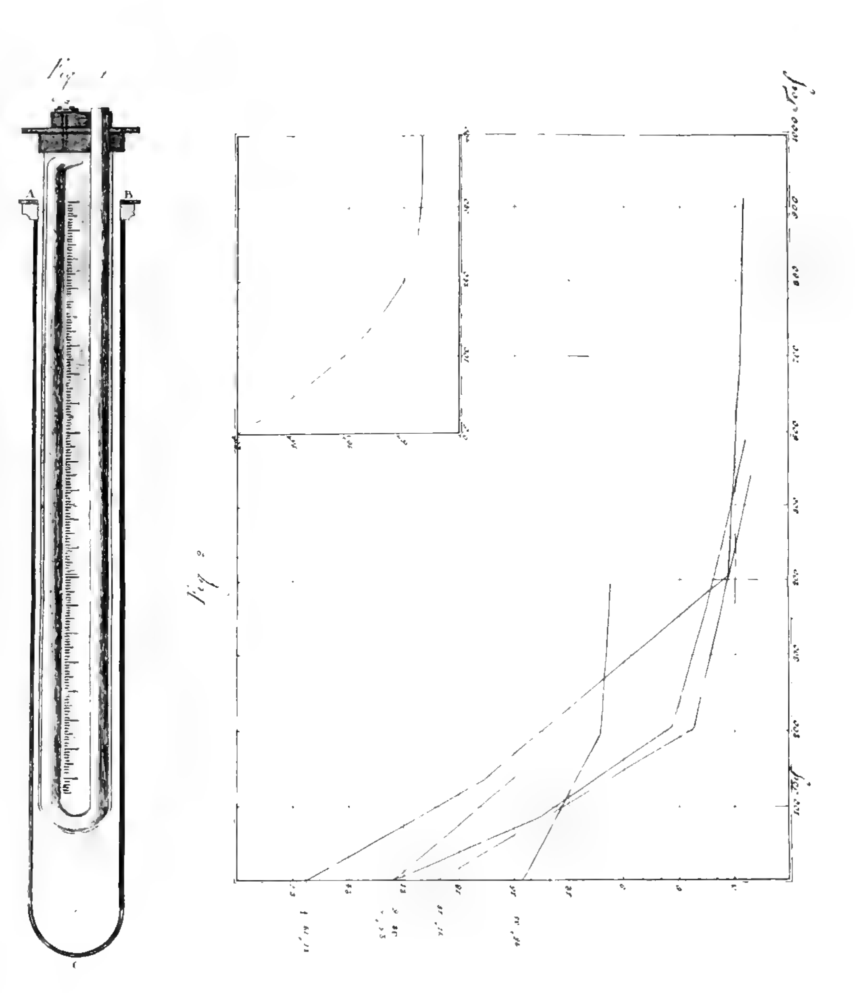
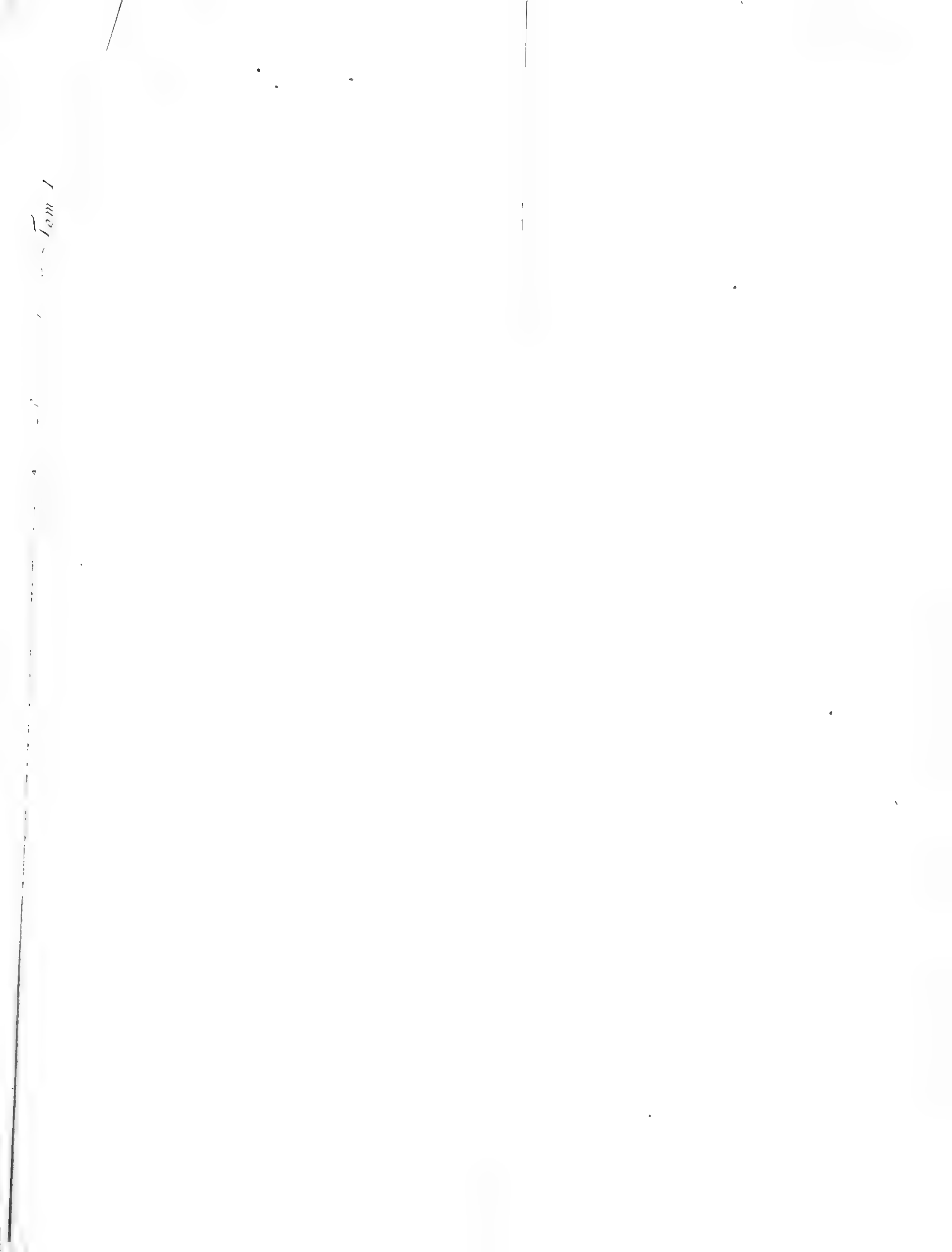


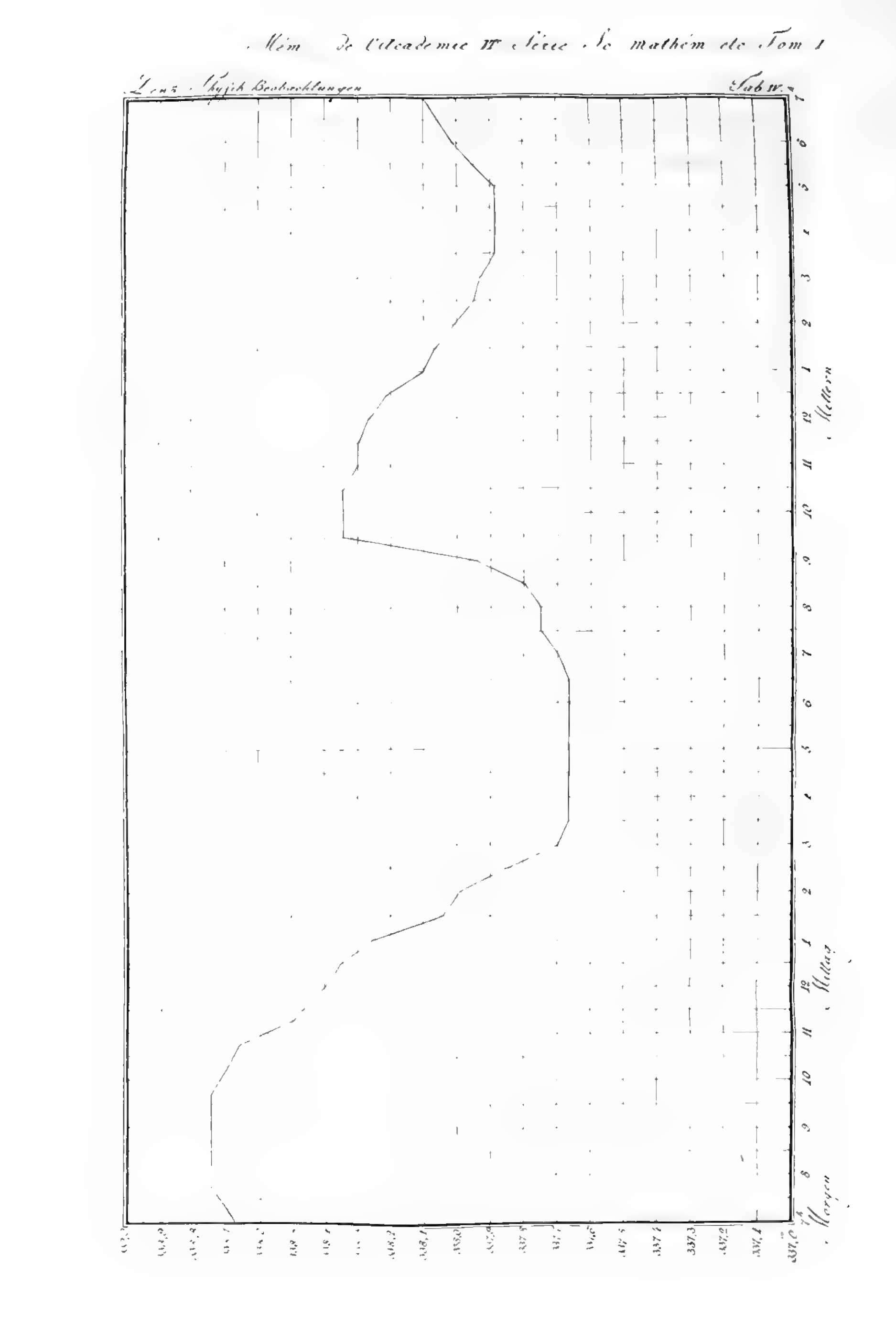
Fig. 1

Lenz Physik. Beobachtungen

Tab. III.


Fig. 1
A
B
C
Fig. 2

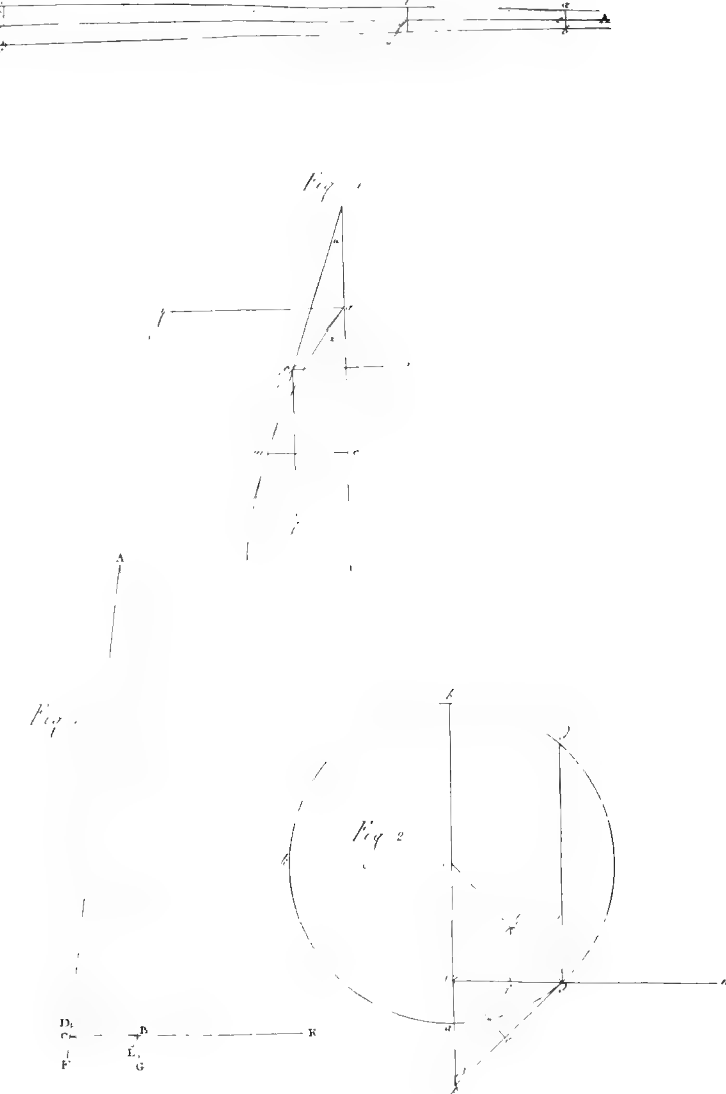



Lenz. Physik. Beobachtungen
Tab. IV.
Morgen
Mittag
337,0
337,1
337,2
337,3

Mém. de l'Acad. VI Série Sc. mathém. etc. Tom. I

Tab. V

Lenz Physik. Beobachtungen



SOLUTION D'UN PROBLÈME

DE LA

THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

PAR

M. COLLINS.

(Lu le 7 Mars 1827.)

1. *Deux fonctions*, $\mathfrak{f}\,(u)$ *et* $f\,(t)$, *étant données, on demande une fonction* $y = \varphi\,(x)$, *telle qu'en substituant* $f\,(x)$ *à la variable* x, y *devienne* $\mathfrak{f}\,(y)$, *ou bien, ce qui revient au même, qu'on ait:* $\varphi\,(f\,x) = \mathfrak{f}\,(\varphi x)$.

Tel est l'énoncé d'un problème, dont nous croyons pouvoir donner ici la solution générale.

2. En différentiant successivement l'équation $\varphi\,(fx) = \mathfrak{f}\,(\varphi\,x)$ par rapport à la variable absolue x, on parviendra à représenter l'équation différentielle d'un degré quelconque m par cette formule générale:

$$(A) \qquad S\left[\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{f''x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{f^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{a}} \frac{\varphi^{\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{m}{a}}(fx)}{\overset{1}{a}!\,\overset{2}{a}!\cdots\cdots\overset{m}{a}!}\right] =$$

$$S\left[\left(\frac{\varphi'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\left(\frac{\varphi''x}{2!}\right)^{\overset{2}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\mu}x}{m!}\right)^{\overset{m}{a}} \frac{\mathfrak{f}^{\overset{1}{a}+\overset{2}{a}+\cdots+\overset{m}{a}}(\varphi x)}{\overset{1}{a}!\;\overset{2}{a}!\;\;\;\overset{m}{a}!}\right]$$

$$\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a} + \cdots + m\overset{m}{a} = m$$

(Voyez notre mémoire *sur la transformation des fonctions* etc.)

3. En détachant de chacune des deux sommes, qui forment les deux membres de l'équation (A), le premier et le dernier terme, c'est-à-dire, en prenant successivement $\overset{1}{a}=m$, $\overset{2}{a}=\overset{3}{a}=\cdots=\overset{m}{a}=o$, et $\overset{1}{a}=\overset{2}{a}=\cdots=\overset{m-1}{a}=o$, $\overset{m}{a}=1$, on aura:

$$(B)\quad \left(\frac{f'x}{1!}\right)^m \frac{\varphi^{\mu}(fx)}{m!}+\frac{f^{\mu}x}{m!}\,\frac{\varphi'(fx)}{1!}+S\left[\left(\frac{f'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{f^{\mu-1}x}{(m-1)!}\right)^{\overset{m-1}{a}}\frac{\varphi^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}(fx)}{\overset{1}{a}!\,\cdots\cdots\,\overset{m-1}{a}!}\right]$$

$$=\left(\frac{\varphi'x}{1!}\right)^m \frac{\mathfrak{f}^{\mu}(\varphi x)}{m!}+\frac{\varphi^{\mu}x}{m!}\,\frac{\mathfrak{f}'(\varphi x)}{1!}+S\left[\left(\frac{\varphi'x}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\mu-1}x}{(m-1)!}\right)^{\overset{m-1}{a}}\frac{\mathfrak{f}^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}(\varphi x)}{\overset{1}{a}!\,\cdots\cdots\,\overset{m-1}{a}!}\right]$$

$$\left\{\begin{matrix}\overset{1}{a}+b=m-2\\ \overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+3\overset{3}{a}+\cdots+(m-1)\overset{m-1}{a}=m\end{matrix}\right\}$$

4. Maintenant, soit k une des racines de l'équation $fx=x$, on aura $fk=k$, et partant $\varphi k=\mathfrak{f}(\varphi k)$; donc φk sera une des racines de l'équation $\mathfrak{f}x=x$, et l'équation (B) se trouvera changée, pour ces valeurs déterminées, en celle-ci:

$$(C)\quad \left(\frac{f'k}{1!}\right)^m \frac{\varphi^{\mu}k}{m!}+\frac{f^{\mu}k}{m!}\,\frac{\varphi'k}{1!}+S\left[\left(\frac{f'k}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{f^{\mu-1}k}{(m-1)!}\right)^{\overset{m-1}{a}}\frac{\varphi^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}k}{\overset{1}{a}!\,\cdots\,\overset{m-1}{a}!}\right]$$

$$=\left(\frac{\varphi'k}{1!}\right)^m \frac{\mathfrak{f}^{\mu}(\varphi k)}{m!}+\frac{\varphi^{\mu}k}{m!}\,\frac{\mathfrak{f}'(\varphi k)}{1!}+S\left[\left(\frac{\varphi'k}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\mu-1}k}{(m-1)!}\right)^{\overset{m-1}{a}}\frac{\mathfrak{f}^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}(\varphi k)}{\overset{1}{a}!\,\cdots\cdots\,\overset{m-1}{a}!}\right]$$

$$\left\{\begin{matrix}\overset{1}{a}+b=m-2\\ \overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+(m-1)\overset{m-1}{a}=m\end{matrix}\right\}$$

d'où l'on tire:

$$(D)\quad \left[\left(\frac{f'k}{1!}\right)^m-\frac{\mathfrak{f}'(\varphi k)}{1!}\right]\frac{\varphi^{\mu}k}{m!}=\left(\frac{\varphi'k}{1!}\right)^m\frac{\mathfrak{f}^{\mu}(\varphi k)}{m!}-\frac{f^{\mu}k}{m!}\,\frac{\varphi'k}{1!}+$$

$$S\left[\left(\frac{\varphi'k}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\mu-1}k}{(m-1)!}\right)^{\overset{m-1}{a}}\frac{\mathfrak{f}^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}(\varphi k)}{\overset{1}{a}!\,\cdots\cdots\,\overset{m-1}{a}!}-\left(\frac{f'k}{1!}\right)^{\overset{1}{a}}\cdots\left(\frac{f^{\mu-1}k}{(m-1)!}\right)^{\overset{m-1}{a}}\frac{\varphi^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}k}{\overset{1}{a}!\,\cdots\,\overset{m-1}{a}!}\right]$$

(mêmes équations de condition).

Enfin si, pour abréger, on désigne par f', f'', etc. $\mathfrak{f}''$, $\mathfrak{f}'$, etc. φ', φ'', etc. les valeurs déterminées que prennent les fonctions dérivées $\frac{f'x}{1!}$, $\frac{f''x}{2!}$, etc. $\frac{\mathfrak{f}'(\varphi x)}{1!}$, $\frac{\mathfrak{f}''(\varphi x)}{2!}$, etc. $\frac{\varphi' x}{1!}$, $\frac{\varphi'' x}{1!}$ etc. pour le cas: $x = k$, on obtiendra:

$$(E)\quad (f'^m - \mathfrak{f}')\,\varphi^u = \varphi'^m\,\mathfrak{f}^u - f^u\,\varphi' + S\left[\frac{(\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \cdots + \overset{m-1}{a})!}{\overset{1}{a}!\;\overset{2}{a}!\;\cdots\cdots\;\overset{m-1}{a}!}\left[\varphi'^{\overset{1}{a}}\cdots\varphi^{u-1\,\overset{m-1}{a}}\,\mathfrak{f}^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}\right.\right.$$

$$\left.\left. - f'^{\overset{1}{a}}\cdots f^{u-1\,\overset{m-1}{a}}\,\varphi^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}\right]\right]$$

$$\overset{1}{a} + b = m - 2 \qquad \overset{1}{a} + 2\overset{2}{a} + \cdots + (m-1)\overset{m-1}{a} = m$$

rélation, qui servira à trouver successivement et par recurrence les quotiens differentiels φ'', φ''', etc. C'est ainsi, par ex., qu'en particularisant l'équation (E) pour les cinq quantités φ'', φ''', φ^{IV}, φ^{V}, et φ^{VI}, on formera ces relations:

$$(f'^2 - \mathfrak{f}')\,\varphi'' = \varphi'^2\,\mathfrak{f}'' - f''\,\varphi'$$

$$\begin{aligned}(f'^3 - \mathfrak{f}')\,\varphi''' &= \varphi'^3\,\mathfrak{f}''' - f'''\,\varphi' \\ &\quad + 2\varphi'\varphi''\,\mathfrak{f}'' - 2f'f''\,\varphi''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f'^4 - \mathfrak{f}')\,\varphi^{IV} &= \varphi^{IV}\,\mathfrak{f}^{IV} - f^{IV}\,\varphi' \\ &\quad + \varphi''^2\,\mathfrak{f}'' - f''^2\,\varphi'' \\ &\quad + 2\varphi'\varphi'''\,\mathfrak{f}'' - 2f'f'''\,\varphi' \\ &\quad + 3\varphi'^2\,\varphi''\,\mathfrak{f}''' - 3f'^2 f''\,\varphi'''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f'^5 - \mathfrak{f}')\,\varphi^{V} &= \varphi'^5\,\mathfrak{f}^{V} - f^{V}\,\varphi' \\ &\quad + 2\varphi''\varphi'''\,\mathfrak{f}'' - 2f''f'''\,\varphi'' \\ &\quad + 2\varphi'\varphi^{IV}\,\mathfrak{f}'' - 2f'f^{IV}\,\varphi'' \\ &\quad + 3\varphi'\varphi''^2\,\mathfrak{f}''' - 3f'f''^2\,\varphi''' \\ &\quad + 3\varphi'^2\,\varphi'''\,\mathfrak{f}''' - 3f'^2 f'''\,\varphi''' \\ &\quad + 4\varphi'^3\,\varphi''\,\mathfrak{f}^{IV} - 4f'^3 f''\,\varphi^{IV}\end{aligned}$$

*

$$
\begin{aligned}
(f'^6-\mathfrak{f}')\varphi^{VI} = {} & \varphi'^6\mathfrak{f}^{VI}-f^{VI}\varphi' \\
& +\varphi'''^2\mathfrak{f}''-f'''^2\varphi'' \\
& +2\varphi''\varphi^{IV}\mathfrak{f}''-2f''f^{IV}\varphi'' \\
& +2\varphi'\varphi^{V}\mathfrak{f}''-2f'f^{V}\varphi'' \\
& +\ \varphi''^3\mathfrak{f}'''-f''^3\varphi''' \\
& +6\varphi'\varphi''\varphi'''\mathfrak{f}'''-6f'f''f'''\varphi''' \\
& +3\varphi'^2\varphi^{IV}\mathfrak{f}'''-3f'^2f^{IV}\varphi''' \\
& +6\varphi'^2\varphi''^2\mathfrak{f}^{IV}-6f'^2f''^2\varphi^{IV} \\
& +4\varphi'^3\varphi''\mathfrak{f}^{IV}-4f'^3f''\varphi^{IV} \\
& +5\varphi'^4\varphi''\mathfrak{f}^{V}-5f'^4f''\varphi^{V}
\end{aligned}
$$

5. Puisqu'en vertu du théorème de Taylor:

$$\varphi\,(x+k) = S\left[\frac{\varphi^{\mathfrak{a}}k}{\mathfrak{a}!}\,x^{\mathfrak{a}}\right]$$

il s'agit encore de trouver $\varphi' k$, pour développer $\varphi\,(x+k)$ en série suivant les puissances de x. Or, la différentiation immédiate de l'équation primitive $\varphi\,(fx) = \mathfrak{f}\,(\varphi x)$ nous donne:

$$\varphi'\,(fx)\cdot f' x = \mathfrak{f}'\,(\varphi x)\cdot\varphi' x$$

donc, en faisant $x=k$, nous aurons:

$$\varphi' k\cdot f' k = \mathfrak{f}'\,(\varphi k)\cdot\varphi' k$$

ou bien:

$$\varphi' k\,[f' k-\mathfrak{f}'\,(\varphi k)] = 0.$$

La solution de cette équation présente évidemment deux cas:

1) $\varphi' k = 0$, ce qui rend en même tems $\varphi'' k$, $\varphi''' k$, etc. $= 0$ (n° 4), et ne fournit qu'une solution particulière de notre problème, savoir:

$$\varphi\,(x+k) = \varphi k$$

ou bien $y=\varphi x=$const.

2) $f' k = \mathfrak{f}'\,(\varphi k)$, équation qui indique que lorsque la forme des fonctions données fx et $\mathfrak{f}x$ n'est pas telle qu'elles remplissent d'elles-mêmes la condition prescrite par-là, la fonction $\varphi\,(x+k)$ n'est point susceptible d'un développement suivant les

puissances de x. Dirigeons donc nos recherches sur les transformations nécessaires pour éloigner cet obstacle qui s'oppose à la généralité désirée de notre solution.

6. Observons d'abord qu'en faisant:

$$\mathfrak{f}y = Y \text{ et } fx = X$$

nous aurons $y = \varphi x$ et $Y = \varphi X$, c'est-à-dire, que Y devra être fonction de X telle que y l'est de x, circonstance que nous énoncerons désormais en nommant Y et y des fonctions *équiformes* des variables X et x. Il est évident qu'en substituant alors à X et x deux fonctions équiformes quelconques $F(X_1)$ et $F(x_1)$ des nouvelles variables X_1 et x_1, Y et y devront encore rester équiformes par rapport à X_1 et x_1, et que, plus généralement encore, lorsqu'on fait $Y = f(Y_1)$, $y = f(y_1)$, $X = F(X_1)$, $x = F(x_1)$, Y_1 et y_1 seront nécessairement des fonctions équiformes de X_1 et x_1.

7. Ce principe général nous fournira en premier lieu une simplification du procédé exposé dans le n° 4. Car, dans les cas où les valeurs k et φk, qu'on obtient par la résolution des équations $fx = x$ et $\mathfrak{f}y = y$ (ibid.) ne sont ni o ni ∞, on pourra supposer

$$Y = Y_1 + \varphi k,\; y = y_1 + \varphi k,\; X = X_1 + k,\; x = x_1 + k,$$

et les valeurs des y_1 et x_1 correspondantes aux équations $f(x_1 + k) = x_1 + k$ et $\mathfrak{f}(y_1 + \varphi k) = y_1 + \varphi k$ seront nécessairement $x_1 = o$ et $y_1 = o$.

Si, au-contraire, on obtenait pour k, ou pour φk, ou pour toutes les deux à la fois, la valeur ∞, on n'aurait qu'à faire:

$$Y = \frac{b}{Y_1},\; y = \frac{b}{y_1},\; X = \frac{a}{X_1},\; x = \frac{a}{x_1},$$

où b et a sont des constantes arbitraires, et on rendrait par-là également les racines des équations en question $= o$.

8. Mais, ce qui est plus important encore, les transformations indiquées ci-dessus (n° 6.) nous pourront en-outre servir à satisfaire à l'équation de condition $f' = \mathfrak{f}'$ (n° 5.) dans le cas où elle n'aurait pas lieu d'elle-même, et quelquefois même à résoudre le problème immédiatement sans recourir à notre méthode générale. C'est ce que nous allons prouver par deux exemples.

Ex. 1. Soit à trouver la forme de la fonction φ, qui satisfasse à l'équation:

$$\varphi(x+a)=\varphi x.$$

Puisque nous avons ici $Y=y$ et $X=x+a$ (n° 6.), faisons $X=\frac{\log. X_1}{b}$ et $x=\frac{\log. x_1}{b}$, et nous obtiendrons: $X_1=e^{ab}x_1$, e étant la base des logarithmes néperiens. Maintenant déterminons b de manière que e^{ab} soit $=1$, et nous aurons, par la théorie des logarithmes, $b=\pm\frac{2m\pi\sqrt{-1}}{a}$, où m représente un nombre entier absolu quelconque, ou o. Cette supposition rendant $X_1=x_1$, il est clair que y pourra être une fonction quelconque, F, de x_1; et puisque de l'équation $x=\frac{\log. x_1}{b}$ on tire: $x_1=e^{bx}=e^{\pm\frac{2m\pi x}{a}\sqrt{-1}}=\cos.\frac{2m\pi x}{a}\pm\sqrt{-1}\cdot\sin.\frac{2m\pi x}{a}$, on trouvera enfin:

$$y=F\left(\cos.\frac{2m\pi x}{a}\pm\sqrt{-1}\cdot\sin.\frac{2m\pi x}{a}\right).\ ^{*)}$$

Ex. 2. Si les fonctions fx et $\mathfrak{f}x$ sont ou données ou transformées (par le n° 7) de sorte qu'on ait $fo=o$ et $\mathfrak{f}o=o$, et qu'en outre il est possible de les développer toutes deux suivant les puissances (à exposans entiers positifs) de leur variable indépendante, on pourra supposer $Y=\mathfrak{f}y=y\,\mathfrak{F}y$ et $X=fx=x\,Fx$. Alors, faisant $Y=Y_1{}^m$ et partant $y=y_1{}^m$, on aura $Y_1{}^m=y_1{}^m\,\mathfrak{F}(y_1{}^m)$, ou bien $Y_1=y_1\sqrt[m]{[\mathfrak{F}(y_1{}^m)]}$. Ceci fournira: $Y'_1=\sqrt[m]{[\mathfrak{F}(y_1{}^m)]}+y_1\cdot\frac{d.\sqrt[m]{[\mathfrak{F}(y_1{}^m)]}}{dy_1}$, de même que $X'=Fx+xF'x$; donc, pour $x=o$ et y_1 ou $y=o$, $Y'_1=\sqrt[m]{\mathfrak{F}o}$ et $X'=Fo$. Par conséquent, afin de remplir la condition prescrite par le n° 5, il faudra former l'équation $\sqrt[m]{\mathfrak{F}o}=Fo$, d'où l'on déduira: $m=\frac{\log.\mathfrak{F}o}{\log.Fo}$, le signe *log.* étant pris dans toutes ses significations possibles.

9. Observons que, lorsqu'on aura, ou immédiatement, ou par des transformations semblables à celles que nous venons d'exposer, $f'=\mathfrak{f}'$, la formule (E) du n° 4 pourra être remplacée par celle-ci:

---

*) Comparez: *Nicolai* **Fuss**, *Speculationes analytico-geometricae.* Problema I. p. 221 du IV Tome des Mém. de l'Acad. Imp. des sciences.

$$(F)\quad f'(f'^{m-1})\varphi^{\mu}=\varphi'^{m}f^{\mu}-f^{\mu}\varphi'+S\left[\frac{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a})!}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{m-1}{a}!}\left[\varphi'^{\overset{1}{a}}\cdots\varphi^{\mu-1}{}^{\overset{m-1}{a}}f^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-f'^{\overset{1}{a}}\cdots f^{\mu-1}{}^{\overset{m-1}{a}}\varphi^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-1}{a}}\right]\right]$$

$$\overset{1}{a}+b=m-2\qquad \overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+(m-1)\overset{m-1}{a}=m$$

Mais, s'il arrive dans quelques cas particuliers, qu'on trouve $f'^{m-1}=1$, cette dernière formule ne pouvant plus servir à la détermination de la dérivée φ^{μ}, il faudra détacher de l'intégrale combinatoire S encore les deux termes qui contiennent $\varphi^{\mu-1}$; ce qui conduit à cette équation:

$$(G)\quad o=\varphi'^{m}f^{\mu}-f^{\mu}\varphi'+(m-1)(\varphi'^{m-2}\varphi''f^{\mu-1}-f'^{m-2}f''\varphi^{\mu-1})$$
$$+2(\varphi'\varphi^{\mu-1}f''-f'f^{\mu-1}\varphi'')+$$
$$S\left[\frac{(\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-2}{a})!}{\overset{1}{a}!\cdots\cdots\overset{m-2}{a}!}\left[\varphi'^{\overset{1}{a}}\cdots\varphi^{\mu-2}{}^{\overset{m-2}{a}}f^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-2}{a}}-f'^{\overset{1}{a}}\cdots f^{\mu-2}{}^{\overset{m-2}{a}}\varphi^{\overset{1}{a}+\cdots+\overset{m-2}{a}}\right]\right]$$

$$\overset{1}{a}+b=m-3\qquad \overset{1}{a}+2\overset{2}{a}+\cdots+(m-2)\overset{m-2}{a}=m$$

ou bien à:

$$(H)\qquad [(m-1)f'^{m-2}f''-2\varphi'f'')\varphi^{\mu-1}=\varphi'^{m}f^{\mu}-f^{\mu}\varphi'+$$
$$(m-1)\varphi'^{m-2}\varphi''f^{\mu-1}-2f'f^{\mu-1}\varphi''+$$

S [même terme général et mêmes équations de condition que dans ce qui précède.]

Il est clair, qu'il faudrait suivre un pareil procédé s'il arrivait qu'il fut:

$$(m-1)f'^{m-2}f''-2\varphi'f''=o,\ \text{et ainsi de suite.}$$

10. Après avoir exposé les principes et la marche d'une méthode générale de solution de notre problème, et montré les modifications qu'elle doit subir dans certains cas particuliers, il ne nous paraît point superflu d'indiquer encore, au-moins par quelques traits, une autre méthode tout aussi générale, mais qui, très-différente dans son principe, est fondée sur une théorie mentionnée dans le mémoire précité, savoir, sur celle des „puissances fonctionales".

Soit, comme ci-dessus (n° 6.), $Y = \mathfrak{f}y$ et $X = fx$, et supposons que, pour $x = \alpha$, on ait $y = \beta$: il faudra que, pour $x = f\alpha$, y soit $= \mathfrak{f}\beta$, et puis

$$\text{pour } x = f(f\alpha) = f^2\alpha \cdots y = \mathfrak{f}(\mathfrak{f}\beta) = \mathfrak{f}^2\beta$$
$$\text{,, } x = f(f^2\alpha) = f^3\alpha \cdots y = \mathfrak{f}(\mathfrak{f}^2\beta) = \mathfrak{f}^3\beta$$
$$\text{,, } x = f(f^3\alpha) = f^4\alpha \cdots y = \mathfrak{f}(\mathfrak{f}^3\beta) = \mathfrak{f}^4\beta$$

et, en général, pour $x = f^n\alpha$, $y = \mathfrak{f}^n\beta$.

Donc, s'il y a un moyen d'éliminer la quantité indéterminée n, on obtiendra une relation entre x et y, qui résoudra le problème.

Par ex., qu'on demande la forme que doit avoir la fonction φ pour rendre identique l'équation

$$\varphi(ax + b) = g \cdot \varphi x + h.$$

Puisqu'on a ici:
$$\mathfrak{f}y = gy + h$$
$$fx = ax + b$$

on en déduira:
$$\mathfrak{f}^2y = \mathfrak{f}(\mathfrak{f}y) = g^2y + h(g + 1)$$
$$\mathfrak{f}^3y = \mathfrak{f}(\mathfrak{f}^2y) = g^3y + h(g^2 + g + 1) =$$
$$g^3y + \frac{h(g^3 - 1)}{g - 1}$$

et généralement:
$$\mathfrak{f}^ny = g^ny + \frac{h(g^n - 1)}{g - 1}$$

donc aussi:
$$f^nx = a^nx + \frac{b(a^n - 1)}{a - 1}.$$

On en formera les deux équations:

$$y = \left(\beta + \frac{h}{g - 1}\right) g^n - \frac{h}{g - 1}$$
$$x = \left(\alpha + \frac{b}{a - 1}\right) a^n - \frac{b}{a - 1}$$

d'où l'on tirera, en éliminant n:

$$\log. \frac{y + \frac{h}{g - 1}}{\beta + \frac{h}{g - 1}} : \log. g = \log. \frac{x + \frac{b}{a - 1}}{\alpha + \frac{b}{a - 1}} : \log. a$$

et enfin, en réduisant:

$$y = \frac{(g - 1)\beta + h}{g - 1} \left(\frac{(a - 1)\,x + b}{(a - 1)\,\alpha + b}\right)^{\frac{\log. g}{\log. a}} - \frac{h}{g - 1}.$$

GRAMINUM GENERA

QUAEDAM

SPECIESQUE COMPLURES DEFINITIONIBUS NOVIS

ILLUSTRARE PERGIT

C. B. TRINIUS.

(Conv. exhib. die 28 Aprilis 1830.)

Nulla fortasse datur graminum turba, quae, si differentias ejus, nulla naturae vi illata, investigare coneris, majores tibi offerat difficultates, quam ea, quae *Multiflora perfecta* complectitur, cujusque genera aliquot, denuo examinata, conventui hodie propono. In extremo hujus vegetationis fastigio, quod *Eragrostis* (interdum septuagintiflora) tenet, summa, quae potest, materiae plasticae copia in flores reclusa prostat; viam autem (nam scalam minus apte dixeris), qua per singula, pauciores flores evolventia, hujus tribus plasmata natura ad perfectionis illius culmen tendit, notatam utique conspicimus vestigiis, repressae hinc, prorumpentis illinc supellectilis illius floralis, tantum non per gradus aut stationes certas ita dispositae, ut Botanico, qui tot formarum lusus ad systema revocare velit, nil opus sit, nisi stationes illas suo quamvis nomine generico insignire. At vero dolendum, hujusmodi transitus, oculo quidem per peculiarem quamdam inflorescentiae imaginem vel ultro sese prodentes, tamen non nisi rarius manifestari notis, quas natura manibus palpare sineret; quin fieri potius videamus, ut diversissima gramina, characteris ejusdem universalis persona quasi non captiose velata, ovium instar Polyphemi, vel gregatim irrepant in systematicas magistri crates, ita, ut vel minus doctus, coactam in angustissimo spatio turbam ingenue perlustrans, immixta evidentissime barbara facile discernat, quae numerantem custodis manum fefellerant. Cujusmodi gregem

sistit ex. gr. illud a reformatore quodam recentiori stabilitum genus *Cynodontis*, in quo, quantumvis trinervi sese vestiverint pelle communi, cum reliquo pecore non confundendi latent haud pauci Ulysses.

Scilicet eadem res et proclivius expediri, et phytosophiae, ut sibi persuadent, aptius agi videtur aliis, qui agmen plantarum, quantumcumque singulae inter se et habitu et florum discriminibus discrepent, sub communi quodam signo coercent; aliis rursus commodius absolvi putatur, qui familias, sectiones, ordines et genera multiplicare malunt, quam curare, ut vinculi, cohortem aliquam multiplici nodo connectentis, vestigia impigre persequuti, ejus extrema, ubi fines contingunt, vel si cum iisdem confluant, in manibus fortiter retineant. Atqui hoc ipsum est, quod intelligentem naturae scrutatorem decet. Quis vero inter nos est, qui typorum illorum hieroglyphicorum, quibus opera sua, vel id, in qno de simplicissima, ut esse videtur, graminum familia agitur, natura consignavit, clavi etiamnum sese potitum esse gloriari possit? Etenim nihil habemus nisi theoriam, quae e comparatis, non aliquot, vel sexcentis, sed omnibus ac singulis plasmatis graminei ectypis, non hausta hucusque, sed haurienda, tanto operi facem praeferre, non tam valet, quam fortasse tandem aliquando valitura est. Interim acceptissimum habeamus quodvis hujus generis tentamen, si modo indefessae, qua par est, diligentiae, minime vero opinionis praejudicatae signa prae se ferat. Quare novam graminum theoriam, in qua concinnanda KUNTHIUM versari compertum est, virum doctissimum ditissimisque ad tantum opus scribendum subsidiis instructum, intentissimo animo expectamus.

Inter graminum organa gravioris notae fructum, in quo, e nobilissimis conjunctim agentibus organis floralibus enato, velut in speculo, quaecumque coeuntibus viribus vegetabilibus summis prognata sunt, perenni imagine repraesentantur, et qui summum, ut ita dicam, plantae studium clare manifestat, hoc inquam organon minus hucusque ab agrostographis consideratum fuisse dolendum est. Ut omittam positionem faciei seminis *) embryoniferae, glumarum maxime interdum dubiam ad

*) Caryopsidis placito nomine non utor, cum pericarpium, saepissime solubile, hujusce fructus modificationis terminum saltem non pro graminibus in genere admittat.

valvulas relationem optime illustrantem, notas organon illud offerre certissimum est, quae, minus manifeste in flore ipso perspiciendae, naturam peculiare quid molitam esse, non nisi in semine tandem ipso palam faciant. Qua de re plura disserere hic eo minus locus est, cum ea, quae de seminibus graminum ante aliquod tempus fusius in hoc conventu tractaverim, magis magisque perficere conatum, brevi me maturiora in lucem editurum esse sperare liceat. Monuisse tantum sufficiat, e reliquis, quae a semine peti possint, notis, longe constantissimam mihi visam esse eam, quae a scutelli s. hypoblasti longitudine suppeditatur, nec facile hunc characterem de consociandis his, disjungendis illis turbae cujusdam graminibus dubia relicturum esse.

Hujus itaque organi ope integram graminum familiam denuo perlustrandam in me suscepi. At vel e tanti laboris ipsis, quae in hisce fasciculis academicis deposui, primitiis utique perspicietur, me non eo pervenisse, ut genera evicerim tam accurate circumscripta, ut ne transitus illius in confines formas exempla quamplura restiterint. Quod quidem, quantumcumque sit, incommodum ita facile explicabitur, quod naturam ipsam genera circumscripta creasse non sit credendum. Quos autem transitus, ob ipsam eorum utrinque confinem naturam characterum limitibus non sepiendos, qui nihilominus definitione nomineque generico sejungere conetur, is dissecaturus nodum, non explicaturus, numquam vero naturae ipsius vestigia persequi videbitur, quae utique quam proxime premere, id est, quo systematico auctori tendendum esse, mecum quisque consentiet.

Cum singula graminum genera, qualia mihi visa sint, non nisi pedetentim exponere possim, characteres generici, singulae, quam propono, turbae adjecti, alii esse nequeunt, ac qui ad ea sola, quae hic exponuntur, nec ad reliqua simul discriminanda valeant. Quare, ut et reliquorum bene distinguendorum rationes instituerentur, characteres, quos vocant naturales, ampliores cuivis generi adjunctos esse volui, ab aliis, quibus plures vel novas ejusdem generis species observare contigerit, deinceps emendandos aut corrigendos.

Cum in fasciculo priori de *Airis* tractabam, ob seminum quorumdam defectum muticas illius generis species omisi. Has nunc suo quamvis loco inserendas adjicio, charactere generis ita correcto: *Perianthio . . . . armata vel mutica. Semen oblongum vel oblongo-cylindraceum* etc.

Ante *Airam pulchellam* itaque inseratur:

Aira involucrata Cav. Glumis perianthia subintegra mutica subaequantibus; Foliis angustissimis; (Radiorum inferiorum verticillis sterilibus).

Airopsis involucrata Pal. R. et S. II. p. 578.

Periballia poaeoides Tr. Fund. Agr. (ubi semen male descriptum).

V. spp. Lus. Hisp.

Post *Airam canescentem* ponantur:

Aira agrostidea Lois. Glumis perianthiis glabris muticis duplo longioribus; Foliis planis; (Panicula patula).

Airopsis agrostidea R. et S. II. p. 579.

Airopsis Candollei Desv.

Poa agrostidea DeC.!

V. spp. Gall. Sic.

Aira globosa Thore. Glumis perianthiis villosis muticis tertiam partem longioribus; Foliis setaceo-involutis; (Panicula thyrsode).

Airopsis globosa Desv. R. et S. II. p. 578.

Milium tenellum Cav.

Paspalum globosum Rasp.

V. spp. Gall. austr.

In subdivisione *b*, *Airae caryophylleae* antecedat:

Aira Tenorei Guss.! Panicula divaricatissima; Glumis flosculis muticis paulo vel quartam partem longioribus; Pilis subobsoletis.

Airopsis pulchella Ten.!

V. spp. Sic. Neap.

GENERA.

1. *Uniola.* *Spiculae* pluriflorae. *Glumae* 3 — 5-(7-) nerves. *Flosculi* gradarii (infimi interdum steriles): *valv. inf.* 7 — 11-nervis: nervis parallelis; *superior* parum brevior, plicata. *Semen* compressum, liberum.

2. *Briza.* *Spiculae* pluriflorae. *Glumae* 5 — 7-nerves. *Flosculi* gradarii: *valv. inf.* (3-) 7 — 15-nervis: nervis lateralibus fasciculatis; *superior* (brevior et) angustior, complanata. *Semen* depressum, adnatum, (pericarpio subsolubili).

3. *Glyceria.* *Spiculae* pluriflorae. *Glumae* 1 (— 3) nerves. *Flosculi* gradarii: *valv. inf.* 7-nervis: nervis parallelis; *superior* aequilonga et subaequilata, demum subcomplanata. *Semen* pl. min. depressum, liberum.

4. *Melica.* *Spiculae* pluriflorae. *Flosculi* subfastigiati: superiores multo minores, steriles, alter altero inclusi. *Valv. inf.* 7 — pluri-nervis; *superior* plicata. *Semen* depressiusculum, liberum.

5. *Poa.* *Spiculae* 2 — pluriflorae. *Valv. inf.* 5-nervis, superiore angustiori substantia pinguior. *Seminis* scutellum ipso ¾ brevius.

6. *Colpodium.* *Spiculae* 1 — 2 — 4-florae. *Valv. inf.* 3 — 5-nervis; *superior* aequimagna, substantiae ejusdem (hyalinae). *Seminis* scutellum ipso ¾ et ultra brevius.

7. *Eragrostis.* *Spiculae* 2 — pluri — multiflorae. *Valv. inf.* 3-nervis, superior angustior. *Seminis* scutellum ipso dimidio brevius.

---

1. UNIOLA *L.*

Gramina in sylvis et littoribus maritimis crescentia Americae septentrionalis (non ultra 42° latit.), Tropicorum et Cap. b. sp., pede minora — 4-pedalia.

Folia plana in sylvaticis, involuta in maritimis speciebus.

Ligula aut ciliaris, aut membranacea brevis et fimbriato-lacera.

Inflorescentia Juba, rarius Panicula vel Racemus simplex: radiis solitariis.

Spiculae 3—20-florae, pro flosculorum numero nunc ovatae, nunc lineari-ellipticae, compressae vel teretiusculae, totae persistentes.

Glumae plerumque coriaceo-chartaceae, non multum inaequales vel subaequales, flosculis suis pl. min. breviores, compressae, 3—5-, superior interdum 7-nervis.

Flosculi pl. min. distiche imbricati, lanceolati, vel ovato-lanceolati, vel ovati: inferiores 1—3 in pluribus steriles, glumiformes, univalves, rarius superioribus dissimiles et multo breviores. *Valvula inferior* coriaceo-membranacea, pl. min. compressa (saltem apicem versus carinata), mutica vel cuspidata, 7—11-nervis; *superior* plicata.

Callus obsoletus, nudus.

Rhachis solida, nuda.

Lodiculae squamae 2, subtruncatae, nudae aut villis paucioribus pluribusve comatae.

Stamina 3. *Styli* 2. *Stigmata* plumosa.

Semen lineari-ellipticum, compressiusculum, exsulcum, eberbe, liberum. *Scutellum* ipso ⅔ brevius.

Uniola lappacea. Jubae laxiusculae radiis a basi floriferis; Spiculis lanceolatis, compressis, 3-floris: flosculis superioribus ad nervos extimos glandulosis et piliferis, inferiori sterili nullo; Perianthii valv. inf. lanceolata, 7-nervi (cuspidata); Foliis lato-lanceolatis.

Centotheca lappacea Desv. R. et S. II. p. 531.

Cenchrus lappaceus L. sp. pl. ed. 2. (planta adultior).

Poa latifolia Forst. R. et S. II. p. 556.

Poa malabarica Burm. (an *Roth?*)

Holcus latifolius L. sp. pl. ed. 2. (planta junior).

Torresia latifolia R. et S. II. p. 515.

Melica lappacea Rasp.

V. spp. ex inss. Marian. et Societ.

Obs. Rothii descriptio (*Schult. Mant.* 2. *p.* 308.) Melicae potius speciem quam nostram plantam depingit.

Uniola latifolia Mchx. Paniculae erectae laxiusculae radiis inferne nudis; Spiculis ovatis, compressis, sub-9-floris: flosculis ad carinas pilosulis: infimo sterili; Perianthii valv. inf. lineari-lanceolata, 9-nervi; Foliis lanceolatis.

Uniola latifolia. R. et S. II. p. 594. Mant. 2. p. 331.

V. cc.

Uniola paniculata L. sp. pl. ed. 1. Jubae (magnae) nutantis radiis inferne non longe nudis; Spiculis ovatis, compressis, sub-16-floris: flosculis mucronato-cuspidatis: inferioribus aliquot sterilibus; Perianthii valv. inf. ovato-lanceolata, 11-nervi; Foliis involutis.

Uniola paniculata. R. et S. II. p. 594. Mant. 2. p. 331.

Trisiola Rafin.

V. spp. Amer. bor.

Uniola thalassica. Jubae thyrsodis (ovatae, densae, brevis) radiis a basi partitis; Spiculis elliptico-linearibus, compressis, 12—20-floris: flosculis submucronatis: omnibus fertilibus; Perianthii valv. inf. lanceolato-ovata, 7-nervi; Foliis angustis, planis, distichis.

Megastachya thalassica. R. et S. II. p. 590.

Poa thalassica Kunth.

V. sp. Amer. bor.

Uniola spicata Willd. Paniculae subthyrsiformis, subsecundae (angustatae, brevis) radiis fere a basi floriferis; Spiculis ovato-lanceolatis (ovatisve), teretiusculis, 3—9-floris: flosculis omnibus fertilibus; Perianthii valv. inf. ovata (l. lanceolato-ovata), 7—9-nervi; Foliis involutis, subdistichis.

Uniola spicata. R. et S. II. p. 595. Mant. 2. p. 331. Nees ab Es. Agr. Bras. p. 488.

Uniola distichophylla R. et S. II. p. 596.

Festuca distichophylla Mchx.

Distichlis maritima et *nodosa Rafin.*

Brizopyrum americanum Link ht. Berol. 1. p. 160.

V. spp. Am. bor. Chil. Bras.

Obs. Semen non satis maturum vidi, sed dorso sulcatum mihi videtur.

Uniola capensis. Racemi simplicis spiculis alternis, secundis, sessilibus, rotundato-ovatis, compressiusculis, 5 — 9-floris: flosculis inferne pilosulis: omnibus fertilibus; Perianthii valv. inf. ovata (superne carinata) 7-nervi; Foliis compresso-involutis, angustissimis.

Cynosurus Uniolae Thbg. R. et S. II. p. 518.

Triticum capense Spr. S. V. 1. p. 324.

Poa Uniolae Schrad. Schult. Mant. 2. p. 312.

V. spp. Cap. b. sp.

Valvulae superioris margines reversi, inferioris pili brevissimi, clavati, candidi. Squamae lodiculae lato-cuneatae, 7-nerves, apice longo-villosae.

Uniola gracilis Mchx. Paniculae (subfiliformi-) angustissimae (longae) radiis racemosis, fere a basi divisis; Spiculis turbinato-lanceolatis, teretiusculis, sub-6-floris: flosculis infimis sterilibus, abbreviatis; Perianthii valv. inf. ovato-lanceolata, 7 — 9-nervi; Foliis planiusculis.

Uniola gracilis. R. et S. II. p. 595.

V. spp. Am. bor.

---

2. BRIZA *L.*

Gramina arvensia et pratensia regionum tam tropicarum quam temperatarum, in zonas gelidas non descendentia, erecta, 1 — 2-pedalia, vel paulo altiora.

Folia angusta, glabra, plana vel involuta.

Ligula membranacea.

Inflorescentia Panicula, aperta vel contracta: radiis solitariis binisve.

Spiculae 5 — 12-florae, conicae vel cordatae, teretiusculae.

Glumae pl. min. aequales, 5 — 7-nerves (complanato-) concavae, membranaceo-marginatae, flosculis suis breviores vel parum longiores, persistentes.

Flosculi arcte imbricati, rotundati vel ovales (decidui); *Valv. inf.* convexa, (interdum latissime) membranaceo marginata, mutica vel apice brevius longiusve rostrata, 7 — 15- (vel suppressione 3-) nervis: nervis pl. min. obsoletis: lateralibus basi fasciculatis, abbreviatis; *superior* ovalis l. rotundata, integra, demum subcoriacea, plana.

Callus obsoletus, nudus l. (rarissime, in *Br. subaristata*) barbatus.

Rhachis per articulos brevissimos solubilis, nuda.

Lodiculae squamae 2, ovatae, nudae, integrae vel emarginatae.

Stamina 3. *Styli* 2, breves. Stigmata plumosa.

Semen pl. min. obcordatum et depressum, eberbe, exsulcum, adnatum *): pericarpio saepissime (saltem apice) soluto. *Scutellum* ipso multo brevius.

a) Perianthii mutici margine membranaceo aequo, *Briza*.

***Briza spicata* Sibth.** Paniculae lineari-angustae radiis fere a basi floriferis; Spiculis ovatis (acutis), 5 — 7-floris; Glumis flosculos infimos aequantibus; Perianthiorum margine membranaceo angusto.

Briza spicata. R. et S. II. p. 521.

Briza humilis M. a Bieb.! R. et S. II. p. 521.

V. spp. Taur. Smyrn.

***Briza media* L. sp. pl. ed. 1.** Paniculae patentis erectae radiis superne floriferis; Spiculis cordato-orbiculatis, 5 — 9-floris; Glumis flosculis infimis brevioribus vel eosdem aequantibus; Perianthiorum margine membranaceo latiusculo.

α) Glumis flosculis infimis brevioribus:

Briza media L. l. l. R. et S. II. p. 528.

V. spp. Helv. Gall. Germ. Petrop.

---

*) In Brizis *erecta* et *subaristata* (non in *triloba*) raphen s. carinam observo in facie seminis longitudinalem, quae itaque pro Brizae semine non essentialis videtur.

β) Glumis flosculos infimos aequantibus:

Briza virens L. sp. pl. ed. 2. R. et S. II. p. 520.

V. spp. Cauc.

Obs. Quotcumque e variis regionibus australioribus specimina *Brizae* s. d. *virentis* accepi, cuncta, non exceptis Brasilianis, ad *Brizam minorem* pertinent. Genuinam Linnaei plantam *virentis*, quam ill. auctor *mediae* simillimam dicit et bene describit, e Caucaso habeo. Panicula folio supremo involucrata, pallide virens. Glumae flosculos infimos aequant. Ligula magis producta, late decurrens. — Sed et *Brizae mediae* genuinae specimina asservo glumis flosculos infimos aequantibus, spiculis variegatis, ligula brevi, aut, in foliis angustioribus, non decurrente, aut, in foliis latioribus, manifeste decurrente. Idem autem valet de foliis *Brizae minoris.*

Briza minor *L. sp. pl. ed.* 1. Paniculae patentis erectae radiis superne floriferis; Spiculis subtriangulari-orbiculatis, 5 — 8-floris; Glumis flosculos infimos excedentibus; Perianthiorum margine membranaceo lato.

Briza minor. R. et S. II. p. 519.

Briza virens Nees ab Es. Agr. Bras. p. 479.

V. spp. Gall. Sard. Aeg. Pers. bor. Cap. b. sp. Ins. Maur. Bras.

Briza maxima *L. sp. pl. ed.* 1. Paniculae patulae apice nutantis radiis superne floriferis; Spiculis cordato-ovatis, 7 — 17-floris; Glumis flosculis infimis brevioribus; Perianthiorum, (superiorum pubescentium), margine membranaceo latissimo.

Briza maxima. R. et S. II. p. 521.

V. spp. Gall. Hisp. Dalm. Byz. Cors. Cap. b. sp.

b) Perianthii aciculati vel setiferi margine membranaceo lobato-repando, *Calotheca.*

Briza LaMarckiana *Nees ab Es. Agr. Bras. p.* 481. Paniculae laxae (coloratae) radiis solitariis, a basi compositis, multifloris; Spiculis ovatis, 6-floris; Glumis flosculis infimis brevioribus; Perianthii valvula inferiore orbiculata, (brevi-) rostrata; Ligula elongata.

Bromus brizoides LaM. R. et S. II. p. 632, (sub *Calotheca brizoide*, quae non hujus loci).

Calotheca dilatata Link ht. Berol. 1. p. 157.

V. spp. Brasil.

Briza triloba Nees ab Es. Agr. Bras. p. 482. Paniculae contractae (virescentis) radiis solitariis, a basi compositis, multifloris; Spiculis ovatis, 6— 12-floris; Glumis flosculis infimis brevioribus; Perianthii valvula inferiori orbiculata, juxta apicem brevissime rostratum utrinque emarginata; Ligula brevi.

Calotheca poaeformis Spr.! S. V. 1. p. 348.

V. spp. Brasil.

Nimis affinis *LaMarckianae*.

Briza erecta LaM. Paniculae angustatissimae radiis subternis, inferne pl. min. simplicibus, paucifloris; Spiculis turbinato-rotundatis, 8— 12-floris; Glumis flosculis infimis brevioribus; Perianthii valv. inf. rhombeo-dilatata, rostrato-aciculata; Ligula brevi.

Briza erecta. Nees ab Es. Agr. Bras. p. 480.

Chascolytrum erectum Desv. R. et S. II. p. 633.

Calotheca brizoides Pal. Agr. Tab. XVII. f. 6.

V. spp. Chil.

Briza barbata. Paniculae erectae, apertae radiis solitariis, superne 1 — 2-floris; Spiculis orbiculato-obovatis, sub-10-floris; Glumis flosculo infimo paulo brevioribus; Perianthii valv. inf. latissime cuneata, inferne barbata, infra apicem setigera; Ligula brevissima.

Calotheca barbata N. ab Es.! Agr. Br. p. 477.

V. sp. Bras.

Nervi in perianthii valvula inferiore non nisi tres conspicui, reliquis, ut videtur, pilis ad basin fasciculatim erumpentibus compensatis.

Briza subaristata LaM. Paniculae (parvae) contractae radiis subbinis, simplicissimis, subunifloris; Spiculis elliptico-ovatis, sub 11-floris; Glumis flosculum

infimum subaequantibus; Perianthii valv. inf. quadrata, rostrato-setigera; Ligula productiuscula.

Chascolytrum subaristatum Desv. R. et S. II. p. 633.

Calotheca elegans Pal. Agr. Tab. XVII. f. 7.

V. sp. Montevid.

Unicum specimen vidi, spithamaeum, culmo filiformi, foliis radicalibus brevibus, setaceis, panicula erecta, circiter pollicari, viridula, spiculis 5-linealibus.

---

3. Glyceria (*Br.*)

Gramina (plerumque?) palustria zonae temperatae, erecta, 2— 5-pedalia.

Folia plana vel compressiuscula, glabra, longa.

Ligula membranacea.

Inflorescentia Panicula: *radiis* 2 — pluribus.

Spiculae 3— 11-florae, oblongae vel lineares, teretiusculae.

Glumae pl. min. inaequales, membranaceae, 1 (vel superior obsolete sub- 3-) nerves, flosculis suis breviores, persistentes.

Flosculi arctius laxiusve imbricati, oblongi l. (rarius) oblongo-lineares. *Valv. inf.* convexa, firmula, apice plerumque membranaceo-marginata, mutica, 7-nervis (interdum nervo uno alterove accessorio, abbreviato): nervis parallelis, longe plerumque distinctissimis. *Valv. sup.* oblonga vel oblongo-linearis, integra l. (rarius) bifida, demum pl. min. complanata.

Callus brevissimus, nudus.

Rhachis nuda, demum per articulos solubilis (solidior in speciebus Europaeis quam in Americanis, *Brizae* similioribus).

Lodiculae squamae 2, brevissimae, truncatae, interdum connatae.

Stamina 3. *Styli* 2, breves. *Stigmata* plumoso-ramosa.

Semen oblongum, pl. min. depressum, eberbe, exsulcum, liberum. *Scutellum* ipso multo brevius.

Glyceria fluitans Br. Paniculae elongatae demum patentis radiis 2-3 (subsecundis) plerumque a basi compositis; Spiculis linearibus, 7 — 11-floris; Flosculis bilinealibus longioribusque, obtusiusculis; Culmo compresso; Ligula longa, exserta.

Glyceria fluitans. R. et S. II. p. 695.

Poa fluitans Scop.

Festuca fluitans L. sp. pl. ed. 1.

Desvauxia fluitans Pal. Mém.

V. spp. Germ. Ross. Cauc. Am. bor. Nov. Holl.

Glyceria spectabilis Mert. et Koch Fl. Germ. 1. *p.* 586. Paniculae pl. min. patentis radiis 2 — plurimis, inferne pl. min. nudis; Spiculis oblongo-linearibus, 5 — 9-floris; Flosculis sesquilinealibus, obtusiusculis; Culmo teretiusculo; Ligula breviuscula, truncata.

Poa aquatica L. sp. pl. ed. 1. R. et S. II. p. 559.

Poa altissima Mönch.

Transit gradatim a statu rigidiori et stricto partiumque omnium firmitate ad debiliorem, interdum adeo flaccidum, ut, comparatis formis serici utrinque extremis, diversissimas plantas coram habere crederes. Invenitur enim

α) Culmo paniculaque strictis firmisque (in fossis crescens); v. spp. Germ. Gall. Polon. Petrop.

β) minus stricta, partibus omnibus paulo augustioribus; v. spp. Altaj. — vivipara, v. sp. Tobolsk.

γ) culmo debiliori, panicula laxiori, foliis angustioribus; v. spp. Sib. Kamtsch. Canad.

δ) saepe 4 — 5-pedalis, panicula flaccida (in sylvis uliginosis crescens), quae est: *Poa arundinacea M. a Bieb.!* v. spp. Petrop. Cauc. Sitk.

Glyceria nervata. Paniculae patulae radiis binis (subternis), inferne nudis; Spiculis oblongis, 3 — 7-floris; Flosculis linea brevioribus, pl. min. obtusis; Culmo compresso; Ligula mediocri, obtusa.

Poa nervata Willd. R. et S. II. p. 550. Mant. 2. p. 305.

Poa striata Mchx.

Poa lineata Pers.

V. spp. Am. bor.

Obs. Folia in gramine Marylandico apice quasi cornuta inveni, ac si lamina iterum epiphysin (laminulam) producere moliretur.

Glyceria obtusa. Paniculae contractae radiis subquinis, inferne nudis; Spiculis oblongis, sub 6-floris; Flosculis sesquilinealibus, pl. min. obtusis: Culmo tereti; Ligula brevissima, truncata.

Poa obtusa Mühlenb. Schult. Mant. 2. p. 326. sub *Megastachya.*

V. spp. Am. bor.

Glyceria canadensis. Paniculae patulae l. patentis radiis 3, 4. inferne nudis; Spiculis oblongis, sub- 6-floris; Flosculis sesquilinealibus, acutis; Culmo compressiusculo; Ligula mediocri, obtusa.

Megastachya canadensis R. et S. II. p. 593. Mant. 2. p. 329.

Briza canadensis Mchx.

V. spp. Am. bor.

---

4. Melica *L.*

Gramina tam tropicarum quam temperatarum regionum, rarius ad gelidas (*M. nutans*) descendentia, tam aprica quam umbrosa, longe plerumque erecta. 1 — 3 — 5-pedalia.

Folia linearia, plana vel involuta, glabra: vaginis rarissime pilosis (*M. ciliata*).

Ligula membranacea.

Inflorescentia Panicula, modo expansa, modo racemi-aut thyrsi-formis: *radiis* non ultra 3, pl. min. racemiformibus. (*Pedicelli* fere semper sub spicula crispato-curvati et barbati, atque tum a spicula solubiles; rarissime recti et imberbes (*M. uniflora*).

Spiculae ad summum 5-florae, tantum in pedicello recto et nudo persistentes, adultae pl. min. ovales, teretiusculae.

Glumae membranaceae, demum complanatae, 5 — 9-nerves, flosculos aequantes vel iisdem non nimis breviores: inferior interdum multo latior.

Flosculi glumis plerumque substantia firmiores: inferiores 1 — 3 multo majores, perfecti, superiores aliquot multo minores, steriles, invicem involventes. *Valv. inf.* complanato-convexa, 7 — pluri-nervis: nervis parallelis, distinctiusculis, mutica: si glumis firmior, tum apice membranaceo-marginata l. quasi appendiculata; rarius una cum glumis chartaceo-membranacea, et tum inappendiculata. *Valv. sup.* brevior angustior.

Callus minimus, nudus.

Rhachis solida, nuda.

Lodiculae squama 1, dilatata.

Stamina 3. *Styli* 2. *Stigmata* plumoso-ramosa.

Semen fusiformi-oblongum, depressiusculum, subsulcatum, eberbe, liberum. *Scutellum* ipso multo brevius.

a) Perianthiis barbatis.

Melica ciliata L. sp. pl. ed. 1. Panicula thyrsiformi; Pedicellis barbulatis; Glumis paulo inaequalibus, acutis, superiori parum angustiori flores paulo superante; Flosculo unico perfecto, simpliciter acuto, margine (totove dorso) dense piloso.

Melica ciliata. R. et S. II. p. 522.

Beckeria Bernh.

V. spp. Hisp. Helv. Germ. Ross. austr. Alt. Cauc. Pers. Graec.

* Spiculis duplo majoribus, perianthio flosculi perfecti toto piloso, v. spp. Pers.

** Thyrso elongato (pedali, inferne interrupto), v. sp. Galloprov. (s. n. *Melicae provincialis Clar.*).

Melica Bauhini All. Panicula racemoso-contracta patulave; Pedicellis barbulatis; Glumis subaequalibus, acutis, flores aequantibus; Flosculo unico perfecto, apice membranaceo-appendiculato, margine ciliato.

Melica Bauhini. R. et S. II. p. 525.

Melica setacea Pers.

V. spp. Gall. Ital.

An mera varietas barbata *M. pyramidalis?*

Melica Gmelini Turcz. ined. Panicula nunc racemali nunc patentissima; Pedicellis barbulatis; Glumis aequalibus obtusiusculis floribus brevioribus; Flosculis 1, 2, 3 perfectis, apice membranaceo-appendiculatis: inferioribus (1 — 2) pilis adspersis.

Melica flosculis inferioribus gluma exteriore ciliatis, summo depili, ovali, Gmel. Sib. 1. p. 99. n°. 31. Tab. 19. f. 1.

V. spp. transbaical.

Omnium speciosissima. $2\frac{1}{2}$— 5-pedalis. Folia satis lato-linearia, cum vaginis scabra. Minor paniculam fert racemalem, palmarem, *Melicae nutanti* similem, spicularum flosculo unico tantum, rarius duobus perfectis; major paniculam fere pedalem, patentissimam, flosculis spicularum plerumque tribus perfectis. Glumae latae, sanguineae, margine membranaceo albo, (in planta juniori atro-purpurascentes). Flosculi fuscescendo purpurascunt.

Melica laxiflora Cav. Panicula patente, (axi culmo vaginisque sursum hispidissimis); Pedicellis barbulatis; Glumis aequalibus, flores aequantibus: inferiore acutiuscula, multo latiori; Flosculis 2 perfectis, scabris, membranaceo-appendiculatis: infimo lateribus superne parce piloso.

Melica laxiflora. R. et S. II. p. 526.

V. spp. Chil.

Melica papilionacea L. Mant. 1. Panicula racemali: Pedicellis barbulatis: Glumis aequalibus, flores aequantibus: inferiore obtusissima, multo latiore; Flosculis 2 perfectis, tuberculato-scaberrimis, membranaceo-appendiculatis: inferiore setulis adsperso.

Melica papilionacea. R. et S. II. p. 527. (nec, ut videtur, syn. *Sloanei*).

Melica brasiliana Ard.

Melica rigida Cav. R. et S. ibid.

V. spp. Bras. merid. Chil.

Melica virgata Turcz. ined. Panicula subthyrsiformi-racemali, elongata; Pedicellis barbulatis; Glumis inaequalibus, flosculis tertiam partem brevioribus; Flosculis 3 perfectis, membranaceo-subappendiculatis, dorso (praesertim lateribus) pilis adspersis.

V. spp. transbaical.

Fere 3-pedalis, gracilis. Vaginae glabrae, folia linearia, plana, scabriuscula. Panicula angustissima, dodrantalis, subinterrupta, radiis breviusculis composito-racemosis, densiuscule floriferis. Glumae purpureae. Flosculi sordide viridicantes.

b) Perianthiis imberbibus.

Melica nutans L. sp. pl. ed. 1. Panicula simplicissime racemiformi; Pedicellis barbulatis; Glumis subaequalibus, pl. min. obtusis, floribus nunc manifeste nunc vix brevioribus; Flosculis 2 perfectis, glabris, membranaceo-subappendiculatis.

Melica nutans. R. et S. II. p. 522.

V. spp. Helv. Germ. Petrop. Alt. Ross. austr. Cauc. Lapp. Kamtsch.

Melica uniflora Retz. Panicula simplicissima, pl. min. patente; Pedicellis (elongatis) nudis; Glumis parum inaequalibus, flores aequantibus; Flosculo unico perfecto, glabro, inappendiculato.

Melica uniflora. R. et S. II. p. 524.

Melica Lobelii Vill.

V. spp. Germ. Gall. Angl. Cauc.

Melica pyramidalis LaM. Paniculae plerumque patentis radiis pl. min. racemosis; Pedicellis barbulatis; Glumis pl. min. inaequalibus et acutis: superiore flores nunc aequante nunc paulo superante, nunc iisdem paulo breviore; Flosculis 2 perfectis, glabris, membranaceo-appendiculatis. (Foliis angusto-linearibus l. involutis).

α) Ligula brevi, foliis planis:

Melica pyramidalis. R. et S. II. p. 525.

V. spp. Ital. Sic.

* Sarmentosa:

Melica sarmentosa Nees ab Es. Agr. Bras. p. 485.

V. spp. Bras. merid.

(specie diversa non videtur. Ligula in speciminibus meis satis brevis).

β) Ligula elongata, lacera, foliis plerumque involutis:

Melica ramosa Vill. quo forsan etiam spectant *M. aspera Desf.* et *M. saxatilis Sm.* R. et S. II. p. 523.

V. spp. Gall. Sard. Cret.

* minor, panicula contracta:

Melica minuta auctt. (an L. Mant. 1. p. 32, ubi glumae flosculis duplo breviores dicuntur).

V. spp. Sard.

** panicula patentissima, spiculis duplo majoribus:

an *Melica major Sm.* R. et S. II. p. 523.

V. sp. Ins. Ceae Graec.

Melica speciosa Mühlenb. Panicula patente; Pedicellis barbulatis; Glumis inaequalibus, obtusiusculis, floribus paulo brevioribus; Flosculis 2-3 perfectis, sulcatis, glabris, membranaceo-appendiculatis. (Foliis lanceolato-linearibus, latiusculis).

Melica speciosa. R. et S, II. p. 526. Mant. 2. p. 296.

Melica glabra Mchx.

Melica mutica Walt.

V. sp. Am. bor.

Nimis similis *M. pyramidali.*

Melica altissima L. sp. pl. ed. 1. Panicula thyrsiformi-contracta; Pedicellis subbarbulatis; Glumis (latis) aequalibus, acutiusculis, flores aequantibus; Flosculis 1—2 perfectis, glabris, membranaceo-acutis. (Foliis latis).

Melica altissima. R. et S. II. p. 528.

Melica sibirica LaM.

V. spp. Ross. austr. Cauc. Alt.

Panicula interdum magis patens, racemi tamen breves. Pedicelli hispidissimi potius quam barbulati.

Melica macra Nees ab Es. Agr. Bras. p. 486. Panicula racemiformi, secunda; Pedicellis barbulatis; Glumis aequalibus, acutiusculis (involutis) floribus paulo brevioribus; Flosculis 2 perfectis, glabris (ad nervos hispidulis) inappendiculatis. (Foliis involutis).

V. spp. Bras. merid.

---

5. Poa (*L.*)

Gramina, exceptis forte aquis solo omnium regionum omni communia, imprimis temperatas zonas amantia, plerumque ½ — 1 — 2-pedalia vel (luxurie) altiora (4 — 5 pedalia).

Folia linearia, glabra, plana vel involuta.

Ligula membranacea.

Inflorescentia Panicula, plerumque aperta: *radiis* 1, 2, pluribus; in *Sclerochlois* unilateralis, collectissima: radiorum loco spiculis interdum ipsis subsessilibus.

Spiculae ovatae l. lanceolatae, pl. min. compressae, 2 — 5-, rarius pluri- (ad 10, in *P. sicula* 20-) florae; vix umquam (*P. minuta*) pedicello suo breviores.

Glumae paulo inaequales, flosculo suo breviores, rarius ipsi aequilongae, 1 — 3, 3 — 5-nerves.

Flosculi lanceolati l. lineari-lanceolati, rarius subovati. *Valv. inf.* herbaceo-membranacea, plerumque apicem versus membranaceo-marginata, 5-nervis: nervis, praesertim laterum intermediis, pl. min. obsoletis, rarius distinctis; longe plerumque carinato-compressa, in paucis tantum dorso convexa; mutica vel nonnumquam brevissime aciculata; saepissime ad nervos inferne tecta pube lanuginosa, dorsali

praesertim longa et contortiplicata (vaga). *Valv. superior* parum brevior, angustior, membranacea, plicata, bifido-dentata. — In *Sclerochlois* omnes partes pl. min. induratae.

Callus parvus, rarius nudus, plerumque postice lanam contortiplicatam (rarissime antice tantum pilum unum alterumve) emittens.

Rhachis demum articulatim solubilis, nuda vel antrorsum pubescens.

Lodiculae squamae 2, ovatae, acutiusculae, nudae.

Stamina 2—3. *Styli* 2. *Stigmata* ramosa.

Semen pl. min. oblongum, teretiusculum, exsulcum (dorso plerumque leviter excavato), eberbe, liberum vel (rarius) adnatum. *Scutellum* ipso circiter ¾ brevius.

Obs. Species hic eae tantum enumerantur, quarum plurima singulae vidi specimina. Minus itaque de differentia specifica certus adjicio definitiones Poarum: *pallentis*, *distichophyllae* et *asperae*, quippe quarum non nisi pauciora comparare contigit exempla. — Nervorum perianthii, ubi aut obsoleti aut distincti dicuntur, laterum potissimum intermedii intelliguntur.

a) Panicula explicata, spiculae herbaceo-membranaceae, *Poa*.

α) Perianthiis compresso-carinatis.

Poa minuta. Paniculae aequalis patentis radiis binis solitariisque, capillaceo-filiformibus, laevibus; Spiculis bifloris, pedicellis paulo brevioribus; Perianthiis distinctiuscule nervosis, ellipticis, obtusis, nudis aut basi (interdum contortiplicato-) villosulis; Ligulis productiusculis; Radice fibrosa.

Airopsis minuta Desv. R. et S. II. p. 578.

Aira minuta Loefl.

V. spp. Lus. Hisp. Afr. bor.

Vera Poa est; et semen Poae.

Poa annua L. *sp. pl. ed.* 1. Panicula (saepissime subunilateralis) radiis binis solitariisque, angulatis, laevibus; Spiculis 3— 7-floris, perbrevipedicellatis; Perianthiis pl. min. distincte nervosis, ovato-ellipticis, obtusiusculis, aut un-

dique aut basi tantum nudis; Ligula superiori productiuscula; Radice fibrosa vel subrepente.

Poa annua. R. et S. II. p. 535.

V. spp. Helv. Gall. Germ. Norw. Petrop. Alt. Sib. Cauc. Am. bor. et aequin. Sitk. Aleut.

β) Panicula angustata, saepe subracemosa, culmisque debilibus, foliis angustioribus.

v. spp. Lapp. Sitk. — Pyren.

γ) Perianthiis minus distincte nervosis:

Poa supina Schrad. R. et S. II. p. 543.

Poa variegata Hall. fil.

V. spp. alp. Germ. Helv. (Haec varietas etiam glaucescens occurrit).

Obs. Radicem pl. min. repentem etiam in P. annuae genuinae speciminibus plurimis inveni: Galliae, ins. Sitka, Amer. bor. (sub nom. *Poae stoloniferae Mühlenb.* acceptis).

Gramen Aleuticum, culmo solito longiori, debili, flosculis basi saepissime subcontortiplicato-lanatis, ligulis omnibus productiusculis insigne, nihilominus ad P. annuam referendum.

Poa persica. Paniculae pl. min. patentis radiis quinis plurimisve, angulato-filiformibus, scabris, plerumque a basi compositis; Spiculis (elliptico-linearibus) 3— 6-floris, pedicello aequilongis l. longioribus; Perianthiis distinctiuscule nervosis, linearibus, acutiusculis, nudis aut ad carinam nervosque laterales obsolete pubescentibus; Ligulis productis; Radice fibrosa.

V. spp. Pers.

Pedalis et minor, tenera, laete viridis, basi purpurascens. Culmus simplex vel ima basi erecto-ramosus, tenuis, scaber. Folia linearia, superiora sensim longiora, deorsum-, vaginae sursum scabrae. Panicula pl. min. sesquipalmaris, oblonga. Radii nonnumquam 15 in verticillo.

Poa leptocoma. Paniculae patentis, saepissime flaccidae, pauciflorae, radiis binis, subcapillaceo-filiformibus, laevissimis, superne floriferis; Spiculis sub-3-floris, pedicello subaequilongis vel longioribus; Perianthiis subobsolete nervosis, lineari-lanceolatis, acutiusculis, ad carinam villosulis, basi contortiplicato-lanatis; Ligulis pl. min. productis; Radice fibrosa.

α) Panicula capillari, flaccida, ligulis productioribus, foliis longioribus, v. spp. Sitk. (D. Mertens). Haec var. simillima est ***P. tenellae Hopp.*** differt potissimum forma perianthiorum.

β) Panicula strictiori, patentissima, ligulis productiusculis, foliis brevibus; v. spp. Kamtsch.

Culmus pl. min. pedalis, tenuis, gracilis. Folia plana, angusta (latiora vix lineam lata). Panicula tenera, 2—4-pollicaris, valde depauperata, in apice radiorum, quorum inferiores elongati, spiculis 1, 2, ad summum 4. — Var. β ob radios strictos et folia brevia habitus alieni.

Poa laxa ***Haenke.*** Paniculae subracemiformi-contractae patulaeve radiis binis, angulatis filiformibusve, laevibus, inferne (saepe non longe) nudis; Spiculis 2—5-floris, pedicello aequilongis longioribusque; Perianthiis obsolete nervosis, lanceolato-ovatis, pl. min. acutis, ad carinam nervosque marginales pl. min. villosis, basi contortiplicato-lanatis; Ligulis productis; Radice fibrosa.

α) Paniculae subracemiformis radiis angulatis, spiculis 2—3-floris:

Poa laxa. R. et S. II. p. 537.

Poa elegans ***DeC.!***

Poa flexuosa ***Sm.*** Brit. (flosculis dorso margineque nudis); V. spp. Germ. Helv. Norw.

β) Paniculae patulae radiis filiformibus, spiculis usque ad 5-floris:

Poa minor ***Gaud.***

Poa tenella ***Hopp.***

V. spp. Germ. Helv.

Obs. Specimina inter utramque varietatem intermedia occurrunt. — Aegre *laxa* ab *alpina* sejungitur, hujus praesertim varietati *brevifoliae* nimis similis.

Poa alpina **L.** *sp. pl. ed.* 1. Paniculae ovatae radiis binis solitariisque, filiformibus vel subangulatis, plerumque laevibus, inferne (saepe non longe vel vix) nudis; Spiculis 3— 10-floris, brevi-brevissimeque pedicellatis; Perianthiis obsolete nervosis, elliptico-ovatis, acutis (acutiusculis — mucronulatis), ad carinam nervosque marginales pl. min. villosis, basi modo elanatis, modo contortiplicato-lanatis; Ligulis superioribus productis; Radice fibrosa.

α) Radiis inferioribus superne floriferis:

Poa alpina. R. et S. II. p. 540.

V. spp. Gall. Helv. Germ. Eston. Cauc. Lapp.

* vivipara, v. spp. Gall. Helv.

β) Radiis omnibus pl. min. a basi floriferis, spiculis plurifloris, flosculis saepe mucronulatis:

Poa badensis Haenke!

Poa thermalis Pers.

* eadem minor:

Poa collina Host.!

Poa Molineri Balb.

Poa trivialis Koel.

Poa Koeleri DeC.

V. spp. Germ. Pyren. — (Culmi interdum circumcirca decumbentes).

γ) Parva, panicula angustata, spiculis sub- 4-floris:

Poa alpina brevifolia Gaud.

Poa frigida Schleich.!

Poa discolor Hopp. (an hoc syn. potius ad *laxam?*)

V. spp. alp. Helv. Germ. Pyren. Lapp. Cauc. or.

δ) Culmo basi bulboso:

Poa bulbosa L. sp. pl. ed 1. R. et S. II. p. 536.

V. spp. Lus. Gall. Germ. Suec. Taur. Cauc. Astrach.

* vivipara; v. spp. Ross. austr. Alt. Byz. Helv. Gall. — (Haec, panicula magis effusa, est *Poa crispa Thuill.*). Valvulae spicularum foliaceo-elongatae basi interdum in bulbulos nitidos abeunt.

* pumila, panicula compactissima:

Poa concinna Gaud.! R. et S. II. p. 543.

V. spp. Helv.

Poa stenantha. Paniculae contractiusculae radiis binis (vel pseudoternis) solitariisque, pl. min. filiformibus, scabriusculis laevibusve, inferne pl. min. longe nudis; Spiculis 2 — 5-floris, pedicellis pl. min. aequilongis longioribusque; Perianthiis subobsolete nervosis, lanceolato-linearibus, acutiusculis, ad carinam villosulis, inferne pilosulis, basi subbarbulatis; Ligulis productis; Radice fibrosa.

V. spp. Kamtsch. Unalaschk. Sitk. Ins. Karagin.

* Vivipara (valvulis in foliola praelonga excrescentibus).

Gramen, ut videtur, cum *P. flexuosa* in regionibus septentrionalibus frequentissimum. Culmus caespitosus, 1 — 2-pedalis vel paulo altior, erectus, satis tenuis, glaberrimus. Folia erecta, in minoribus angustissima, in vegetioribus paulo latiora: radicalia in minori gramine dimidium culmum aequantia, majoris et culmea satis brevia. Panicula contractiuscula, lineari-oblonga, erecta vel apice paulo nutans, bipollicaris vel palmaris, in altiori planta interdum spithamaea, nunc saturate nunc pallide viridis, rarius e fuscescente et viridi varia. Radii inferiores in vegeta planta elongati et superne tantum compositi, in vulgari gramine interdum non longe nudi. Spiculae *P. sudeticae* spiculis plerumque paulo majores, communiter 3-florae. Nervi nunc distinctiusculi, nunc, cum ipsa flosculorum pilositate, obsoleti. Valvula superior ad costas pubescens.

Obs. Sub nomine *Poae pratensis ancipitis Gaud.* gramen helveticum illustr. DE HALLER *fil.* misit, quod, a *P. pratensi* diversissimum, eam esse

speciem existimo, quam „inter pratensem et sudeticam intermediam" dicit cel. *Gaudin* in *Agr. helv.* 1. p. 217. Hoc, *P. stenanthae* parum absimile, perianthiorum tantum villositate evidentiori et foliis nonnihil latioribus differt; ulterius inquirendum in loco natali.

Aliud gramen, e Columbia, habitu *stenanthae* simillimum, radice quodammodo recedit subrepente, flosculis prorsus nudis, ligula tantum suprema producta.

Poa ochotensis. Paniculae contractae radiis subquaternis, subangulato-filiformibus, scabriusculis, fere a basi floriferis; Spiculis sub- 7-floris, pedicello duplo multoque longioribus; Perianthiis satis distincte nervosis, lineari-ellipticis, obtusiusculis, ad carinam nervosque marginales villosulis, basi parce contortiplicato-lanatis; Ligulis pl. min. productis; Radice fibrosa.

V. spp. Ochotens.

Similis quodammodo *stenanthae*, pedalis, culmo tenui, scabriusculo. Folia angustissima, erecta. Panicula ultrabipollicaris, apice subnutans, viridis. Spiculae lanceolatae.

Poa flexuosa Wahlenb. Paniculae patulae l. patentis radiis 2—5, filiformibus, laevibus asperisve, superne floriferis; Spiculis 3— 5-floris, pedicellis longioribus vel aequilongis; Perianthiis distinctiuscule nervosis, lanceolatis, pl. min. acutis, ad carinam nervosque marginales villosis, basi pl. min. contortiplicato-lanatis; Ligulis pl. min. productis; Radice repente vel stolonifera.

Poa flexuosa. Mert. et Koch Germ. 1. p. 604.

Gramen polymorphum variat

a) Pedicellis spicula brevioribus:

α) Spiculis variegatis,

* mediocribus, v. spp. Germ. Am. bor. Sitk. Kamtsch. Lapp.

** majoribus, v. spp. Kamtsch. Unal. Sitk. Am. bor.

*** parvis;

Poa laxa Wahlenb. (Lapp.)! v. spp. Lapp.

β) Spiculis viridibus, v. spp. Kamtsch. Unal. fret. Sinäv. Ins. Karagin. Laur.

b) Pedicellis spiculae aequilongis, spiculis variegatis, minor:

Poa** arctica* ***Br.

V. spp. Melw. Unal. Laur. Kamtsch.

***Poa** caucasica.* Paniculae patentis radiis 2—3, filiformibus, laevibus, superne floriferis; Spiculis 3-floris, pedicello longioribus; Perianthiis obsolete nervosis, elliptico-lanceolatis, pl. min. acutis, ad carinam pilosulis; Ligulis productiusculis; Radice repente vel stolonifera.

V. spp. Cauc. (D. MEYER).

Habitu similis ***P.*** *arcticae* ***Br.*** Culmi caespitosi, spithamaei et minores, adscendentes l. geniculati. Folia radicalia angustissima, saepe incurva, fasciculorum plerumque paniculam aequantia, culmea paulo latiora, superiora brevia. Panicula ovata, radiis inferioribus elongatis saepe horizontalibus. Spiculae virides vel e viridi et atropurpureo variae.

***Poa** rotundata.* Paniculae sublineari-laxae radiis subquinis, angulato-filiformibus, scabriusculis, simpliciusculis, inferne nudis; Spiculis (rotundato-apertis) trifloris, brevipedicellatis; Perianthiis obsolete nervosis, lineari-ellipticis, acutiusculis, dorso lateribus basique contortiplicato-villosulis; Ligulis productiusculis; Radice subrepente?

V. spp. Unalaschk. (D. MERTENS).

Pede altior. Culmus satis gracilis, compressus, glaber, inferne geniculatus. Folia satis angusta, sursum sensim longiora. Panicula laxa, sed pl. min. angustata, lucida, circiter spithamaea. Radii flexuosi, simpliciusculi, inferne plerumque non nimis longe nudi. Spiculae e viridi et spadiceo variae.

***Poa** fulva.* Paniculae (foliis pl. min. brevioris) patulae radiis subquaternis, subangulato-filiformibus, laevibus, inferne pl. min. nudis; Spiculis (subacerosis) 4—6-floris, pedicello subaequilongis l. longioribus; Perianthiis obsolete nervosis, lanceolato-ellipticis, obtusiusculis, nudis, basi vix barbatulis; Ligulis productis; Radice repente.

V. spp. e sinu Eschholz fret. Kotzeb.

Radix profunde descendens. Culmus 1 — 2-pedalis, satis crassus. Folia 2—3 lineas lata, brevi-acuta, glaucescendo-fuscescentia. Panicula palmaris l. sesquipalmaris, foliis ipsam superantibus obvoluta, rarius libera et folium supremum paulo excedens, fuscescendo-fulva. Ligulae obtusae.

Poa glumaris. Paniculae angustatae, densae, radiis 2—3, angulato-filiformibus, laevibus, a basi floriferis; Spiculis 2— 5-floris, pedicello longioribus, (glumis flosculos subaequantibus); Perianthiis distinctiuscule nervosis, lineari-lanceolatis, pl. min. acutis, ad carinam nervosque marginales villosulis nudisve, basi barbatis; Ligulis brevissimis vel suprema productiuscula; Radice repente. (Culmo tereti).

V. spp. Kamtsch. Sitk. Laur. Alaschk. Fret. Kotzeb.

Radix recta et profunde descendens. Culmus validus, sesqui — tri-pedalis, rigidus, (in planta sicca) cum reliquis partibus omnibus flavendo vel fuscescendo pallens. Folia firma, planiuscula, lineas 2—4 lata, brevi-et subcucullato-acuta, superiora sensim longiora (praelonga), haud raro paniculam aequantia l. superantia. Panicula stricta, rarius oblonga et palmaris tantum, plerumque lineari-elongata, spithamaea — pedalis. Radii breves vel breviusculi, a basi pl. min. dense floriferi. Spiculae magnae. Glumae flosculos in spiculis junioribus aequantes, in maturioribus et plurifloris iisdem paulo breviores.

Poa subfastigiata Tr. in Ledeb. Fl. alt. 1. *p.* 96. Paniculae, demum patentissimae, radiis 2—3, crassiusculis, compressis, strictis, pl. min. asperis, apice floriferis; Spiculis 3— 4-floris, pedicello aequilongis l. longioribus; Perianthiis distinctiuscule nervosis, lanceolatis, acutis, nudis; Ligulis pl. min. productis; Radice repente.

V. spp. transbaical. (et Alt?).

Culmus compressus, 1 — 3-pedalis. Folia plana, brevi-acuta. Panicula magna, in minori gramine patula tantum: radiis inferioribus elongatis, cum superioribus subfastigiatis; in majori patentissima, ultrap[illegible]s, amplissima et

lucidissima: radiis horizontalibus vel refractis, a medio aut superius ramosis, apicem versus paucifloris. Flosculus inferior interdum infra apicem aciculatus. Totum gramen glaucescens.

Poa sudetica Haenke. Paniculae pl. min. apertae radiis subquinis, angulato-filiformibus, plerumque asperis, inferne nudis; Spiculis 3-floris, pedicellis longioribus; Perianthiis distincte nervosis, lanceolatis, acutis, aut undique nudis, aut carina inferne basique contortiplicato-villosulis; Ligulis brevissimis; Radice repente; (Vaginis ancipitibus).

α) Flosculis undique nudis:

Poa sudetica. R. et S. II. p. 555.

Poa sylvatica Vill.

Poa quadripedalis Ehrh.

Poa rubens Mönch. et DeC.!

Poa latifolia Pohl.

V. spp. Sudet. et al. reg. Germ.

* foliis perangustis; v. spp. Cauc. — eadem, panicula interrupta et propterea radiis a basi floriferis; v. spp. Cauc.

β) Flosculis basi lanatis:

Poa hybrida Gaud.! R. et S. II. p. 533.

Poa Sellowii N. ab Es. Agr. Bras. p. 491.

Poa sclerophylla Spr. in sched.

V. spp. Sudet. Helv. Petrop. Bras.

Obs. Villi perianthiorum in hac var. modo densiores, modo perrari. Radii non in *hybrida* sola longe nudi, nec folia in var. priori sola apice cucullata. — Planta Brasiliae, glaucescens, differt tantum foliis rigidioribus.

Poa trivialis L. sp. pl. ed. 1. Paniculae apertae radiis subquinis, filiformibus, plerumque asperis, inferne nudis vel a basi compositis; Spiculis 2—3-floris, brevipedicellatis; Perianthiis distincte nervosis, lanceolatis, acutis, ad carinam

(interdum etiam ad nervos marginales) tenuissime villosulis, basi contortiplicato-lanatis (nudiusculisve); Ligulis pl. min. productis; Radice fibrosa. (Vaginis teretibus).

Poa trivialis. R. et S. II. p. 534.

Poa dubia Leers.

Poa scabra Ehrh.!

Poa pratensis Roth.

V. spp. Gall. Germ. Angl. Petrop. Ross. austr.

Culmus infra paniculam plerumque (tantum non semper) scabriusculus. — Occurrit interdum 5-pedalis; interdum culmo debili, spiculis 1 — sesqui-floris, qualis (et circa Petropolin lecta) est

Poa semineutra R. et S. II. p. 406.

Aira semineutra W. et Kit.

(Gramen Altaicum, solito robustius, culmo subcompresso, infra paniculam laevi, perianthiis subobsolete nervosis, villositate carinae et nervorum marginalium evidentiori, ligulis brevioribus, an varietas? an species?)

Poa pallens Hall. fil. Paniculae patentis radiis binis, filiformibus, laevibus, inferne nudis; Spiculis 3 — 4-floris, perbrevi-pedicellatis; Perianthiis obsolete nervosis, elliptico-lanceolatis, acutiusculis, ad carinam villosis; Ligulis productis; Radice repente.

Poa pallens. Gaud. Agr. 1. p. 201.

Poa Halleridis R. et S. II. p. 539.

V. spp. alp. Salisb.

Obs. Lanugo contortiplicata in speciminibus meis (Hoppeanis) desideratur. Panicula ovata, patentissima.

Poa distichophylla Gaud.! Paniculae contractiusculae radiis binis angulatis, asperiusculis, fere a basi floriferis; Spiculis 3 — 5-floris, perbrevi-pedicellatis; Perianthiis obsolete nervosis, lanceolatis, acutis, ad carinam nervosque margi-

nales villosis, basi contortiplicato-lanatis; Ligula superiori producta; Radice repente.

Poa distichophylla. R. et S. II. p. 539. (excl. syn. Hostii).

Poa minor Salzm. ms.

V. spp. Helv. Austr.

Obs. *Poae cenisiae* ab *Allioneo* attribuuntur spiculae 7-florae, radii 1 — 2-flori, quod in *distichophylla* non ita se habet.

An huc *Poa canina ht. Goett.*?

Specimen in hbio *Sieberi* folia habet praelonga; corsicum, a cl. SALZMANN missum, ligulas omnes breves.

Poa aspera Gaud.! Paniculae contractae radiis binis, angulatis, pl. min. hispidis (crassiusculis), inferne non longe nudis; Spiculis 3 — 4-floris, perbrevi-pedicellatis; Perianthiis obsolete nervosis, elliptico-lanceolatis, pl. min. acutis, ad nervos marginales villosulis, dorso contortiplicato-lanatis; Ligulis pl. min. productis; Radice fibrosa.

Poa Gaudini R. et S. II. p. 548.

Poa montana All.

V. spp. Helv.

Obs. an eadem cum *P. nemorali glauca* aut *caesia*?

Poa altaica Tr. in Ledeb. Fl. Alt. 1. *p.* 97. Paniculae contractae radiis 2 — 4, angulatis, laevibus l. subasperiusculis, inferne nudis; Spiculis 2 — 3-floris, pedicello subaequilongis l. perbrevi-pedicellatis; Perianthiis obsolete nervosis, elliptico-lanceolatis, acutis, ad carinam nervosque marginales villosulis, basi contortiplicato-lanatis; Ligulis pl. min. productis; Radice repente.

V. spp. Alt.

Ad summum pedalis. Culmus compressus, laevis vel rarissime subasperiusculus. Folia inferiora breviora, sensim longiora, suprema palmaria et ultra. Panicula in aliis depauperata, sesqui — bi-pollicaris, angustissima aut radiis

infimis pl. min. patulis; in aliis 3-pollicaris, densiuscula. Spiculae fusco-virides, aut e spadiceo, purpureo et viridi variae.

Vel foliis solis ab affinibus *distichophylla* et *aspera* distinguitur, quorum superiora panicula parum breviora sunt.

Var. *β.* in. Fl. Altaica recensita, glaucescens, asperior, duplex est: altera humilis, basi contracto-ramosa, radice repente, foliis brevibus *Poam* refert *distichophyllam* (simillimam habeo e Norwegia); altera pedalis, foliis ut in genuina *altaica* sensim longioribus, radice, ut videtur, fibrosa potius, *Poae nemorali glaucae* forsan rectius accensenda erit. Specimina harum varr. pauca de vera earundem sede dubium me relinquunt.

Poa compressa L. sp. pl. ed. 1. Paniculae pl. min. confertae (et subsecundae) radiis binis pluribusve, angulatis, asperis, a basi floriferis vel inferne non longe nudis; Spiculis 3 — 9-floris, brevissime pedicellatis; Perianthiis subobsolete nervosis, lineari-ellipticis, obtusiusculis, aut ad carinam nervosque marginales tenui-villosulis (inferioribusque) basi pl. min. contortiplicato-lanatis, aut undique nudis; Ligulis brevissimis; Radice pl. min. repente. (Culmo compresso).

Poa compressa. R. et S. II. p. 558.

V. spp. Gall. Germ. Helv. Angl. Sic. Ross. Cauc. Sib. Kamtsch. Am. bor.

* ad plantam flosculis omnino nudis pertinet syn. *Poa anceps Presl!*

Poa nemoralis L. sp. pl. ed. 1. Paniculae nunc apertae nunc contractae radiis 2—5, subangulatis, asperis, nunc a basi nunc altius compositis; Spiculis 2— 5-floris, pedicello aequilongis l. pl. min. longioribus; Perianthiis obsolete nervosis, lanceolatis, pl. min. acutis, ad carinam nervosque marginales villosulis, basi sublanatis (interdum nudis); Ligulis brevissimis vel obsoletis; Radice fibrosa.

Poa nemoralis. R. et S. II. p. 545.

Varietates secundum cell. *Gaud.* et *Mert. et Koch* seqq.:

a) *Vulgaris*, culmo tenui, debili, Spiculis 1 — 2-floris, perianthiis basi liberis.

V. spp. Helv. Gall. Germ. Petrop. Ross. austr. Cauc. Alt. Kamtsch. Lapp.

b) *Firmula*, culmo minus debili, spiculis 3 — 5-floris, perianthiis basi liberis.

V. spp. Gall. Helv. Germ. Petrop. Cauc. Sib. Kamtsch.

(huc duxi in *Led. Fl. Alt.* 1. *p.* 99. varietatem (?) altaicam magnam s. vegetam, spiculis saepe 8-floris, glaucescentem, ligula tamen pl. min. producta, culmo compressiusculo et asperulo nimis diversam; radicem non vidi).

c) *Rigidula*, culmo rigidulo, superne asperiusculo, panicula stricta, patente, spiculis 3 — 5-floris, perianthiis basi contortiplicato-lanatis:

Poa polymorpha Wib.

Poa serotina Schrad.

V. spp. Germ.

d) *Coarctata*, culmo rigidulo, laevi, panicula contracta, spiculis perianthiisque ut in c.

Poa coarctata Hall. fil.!

Poa dubia et *Scheuchzeri Sut.*

Poa caespitosa Poir.

V. spp. Germ. Cauc. Kamtsch.

e) *Montana*, culmo tenui, laevi, radiis paniculae tenuibus, paucifloris, spiculis majoribus, 3 — 5-floris, perianthiis basi parce contortiplicato-lanatis.

V. spp. Salisb. Helv.

f) *Glauca*, glauca, culmo compresso, rigido, laevi, superne nudo, panicula stricta, pauciflora, parva, spiculis 2 — 3-floris, perianthiis basi contortiplicato-lanatis:

Poa glauca Sm.

V. spp. Helv. Germ. Alt. Kamtsch.

g) *Caesia*, caesia, culmo compresso, rigido, superne asperiusculo, panicula stricta, multiflora, spiculis 3 — 5-floris, perianthiis basi contortiplicato-lanatis:

Poa glauca Poir.

Poa glaucescens Roth.

V. spp. Am. bor. *et* cc. (conf. *Poa aspera Gaud.*)

Subjungimus varietatem inter *caesiam* et *P. asperam Gaud.* quasi intermediam, glaucam, culmo stricto, superne longissime nudo, aspero et asperrimo, tamen in aliis laeviusculo vel laevi, panicula pl. min. contracta, plerumque sublineari-coarctata, multiflora, spiculis 3 — 5-floris, perianthiis villo (saepe parco) connexis, ligulis pl. min. productis, saltem productiusculis, cujus graminis plurima vid. spp. Ircut. Transbaic. Alt. denique etiam e freto Kotzeb. — qua planta, consideratis forte simul *Poa aspera Gaud.* et *P. sterili MBieb.*, transitus inter *Poas nemoralem* et *serotinam*, ceterum ultro sese offerens, reapse effici videtur.

Denique *P. nemoralis* occurrit culmo supra nodos cirrhoso-s. spongioso-prolificante, cujus v. spp. Germ. Helv.

Poa serotina Ehrh. Paniculae pl. min. apertae radiis 2 — 5, filiformibus, pl. min. asperis, inferne nudis; Spiculis 2 — 5-floris, pedicello aequilongis vel longioribus; Perianthiis obsolete nervosis, lanceolato-ellipticis, obtusis acutiusculisve, ad carinam nervosque marginales villosulis, basi contortiplicato-lanatis nudisve; Ligulis productis; Radice fibrosa (l. repente).

Poa serotina. R. et S. II. p. 549.

Poa fertilis Host.

Poa palustris DeC.!

V. spp. Gall. Helv. Germ. Petrop. Ross. austr. Cauc. Sib. Kamtsch. Am. bor.

* foliis culmeis brevibus, patentibus, flosculis acutiusculis, basi nudis:

Poa sterilis MBieb.! R. et S. II. p. 549.

V. spp. Taur. — In speciminibus ab ipso ill. auctore missis ligula, quae ipsi in descriptione *vix ulla* dicitur, superior elongata.

** Vivipara, v. spp. Alt.

Obs. Gramen satis polymorphum per formas quasdam in *P. nemoralem* manifeste transit. — In planta Americana, absque ullo dubio huc pertinente, radix aperte repens.

Poa** pratensis* ***L. *sp. pl. ed.* 1. Paniculae pl. min. apertae radiis subquinis, filiformibus, scabris laevibusve, inferne nudis; Spiculis 3— 5-floris, pedicello longioribus; Perianthiis distinctiuscule nervosis, elliptico-lanceolatis, acutis, ad carinam et longe plerumque etiam ad nervos marginales villosis, basi contortiplicato-lanatis (rarissime undique nudis); Ligulis brevibus aut obsoletis; Radice repente.

Poa pratensis. R. et S. II. p. 532.

Poa glabra Ehrh.

Poa trivialis Roth.

Occurrit latifolia, angustifolia (*P. angustifolia Poll.*), longifolia, macra (radiis binis tantum), dealbata, vivipara. — Parvula, foliis brevibus, latis (*P. depressa Presl!*). — Spiculis minoribus, flosculorum nervis marginalibus nudis (*P. strigosa Hoffm.*).

V. spp. Gall. Helv. Germ. Angl. Petrop. Ross. austr. Cauc. Alt. Sib. Lapp. Am. bor.

* Flosculis nudis, et cultura talis persistens; v. spp. Alt.

***Poa** umbrosa.* Paniculae laxiusculae radiis quinis, angulato-filiformibus, pl. min. scabris, rarius (vel aliis) inferne nudis, plerumque (vel aliis) fere a basi compositis; Spiculis 6— 7-floris, pedicello longioribus; Perianthiis distincte nervosis, lineari-lanceolatis, acutis, nudis villosve rarissimos rectos e callo emittentibus; Ligulis productis; Radice repente.

V. spp. Brasil. (in umbrosis arenosis rivi Parana).

Culmus cum panicula (circiter spithamaea) bipedalis, ima basi erecto-ramosus. Folia plana, lineam lata, flaccidula. Ligulae inferiores lineam, superior lineas fere duas longae. Panicula subelongata, albida. Flosculi distantes. Villi, si adsunt, ex anteriori calli parte potius emittuntur, perpauci, longiusculi.

Poa lanuginosa Poir. Paniculae contractae, sublobatae radiis subquinis, angulatis, asperis, a basi floriferis; Spiculis 5- (—10) floris, brevissime pedicellatis; Perianthiis distinctiuscule nervosis, lanceolatis, acuminatis, ad carinam nervosque marginales lanuginosis, basi dense longeque contortiplicato-lanatis; Ligulis productis; Radice subrepente.

Poa lanuginosa. R. et S. II. p. 569. Nees ab Es. Agr. Bras. p. 490.

Festuca lanata Spr. S. V. 1. p. 353.

V. spp. Bras. Chil.

Poa albida Turcz. ined. Paniculae oblongo-coarctatae (parvae) radiis binis, crassiusculo-filiformibus, laeviusculis (brevissimis), fere a basi floriferis; Spiculis sub- 6-floris, brevipedicellatis; Perianthiis satis distincte nervosis, lineari-lanceolatis, acutiusculis, dorso hispidulis, nudis; Ligulis obsoletis; Radice fibrosa.

V. spp. Transbaical.

Caespitosa, 1 — sesqui-pedalis. Culmus compressiusculus, glaber, cum foliis stricto-erectus. Folia radicalia plurima, involuta, nunc culmum totum nunc duas tertias partes ejusdem aequantia, culmea breviora, saepissime complanata. Panicula plerumque pollicaris, rarius duplo et quod excedit longior, lineari-oblonga, albens vel ex amethystino varia.

Poa plebeja Br. Paniculae patulae radiis 2—5, pl. min. filiformibus, scabris, inferne nudis; Spiculis sub- 5-floris, brevi-brevissimeque pedicellatis; Perianthiis distincte nervosis, lineari-ovatis (l. elliptico-linearibus), ad carinam lateraque inferne villosulis, basi parce lanatis; Ligulis brevissimis; Radice subrepente?

*

Poa plebeja. R. et S. II. p. 572.

V. spp. nov. Holl.

Culmus sesqui- bi-pedalis. Folia nunc planiuscula, nunc subinvoluta, stricta. Panicula palmaris—dodrantalis. Radii in var. minori bini, subangulato-filiformes, spiculae duplo majores quam in var. majori, cui radii subcapillares.

Poa laevis Br. Paniculae coarctatae radiis ternis quaternisve filiformibus, laevibus, inferne nudis; Spiculis 2— 5-floris, perbrevi-pedicellatis; Perianthiis distincte nervosis, lineari-ellipticis, acutiusculis, ad carinae basin pilosulis, basi parce contortiplicato-lanatis; Ligulis brevissimis; Radice fibrosa.

Poa laevis. R. et S. II. p. 572.

V. spp. Austral.

Ultrapedalis, stricta, dense caespitosa, glauca. Folia plurima, stricto-involuta, paniculam aequantia l. superantia.

Poa implexa. Paniculae patulae radiis 4 pluribusve filiformibus, scabris, inferne nudis; Spiculis sub- 6-floris, pedicello longioribus; Perianthiis distincte nervosis, lineari-ovatis, obtusiusculis, ad carinam brevissime villosulis, basi subnudis; Ligulis brevissimis; Radice fibrosa.

Poa australis Sieb. Agrostoth. n° 77.

V. spp. Austral.

1 — 2-pedalis, nec, ut *Arundo poaeformis* Billardiero dicitur, palmaris vel 6—8 pollicaris; flosculi basi non lanati, ut in *Poa australi* Brownio dicuntur. Culmus satis gracilis. Folia tenui-filiformia, scabra, plurima, fere omnia curvato-implexa, pallide virentia. Panicula fuscescens, interdum spithamaea. Spiculae satis parvae.

Poa violacea Bell. Paniculae contractiusculae radiis subquinis (pluribusve) filiformibus, scabris, a basi compositis vel inferne paulo nudis; Spiculis 3— 5-floris, pedicello longioribus; Perianthiis obsolete nervosis, lanceolatis, acutis et longe plerumque aciculatis, nudis l. ad carinam nervosque aut inferne pilosulis; Ligulis productis; Radice fibrosa.

Schedonorus poaeformis R. et S. II. p. 705.
Festuca poaeformis Host.!
Festuca rhaetica Sut.
Festuca pilosa Hall. fil.!
Festuca aetnensis Presl.!

V. spp. Germ. Helv. Sic.

Radiorum numero, rhacheos flosculorumque pilositate, perianthiis carinato-compressis, a Fectucarum charactere alienissima.

β) Perianthiis dorso convexis.

Poa angustata Br. Melw. n° 57. Paniculae sublineari-angustatae radiis 3—4, laevibus; Spiculis (herbaceo-membranaceis) lineari-oblongis, sub- 4-floris; Perianthiis obsolete nervosis, lineari-oblongis, acutiusculis, ad nervos pubescentibus, basi nudis; Ligulis productiusculis; Radice fibrosa.

V. spp. e Melw. Isl. (Descr. ap. Br. l. l.)

Poa phryganodes. Paniculae (parvae) radiis binis, laevibus (demum refractis); Spiculis (herbaceo-membranaceis) linearibus, sub- 4-floris; Perianthiis subobsolete nervosis, lineari-lanceolatis, acutiusculis, undique nudis; Ligulis brevibus; Radice stolonifera.

V. spp. e freto Kotzeb.

Procumbens, circiter spithamaea, glaberrima. Culmus tenuis, stolonum multinodis. Folia angustissima, pl. min. (siccitate?) involuta, satis brevia, saepe incurva. Panicula ultrapollicaris, radiis inferioribus patentibus refractisve, apice parce floriferis, summis brevissimis, contracto-erectis.

Poa arenaria Retz. Scand. Paniculae pl. min. apertae (interdum patentissimae) radiis 3—7, plerumque scabris; Spiculis (chartaceis) linearibus l. oblongo-linearibus, 2— 6-floris; Perianthiis obsolete nervosis, oblongo-linearibus ovatisve, basi barbulatis; Ligulis productiusculis; Radice fibrosa l. subrepente.

α) Radiis demum refracto-patentissimis, radice fibrosa:

Poa distans ***L.*** Mant. 1. R. et S. II. p. 544.

Poa retrofracta Curt.

Poa salina ***Poll.***

Glyceria distans ***Wahlenb.*** Ups.

V. spp. Germ. Petrop. Alt. Sib. Astr. Cauc.

β) Radiis semper erectis, radice fibrosa:

Poa festucaeformis ***Host.*** R. et S. II. p. 561.

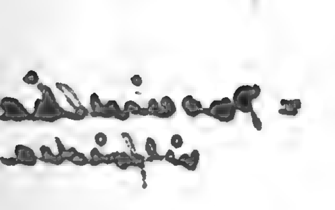
Festuca** capillaris* ***Liljebl.

Molinia capillaris ***Hartm.***

Glyceria capillaris ***Wahlenb.***

Venit quoque in hb[iis] s. n. *Poae palustris Seen.*, *rubentis* ***LaM.***, *montanae* ***DeC.***, *maritimae*, ***F****estucae arenariae* ***LaM.***

V. spp. Dalm. Monsp. Cors. Ross. austr. Alt. Cauc. Sib. Sitk.



Obs. Modificationes hujus var. plurimae inveniuntur: Panicula matura contracta foliis subbreviori (Sitka); Radiis asperis laevibusque; Flosculis ovatis, foliis latiusculis planis rigidis (Tergest); Flosculis subinduratis (quales sunt in spp. boreali-Americanis s. n. *Diachroae maritimae Nutt.* acceptis); Spiculis pertenuibus (Cauc. Transbaic.); Culmo paniculaque tenuibus, quo spectat ***Poa** gracilis ht.* ***Hafn.;*** praecipue vero ludit glumarum circumferentia et proportione, quae occurrunt: latiores et obtusae; angustiores et acutae; inferior nunc dimidio nunc paulo tantum brevior; imo vix minorem nec flosculo suo nisi paulo breviorem vidi in exemplo Dalmatico *Poae festucaeformis Hostii.* — Perianthia, ubi angustiora, vel in una eademque planta alia 3-, alia 5-nervia; Glumae 1-, vel 3-nerves.

γ) Radiis erectis, radice pl. min. repente:

Poa maritima ***Huds.*** R. et S. II. p. 560.

Poa arundinacea Mönch.
Glyceria maritima Mert. et Koch Germ. 1. p. 588.
V. spp. Gall. Germ. Holl. Sitk.

b) Paniculae racemosae radiis abbreviatis vel ipsis spiculis unilateralibus, pl. min. induratis, *Sclerochloa*.

Obs. Si compactam inflorescentiam indeque dependentem spicularum indurationem excipis, *Sclerochloae* (verae) omnia cum Pois communia habent. Nervi 5 (nec 7 in *P. dura*, ut obversa luci valvula facile cognoscitur).

A *Carphio* (*Festucae* subgenere) distinguitur *Sclerochloa* semine libero et oblongo (nec adnato, lineari).

De *Poa lima* ob semen mihi ignotum incertus sum an jure huc referatur. — *Poa sicula* semen depressissimum habet; an sui generis? (*Brizopyrum Link*, tum vero exclusa *Uniola spicata*).

Poa procumbens Sm. Radiis imbricatis, compositis; Spiculis 3 — 5-floris: flosculis linealibus, obtusiusculis, distinctiuscule nervosis, basi obsolete pilosulis.
Sclerochloa procumbens Pal. R. et S. II. p. 697.
an *Poa secunda ht. Madr.*
V. spp. Angl.
Obs. In *Poa secunda* culta radii distantes sunt, an quoque in planta spontanea? tum potius species propria.

Poa dura Scop. Radiis imbricatis, compositis; Spiculis 3 — 5-floris: flosculis bilinealibus, obtusis, distincte nervosis, nudis.
Sclerochloa dura Pal. R. et S. II. p. 698.
Cynosurus durus L.
Festuca dura Vill.
Eleusine dura LaM.
V. spp. Germ. Cauc.

? *Poa lima.* Radiorum loco spiculis ipsis sessilibus imbricatissimis, sub- 5-floris; Flosculis acutiusculis (mucronulatisve), obsolete nervosis: inferioribus pubescentibus; Glumis subcollateralibus, flosculos subaequantibus.

Dineba lima Pal. R. et S. II. p. 712.

Cynosurus lima Loeffl.

Wangenheimia disticha Mönch.

V. spp. Hisp.

Obs. Glumarum positio e solo imbricatissimo spicularum situ nascitur, nam in spiculis interdum magis liberis legitime positae sunt.

? *Poa sicula Jacq. ic.* Radiorum loco spiculis ipsis subimbricatis, 5— 20-floris; Flosculis pl. min. acutis (mucronulatisve), obsolete nervosis, inferne pilosulis; glumis legitime positis, flosculis multo brevioribus.

Poa sicula. R. et S. II. p. 569.

Briza cynosuroides Scop.

Cynosurus siculus Jcq. obs.

Triticum unioloides ht. Kew.

Triticum brizoides LaM.

Brizopyrum siculum Link.

V. spp. Sic. Sard.

---

6. Colpodium *Tr.* (*Fund. Agr. p.* 119).

Gramina tam arctica, quam zonae temperatae subalpina montium orientalium et aquatica nostratis, glabra, habitus Poae vel Vilfae, plerumque pedalia l. minora, rarius elata.

Folia linearia, plana vel involuta.

Ligula membranacea, exserta.

Inflorescentia Panicula vera, *radiis* ad 5, pluribusve.

Spiculae 1 — 2— 3 (-4) florae, pl. min. oblongae, totae persistentes.

Glumae nunc subaequales nunc inaequales, flosculo suo breviores, rarius superiore perianthium aequante: inferior 1—, superior 3-nervis: nervis lateralibus obsoletis, plerumque abbreviatissimis.

Flosculus saepissime unicus, interdum cum rudimentulo secundi; si plures, distincte alterni, oblongi: *valvula inferior* 3—5-nervis, nervis lateralibus plerumque abbreviatis, ad nervos herbacea, ceterum hyalina, fere semper obtusissima, mutica, rarissime aciculata, convexa vel compressiuscula; *valv. superior* aequimagna et ejusdem substantiae, leviter plicata, obtusissima; *utraque*, rarius tota, plerumque non nisi ad medium usque pubescens.

Callus minimus, nudus.

Rhachis, ubi adest, solida, nuda.

Lodiculae squamae 2, ovatae, integrae vel erosae.

Stamina 2—3. *Styli* 2. *Stigmata* ramosula.

Semen ovale, teretiusculum, eberbe, exsulcum, liberum. *Scutellum* ipso $\frac{3}{4}$ et ultra brevius.

Obs. Genus substantia tenera et *aequali* valvulae utriusque perianthii insigne, hinc *Vilfis*, inde *Pois* affine, fortasse etiam *Vilfas algidam* et *monandram* in se recipiens, non nisi valvulis glabris et glumis pusillis recedentes.

Colpodium latifolium Br. Melv. n° 56. Uni— ultra 3-pedale: Paniculae contractae radiis a basi (vel, magis patulae, inferioribus superne) floriferis; Spiculis 1-floris; Perianthiis fere totis pubescendo-hirtulis: valvula inferiori (obsoletissime) 5-nervi (dorsali saepe in aciculam excurrente); Radice stolonifera.

Agrostis paradoxa Br. in Ross voy. ed. 2. V. 2. p. 192.

α) Panicula lanceolato-lineari, spiculis tenerioribus;

V. spp. Transbaical. et ad Kolymam Sibir. ll.

β) Panicula patula, laxiuscula, majori, spiculis firmioribus:

Vilfa arundinacea Tr. Diss. 1. p. 157. Ic. Gram. V. 55.

V. spp. e freto Kotzeb.

Obs. Licet magnitudo plantae Brownianae (quae spithamaea vel pedalis) longe distet a plantae, quam vidimus, magnitudine fere 4-pedali, tamen descriptio a cel. auctore l. l. data nostrae imaginem exactissime praebet. Var. β autem, quamvis nulla nota stabili specifice distinguenda, habitu valde aliena est. Panicula e purpurascente fuscescens, laxiuscula; Spiculae firmiores et chartaceae potius dicendae, non nisi in extremo apice membranaceae, magis acutae; valvula superior distinctius plicata. Quam ob rem, neglecto callo, hanc Vilfis associaveram.

Colpodium Steveni Tr. Fund. Agr. p. 119. Pedale; Paniculae patentis (ovatae) radiis superne floriferis; Spiculis 1-floris; Perianthiis circiter ad medium usque obsolete pubescentibus; valvula inferiore 3-nervi; Radice repente.

Agrostis versicolor Stev.! R. et S. II p. 358.

V. spp. Cauc.

Colpodium altaicum Tr. in Led. Fl. Alt. 1. *p.* 100. Pl. min. pedale; Paniculae patulae radiis aliis (vel omnibus) fere a basi, aliis superne floriferis; Spiculis 1-floris; Perianthiis fere ad medium usque villoso-pubescentibus: Valvula inferiori 3-nervi; Radice subrepente, stolonifera.

V. spp. Alt.

Folia obtusiuscula cum mucrone. Panicula sesqui— 3-pollicaris. Glumae subhyalinae, flosculo paulo breviores. Rudimentulum e callo brevissimum. Valvulae obtusiusculae, varie emarginatae. Stamina 2.

Colpodium bulbosum. Pl. min. semipedale; Paniculae patentis (ovato-pyramidatae) radiis superne floriferis; Spiculis 2 — 3-floris; Perianthiis ad medium usque villosulo-pubescentibus: valvula inferiori 5-nervi; Radice bulbosa.

Aira humilis MBieb.! R. et S. II. p. 684.

V. spp. Cauc. Sarept. Astr.

Folia radicalia angustissima, saepe involuta, pl. min. brevia. Glumae flosculo infimo fere duplo breviores.

Colpodium aquaticum. Pl. min. semipedale; Paniculae, saepe elongatae, patentis, radiis maximam partem a basi compositis; Spiculis 2 — 3 (4-) floris; Perianthiis ad medium usque obsoletissime pubescentibus (subnudis): valvula inferiore distinctissime 3-nervi; Radice repente.

Catabrosa aquatica Pal. R. et S. II. p. 696.

Aira aquatica L. sp. pl. ed. 1.

Poa airoides Koel.

Molinia aquatica Wib.

Glyceria aquatica Presl.

V. spp. Gall. Germ. Angl. Petrop. Ross. austr. Alt. Astr. Iber. Pers.

Obs. Pubes perianthiorum non nisi ope lentis fortioris conspicua.

---

7. Eragrostis *Pal.*

Gramina arvensia et campestria (arenosa praesertim et glareosa amantia) regionum tropicarum, rarius temperatarum australiorum, staturae nunc perparvae nunc mediocris, nunc altioris (4 — 5 pedum).

Folia linearia, plana vel involuta, glabra vel pilosa.

Ligula longe plerumque ciliaris, interdum obsoleta, rarius membranacea in ipsis genuinis speciebus (*Er. conferta*, *abessinica*).

Inflorescentia Juba vel Panicula, *radiis* 1 — pluribus; rarius Racemus, aut simplicissimus, aut compositus.

Spiculae 2 — 70-florae, pro flosculorum numero modo oblongae, modo lineari-elongatae: juniores vel inferiores saepissime pauciflorae et proinde subdissimiles.

Glumae herbaceo-membranaceae vel membranaceae tantum, compressae, 1 — 3-nerves, parum inaequales, flosculo suo breviores.

Flosculi ejusdem cum glumis substantiae, ovati, elliptici l. lanceolati, longe plerumque distiche imbricati: *Valv. inferior* 3-nervis: nervis aut distinctis et percurrentibus, aut (praesertim lateralibus) pl. min. obsoletis; carinato-compressa, mu-

tica aut e nervo medio omnibusve breviaciculata; *valv. superior* angustior, aequilonga vel pl. min. brevior, plicata, bifido-dentata, ad carinas ciliata, serrulata vel nuda, reliquis partibus deciduis ad rhachin in longe plurimis persistens.

Callus brevis, nudus.

Rhachis solida in genuinis speciebus, solubilis in quibusdam spuriis, nuda vel rarius antice obsolete pubescens.

Lodiculae squamae 2. subcuneatae, nudae.

Stamina 2—3. *Styli* 2. *Stigmata* plumoso-ramosa.

Semen oblongum, teretiusculum l. dorso depressum, eberbe, exsulcum, liberum. *Scutellum* ipso pl. min. dimidio brevius, (haud raro cum facie seminis angulum formans).

Obs. Proxima hinc *Vilfa* inde *Leptochloa*.

a) Panicula l. Juba.

α) Genuinae: rhachi solida, valvula superiori persistente.

1) Valvula superiore (longe) ciliata *).

Eragrostis peruviana. Paniculae thyrsiformi-coarctatae (brevis) radiis brevissimis, a basi compositis; Spiculis subsessilibus, ellipticis, sub- 6-floris; Flosculis acuminatis: valvula superiore tertiam partem breviori, ciliatula; Foliis planis (vaginisque) pilosis; Ligula ciliari, barbata.

Poa peruviana Jcq. R. et S. II. p. 564.

Poa nana Savi ms.

V. cc.

Eragrostis lobata. Paniculae thyrsiformi-coarctatae, sublobatae (paulo elongatae) radiis brevissimis, a basi compositis; Spiculis subsessilibus, oblongis, 7—9-floris; Flosculis mucronatis: valvula (inferiore ad carinam saepius rari-) superiore subaequilonga longe ciliata; Foliis angusto-planis, glabris; Ligula obsolete ciliari, barbata.

*) Species in subdivisionibus 1 et 2, quae sequuntur, enumeratae sunt secundum pedicellorum longitudinem sensim majorem.

an *Poa cylindrica Roxb.* (*Megastachya cylindrica Schult.* Mant. 2. p. 328).

V. spp. Guin. Ins. Franc.

1 — sesqui-pedalis. Culmus satis tenuis, simplex, vel ex ima basi ramosus. Folia plana, superiora sensim longiora, angustiora, siccitate subinvoluta. Vaginae tota fissura ciliatae. Thyrsus pl. min. lobatus, inferne saepe interruptus, digitalis—sesquipalmaris, sublinearis, pallens vel purpurascendo-fuscescens. Valv. superior remote ciliata.

Eragrostis ciliaris Link. Paniculae thyrsiformi-coarctatae, elongatae, saepe interruptae radiis brevissimis, a basi compositis; Spiculis oblongis, 6— 20-floris, brevissime pedicellatis; Flosculis obtusiusculis: valvula (inferiore saepius rari-) superiore parum breviori longe ciliata; Foliis angustis vaginisque glabris; Ligula ciliari, barbata.

Megastachya ciliaris Pal. R. et S. II. p. 592.

α) foliis planis. V. spp. Surin. Mart. St. Vinc.

β) foliis compresso-involutis:

Poa riparia W. (*Megastachya riparia R. et S. II. p.* 593).

V. spp. Corom. Marian.

Eragrostis viscosa. Paniculae pl. min. thyrsodis radiis fere a basi compositis; Spiculis ellipticis, 5 — 7 (-12) floris, brevi-brevissimeque pedicellatis; Flosculis obtusiusculis: valvula superiori aequilonga, (spicularum superiorum) longe ciliata; Foliis angustissimis, (patentibus) glabris; Ligula ciliari, eberbi.

Poa viscosa Retz. R. et S. II. p. 564. (an *Roth?*)

V. spp. Ind. or. Philipp.

Obs. Plantam Retzianam a b. Swartzio accepi; radii huic patuli, inferiores elongatuli. Manillensem, varietati *β. Er. ciliaris* simillimam, ob compactissimam paniculam thyrsodem et brevem dubius, nec nisi ob ligulas eberbes huc refero. — Rothii graminis vaginae ore longe pilosae.

Eragrostis glutinosa. Paniculae patulae, lucidae radiis 2—1, fere a basi parce compositis (axi pubescente); Spiculis ellipticis, sub-9-floris, pedicello subae-

quilongis vel paulo brevioribus; Flosculis acutiusculis: valvula superiore aequilonga, ciliata; Foliis angustissimis, pilosulis; Ligula ciliari, obsolete barbata.

Poa glutinosa Sw.! R. et S. II. p. 567.

V. spp. Jam.

Eragrostis plumosa Link. Paniculae jubalis, pl. min. patentis radiis 2—3 solitariisque, subcapillaribus, fere a basi compositis, basi (et ad ramificationes) stellato-barbatis; Spiculis oblongis, 6-9-floris, pedicello brevioribus; Flosculis obtusiusculis: valvula superiore subaequilonga, longe ciliata; Foliis angustis glabris; Ligula barbata.

Poa plumosa Retz. R. et S. II. p. 552.

Poa despiciens ht. Berol.

V. cc.

β) Barba ramificationum obsoleta:

Poa tenella Retz.

Eragrostis tenella Pal. R. et S. II. p. 576. (excl. syn. *Thunb.*)

V. spp. Ind. or. Philipp. Guahan. Waahu.

2) Valv. superiore serrulata tantum, vel laevi.

* Perianthiis ovatis.

Eragrostis sarmentosa. Paniculae sublineari-angustae, inferne saepe interruptae radiis brevissimis, a basi densiuscule floriferis, axillis nudis; Spiculis sessilibus, lineari-ovatis, sub-10-floris; Flosculis elliptico-ovatis, acutiusculis, distinctiuscule nervosis: valv. sup. aequilonga (quasi pubescendo-) serrulata; Foliis compresso-linearibus, glabris; Ligula brevissima, barbata. (Culmo basi decumbente).

Poa sarmentosa Thbg.! R. et S. II. pag. 562. Mém. des nat. de Mosc. III. p. 45. Tab. 5.

V. sp. Cbsp.

Spiculae fuscae, nitidae.

Eragrostis interrupta Pal. Paniculae lineari-compactae, interruptae radiis solitariis, a basi dense floriferis, axillis nudis; Spiculis sessilibus, lineari-ovatis l. lineari-ellipticis, 10 — 25-floris; Flosculis ovatis, acutis, distincte nervosis: valv. sup. parum breviori, serrulata; Foliis angustissimis, planis, laevibus; Ligula ciliari, eberbi.

Eragrostis interrupta. R. et S. II. p. 577.

Poa interrupta Br.

Eragrostis elongata Jcq.

Poa elongata W.

Poa dependens Horn.

Megastachya elongata Pal. R. et S. II. p. 591.

Eragrostis brasiliensis var. γ. N. ab Es. Agr. Bras. p. 497.

V. spp. nov. Holl.

Eragrostis rufescens Schult. Mant. 2. p. 319. Paniculae pl. min. compactae et interruptae radiis solitariis, a basi densius laxiusve floriferis, axillis (interdum etiam ad ramificationes) pl. min. villosis; Spiculis sessilibus, lineari-ellipticis, 6— 25-floris; Flosculis ovatis, acutis l. subacuminatis, pl. min. distincte nervosis: valv. sup. tertiam partem breviori, serrata; Foliis linearibus, angustis, rigidis (totis vel paginae superioris basi tantum) pilosis; Ligula ciliari, barbata.

α) Panicula minus densa s. minus glomerata, spiculis majoribus, vaginis nudis, culmo decumbente:

Eragrostis inconstans α Nees ab Es.* Agr. Bras. p. 495. (excll. synn.)

V. spp. Bras. (in arenosis subhumidis).

β) Panicula interdum glomerato-interrupta; ubi radii minus dense floriferi, his quoque ad ramificationes villosis; foliis vaginisque pilosis:

Megastachya Swainsoni Radd. Agr. Bras. p. 52.

V. spp. Bras. (Bahia).

Eragrostis floribunda Schult. Mant. 2. p. 319. Paniculae lineari-vel lanceolato-contractae radiis subsolitariis a basi densiuscule floriferis, axillis nudis; Spicu-

lis sessilibus, lineari-ellipticis, 9— 14-floris; Flosculis ovatis, acuminatissimis, distincte nervosis: valv. sup. tertiam partem breviori, serrata; Foliis angustissimis, planiusculis, glabris; Ligula ciliari, barbata. (Culmo ramosissime florifero).

Eragrostis inconstans β *** *N. ab Es.* Agr. Bras. p. 495.

V. spp. Brasil.

Eragrostis psammodes. Paniculae elongatae, laxae, nutantis radiis solitariis, aliis a basi aliis pl. min. longe supra basin compositis, axillis nudis; Spiculis sessilibus, angusto-linearibus, 12— 18-floris; Flosculis ovatis, acutis, distincte nervosis: valv. sup. parum breviori, serrulata; Foliis pl. min. involutis, rigidis, glabris; Ligula ciliari, eberbi.

an *Poa squamata LaM.* R. et S. II. p. 566. (obstant culmus superne teres nec angulosus, radii scabri nec laevissimi).

V. spp. Bras. (in ripa rivi Coxim, das Velhas).

Culmus 4-pedalis, simplex, siccus cum panicula lutescens, Vaginae sulcatae cum foliis angustissimis involutis glaberrimae. Panicula ultrapedalis, nutans, laxa, superne contractiuscula. Spiculae confertae, perangustae, 3— 4-lineales, interdum fuscescentes.

Eragrostis capensis. Paniculae confertae radiis solitariis, a basi floriferis, axillis nudis; Spiculis sessilibus, ovatis, 5— 30-floris; Flosculis (imbricatissimis) ovatis, obtusis, distincte nervosis: valv. sup. aequilonga, ciliato-pubescente; Foliis angustis, planis, rigidiusculis, glabris; Ligula ciliari, obsolete barbata.

Poa brizoides L. sppl.

Briza capensis Thbg.

V. spp. Cbsp.

Obs. Synonyma huc pertinere me persuasum habeo, dubius de *Poa brizode Spr.* in *Act. Petrop. II. p.* 302. *Tab.* 8. ubi folia villosa.

Radix repens. Culmus semi— ultra-pedalis, basi procumbens ibique ramosus. Spiculae ramorum radicalium parvae, interdum biflorae tantum, ro-

tundatae, pallidae, apice caerulescentes: paniculae culmeae speciosissimae: pro statura graminis nunc 3— 4-lineales, albentes et e purpureo variae, nunc maximae et amplae (semipollicares, lineas 3 latae), lutescentes, pondere suo paniculam nutantem reddentes.[1]

Eragrostis rubiginosa. Paniculae simplicissimae subthyrsiflorae radiis solitariis, brevissimis, a basi floriferis, axillis nudis; Spiculis subsessilibus, ovatis, sub-9-floris; Flosculis ovatis, obtusis (obsolete mucronulatis), distincte nervosis: Valvula (inferiore basi e nervis lateralibus ciliata), superiore aequilonga tenuissime serrulata; Foliis linearibus, rigidiusculis; Ligula ciliari, barbata.

V. spp. ex Accra Afric.

Plantula digitalis, erecta. Radix fibrosa. Vaginae margine ciliatae. Folia pl. min. pollicaria, carinata, plana, glabra, culmeum superius brevius. Panicula circiter pollicaris, lineari-angusta, lucidula. Spiculae colore ferrugineo.

Eragrostis chalcantha. Paniculae confertae radiis solitariis, brevissimis, simpliciusculis, a basi floriferis, axillis nudis; Spiculis brevissime pedicellatis, ovato-ellipticis, sub- 7-floris; Flosculis lato-ovatis, obtusiusculis, subobsolete nervosis: valv. sup. aequilonga, tenuissime serrulata; Foliis linearibus: junioribus pilis adspersis; Ligula ciliari, barbulata.

V. sp. Cbsp.

Culmus circiter pedalis, geniculato-erectus, simplex, tenuis, teres. Folia plana vel involuta, sensim breviora. Panicula fere bipollicaris, angusta. Spiculae turgidulae. Perianthia fusco-aenea.

Eragrostis multiflora. Paniculae patentis, rarae radiis solitariis, simpliciusculis vel parce compositis, prope a basi floriferis, axillis nudis; Spiculis subsessilibus vel brevissime pedicellatis, linearibus, 20— 70-floris; Flosculis ovatis, pl. min. acutis, distinctiuscule nervosis: valv. sup. paulo vel $\frac{1}{4}$ breviori, pubescendo-serrulata; Foliis planis vel subinvolutis, glabris pilosulisve; Ligula ciliari, subeberbi.

Poa multiflora Roxb. Schult. Mant. 2. p. 314.

α) Culmo decumbente, saltem obliquo, rigidiori flaccidiorive, v. spp. Sierr. Leon. Manil.

β) Culmo stricto-erecto.

V. spp. e Congo (herb. Hornem.).

In var. α, quae spithamaea — bipedalis, panicula dimidiam interdum vel majorem saltem culmi partem occupat, radiis satis longe ab invicem distantibus, brevibus; quo rigidior culmus, eo angustiora magisque involuta folia. Var. β. vix species existimanda, 1 — 2-pedalis, culmo aut simplici, aut per intervalla longissima florifero-ramosa.

Eragrostis Vahlii N. ab Es. Paniculae strictiusculae, patulae radiis solitariis, mox supra basin simpliciter divisis, villosulis, axillis omnibus barbatis; Spiculis brevipedicellatis, lanceolato-ovatis l. lineari-ellipticis, 5 — 20- (50-) floris; Flosculis ovatis, acuminatissimis, distinctiuscule nervosis: valv. sup. fere dimidio breviori, ciliatula; Foliis compresso-planis, villosis glabriusculisve; Ligula brevissima, ciliari, eberbi.

Egragrostis Vahlii N. ab Es.! Agr. bras. p. 499. (excl. syn. sub var. β.).

Poa racemosa Vahl.

Poa Vahlii R. et S. II. p. 563.

V. sp. Bras.

Eragrostis bahiensis Schult. Mant. 2. p. 318. Paniculae patulae vel contractiusculae, strictiusculae, lucidae radiis solitariis, nunc a basi nunc pl. min. supra basin compositis, axillis nudis; Spiculis brevi-pedicellatis, lineari-ellipticis, 4 — 20-floris; Flosculis ovatis, acutis, distincte nervosis: valv. sup. subaequilonga, serrata; Foliis planis vel subinvolutis rigidulis, glabris basive pilosis; Ligula ciliari, eberbi l. obsolete barbulata.

Poa brasiliensis Raddi Agr. Bras. p. 51. (excl. syn. Sloanei).

Eragrostis brasiliensis N. ab Es. Agr. Bras. p. 497. (excll. varr. γ et δ.).

Poa polymorpha Br.

Megastachya polymorpha R. et S. II. p. 594.

V. spp. Bras. nov. Holl.

Obs. Barba ligulae, in gramine spontaneo nulla vel obsoleta, manifesta evadit in culto (e sem. Nepal.).

Intermediam quasi (ratione pedicellorum) inter hanc et *rufescentem* v. in hbio HORNEMANNI, e Congo missam: spiculis in paniculae elongatae radiis (paulo supra basin floriferis) confertissimis, brevissime pedicellatis sessilibusque, fuscis.

Eragrostis gigantea. Paniculae contractae, densae radiis pluribus verticillatis solitariisque, subadpressis, a basi compositis et floriferis, axillis nudis; Spiculis pedicello multo longioribus, lanceolato-linearibus, 11—13 floris; Flosculis elliptico-ovatis, acutis, distinctiuscule nervosis: valv. sup. subaequilonga, superne serrulata; Foliis lato-linearibus, scabriusculis; Ligula obsoleta, eberbi.

Poa domingensis Pers. R. et S. II. p. 558.

V. sp. Doming.

4—5-pedalis. Culmus inferne crassitie digiti minoris et valde foliosus, subramosus. Vaginae glabrae. Ligulae loco linea angustissima, callosa. Folia praelonga. Panicula sesquipedalis, inferne interrupta, sicca pallens.

Eragrostis fascicularis. Paniculae jubalis contractae radiis pluribus confertis solitariisque, a basi compositis et erecto-floriferis, axillis nudis; Spiculis pedicello plerumque multo-longioribus, linearibus, 8—16-floris; Flosculis ovatis, obtusiusculis, distincte nervosis: valv. sup. inferiorem subexcedente, superne scabriuscula, Foliis setaceis, glabris; Ligula obsoleta, eberbi. (Culmo per intervalla longa fasciculato-ramosissimo).

V. spp. e Congo. (herb. HORNEM.).

Radicis fibrae praelongae, validae, pubescentes. E caespite denso folia dilatato-vaginata, plurima, subulato-filiformia, stricta. Ligulae loco linea callosa. Culmus teres, glaberrimus, strictus, per spatium pedale simplicissimus, tunc emittens fasciculum densissimum foliorum, radicalibus similium, et inter

ea pedunculos fere a basi radiolosos (in speciminibus non prorsus integris) spithamaeos, sed absque dubio longiores, lineari-paniculatos, fuscescentes *).

Eragrostis poaeoides. Paniculae (saepissime jubalis) patentis radiis solitariis binisque, pl. min. a basi compositis et floriferis, axillis nudis; Spiculis pedicello plerumque multo longioribus, elliptico-linearibus, 8 — 20 — 50-floris; Flosculis ovatis, obtusiusculis (in majoribus mucronulatis), distincte nervosis: valv. sup. paulo (interdum ¼) breviori, (subinaequaliter) serrulata; Foliis planis, glabris; Ligula ciliari, barbata.

α) major, spiculis multifloris, flosculis plerumque brevissime mucronulatis:
Megastachya Eragrostis Pal. R. et S. II. p. 584.
Poa megastachya Koel.
Briza Eragrostis L. sp. pl. ed. 1.
Briza oblonga Mönch.
Eragrostis major Host.
Eragrostis Megastachya Link.
V. spp. Hisp. Gall. Germ. Aegypt. Philad.
Obs. Folia cum vaginis nonnumquam pilosula. Mucro vagus.

β) tenuior, spiculis minoribus, circiter 10-floris, flosculis absque mucronulo:
Eragrostis poaeoides Pal. R. et S. II. p. 574.
Eragrostis poaeformis Link.
Poa Eragrostis L. sp. pl. ed. 1.
V. spp. Gall. Germ. Cauc.

γ) tenerior, parvula, spiculis paucifloris;
Poa tephrosanthos Spr.
Eragrostis tephrosanthos Schult. Mant. 2. p. 316.

---

*) Alia species (an varietas) Guineensis (herb. HORNEM.), similis *fasciculari*, differt: culmis, nec pedunculis tantum, e fasciculo foliorum prodeuntibus multo longioribus (fere pedalibus) apice paniculam ferentibus spithamaeam; spiculis pallidioribus, flosculis acutis, valv. perianthiorum superiore paulo breviori, serrulata.

V. spp. Mart. Trinit. Bras. — In maritimis Hispaniae et Teneriffae occurrit diffusa, basi lignescens, foliis brevibus, rigidis, subpungentibus.

Eragrostis Neesii. Paniculae (Jubae) oblongae, patulae, lucidae radiis brevibus, solitariis binisve, a basi compositis, axillis nudis; Spiculis pedicello (multo) longioribus, lineari-ellipticis, 5— 10— 15-floris; Flosculis ovatis, acutiusculis, obsolete nervosis: valv. sup. subaequilonga, laevi; Foliis (breviusculis) planis, pilosis; Ligula ciliari.

Eragrostis brasiliensis var. δ, N. ab Es. Agr. Bras. p. 497.

V. spp. Bras.

Eragrostis japonica. Paniculae jubalis elongatae, subcylindricae, lucidulae radiis subverticillatis solitariisque, a basi compositis, axillis nudis; Spiculis pedicello vix brevioribus, subrotundo-ovatis, 5— 7-floris (minimis); Flosculis elliptico-ovatis, pl. min. obtusis, satis distincte nervosis: valv. sup. paulo breviori, superne serrulata; Foliis compresso-involutis, glabris; Ligula brevissima, eberbi.

Poa japonica Thbg.! Tr. in Spr. n. Entd. II. p. 68.

Eragrostis tenella β. R. et S. II. p. 576.

V. sp. Japon.

Eragrostis leptantha. Paniculae lineari-contractae, densiusculae radiis verticillatis pluribus vel binis solitariisque, fere a basi compositis, axillis nudis; Spiculis pedicello pl. min. aequilongis, angustissimis, 7— 9-floris; Flosculis elliptico-ovatis, acutiusculis, distinctiuscule nervosis: valv. sup. parum breviori, tenuiserrulata; Foliis linearibus attenuatis, glabris l. basi superne pilis adspersis; Ligula ciliari, barbata.

V. spp. Brasil. (in siccis arenosis).

1 — 2-pedalis. Radix fibrosa. Culmus erectus simplex vel basi florifero-et erecto-ramosus. Folia inferiora angustissima, culmea latiora (lineam l. lineas 2 lata) mox dehinc involuto-attenuata, cum vaginis pl. min. laevia. Panicula spithamaea — dodrantalis, angustata. Spiculae circiter bilineales, subfuscescentes.

Eragrostis acicularis. Paniculae racemalis radiis solitariis, paucifloris, a basi subadpresso-floriferis, axillis nudis; Spiculis pedicello pl. min. aequilongis, ovato-lanceolatis, 12—25-floris; Flosculis ovatis, acuminatis, distincte nervosis: valv. sup. dimidio breviori, serrulata; Foliis setaceo-involutis, strictis, pilis adspersis; Ligula ciliari, barbata.

V. spp. Bras. (in arenosis ad ripas fluv. Jacaré pr. Parana).

Digitalis, sesquipalmaris, rigidula, erecta. Radix fibrosa. Folia culmis non nimis breviora, pilis patentibus adspersa. Paniculae strictae, angustae spiculae 5—9, plerumque distantes.

Conf. *Poa bromoides Vahl.* R. et S. II. p. 564.

Eragrostis glareosa. Paniculae jubalis, demum patentis, lucidae radiis solitariis binisve, a basi compositis, axillis nudis; Spiculis pedicello pl. min. aequilongis, ovato-linearibus, 8—10-floris; Flosculis ovatis, acutiusculis, pl. min. obsolete nervosis: valv. sup. subaequilonga, obsolete denticulata; Foliis distichis, compresso-planis, rigidis, pungentibus, hirsutissimis; Ligula ciliari.

V. spp. Bras. (in glareosis, Barra do Jiquitiba).

Digitalis vel ultrapalmaris, erecta, basi confertissime distiche foliosa: foliis sensim longioribus, circiter pollicaribus, patentibus, lineari-lanceolatis, acuminatis. Panicula dimidiam culmi partem occupat, strictiuscula, ovata.

Eragrostis polytricha N. ab Es.! Agr. bras. p. 507. Paniculae patentis strictiusculae radiis (pseudo-) verticillatis (superioribus sparsis), axillis barbatis; Spiculis pedicello aequilongis l. eodem longioribus, ovatis, sub-3-floris; Flosculis ovatis, acutiusculis, obsolete nervosis: valv. sup. subaequilonga, brevissime serrulata; Foliis planis, rigidiusculis, tomentoso-hirsutis; Ligula brevissima, subcallosa.

V. sp. Bras.

(Descr. optimam v. ap. Neesium l. l.).

Eragrostis seminuda. Paniculae patentissimae, subpauciflorae radiis ternis, semiverticillatis, longe supra basin parce compositis, axillis nudis; Spiculis pedicello

aequilongis vel brevioribus, ovatis, 4 — 5-floris; Flosculis ovatis, subacuminatis, obsolete nervosis: valv. (inferiore, praesertim flosculorum superiorum, margine ciliata), superiore paulo breviori, serrulata; Foliis subinvolutis, hirtis; Ligula obsoleta.

V. spp. Bras. (Sto Paulo).

Sesquipedalis, erecta, culmo satis tenui, simplici. Folia erecta, rigidula, angustissima, pilis brevissimis densis patentibus hirta: radicalia culmo dimidio breviora. Panicula dodrante longior, patentissimo-ovata, radiis inferioribus horizontalibus spithamaeis. Spiculae sesquilineales.

Eragrostis airoides N. ab Es. Agr. Bras. p. 509. Paniculae elongatae patentis lucidae radiis semiverticillatis, satis longe supra basin compositis, axillis nudis; Spiculis pedicello brevioribus, oblongis, sub- 2-floris; Flosculis ovatis, acutis, obsolete nervosis: valv. sup. aequilonga, brevissime serrulata; Foliis involutis, glabris; Ligula ciliari, barbulata.

Aira brasiliensis Raddi Agr. Bras. p. 36.

V. spp. Bras.

Eragrostis pilosa Pal. Paniculae patulae, lucidae radiis pluribus semiverticillatis solitariisque, pl. min. longe supra basin compositis: inferioribus axillis barbatis; Spiculis pedicello subaequilongis vel paulo longioribus, elliptico-linearibus, 5 — 7-pluri-floris; Flosculis ovatis, acutiusculis, nunc obsoletius nunc distinctius nervosis: valv. sup. parum breviori, pl. min. evidenter serrulata; Foliis planis involutisve, glabris; Ligula ciliari, barbata.

Eragrostis pilosa. R. et S. II. p. 575.

Poa pilosa. L. sp. pl. ed. 1.

Poa mexicana Lag. R. et S. II. p. 551. (*Eragrostis mexicana, Link*).

Poa cilianensis All. R. et S. II. p. 556.

Poa verticillata Cav. (*Eragr. verticill. R. et S.* II. p. 575.)

Poa patula Kunth.? (sub *Megastachya R. et S.* II. p. 585.)

V. spp. Hisp. Gall. Helv. Germ. Sic. Aegypt. Ross. austr. Cauc. Alt. Philad. Mex. Chil. Bras.

Obs. Poa chinensis hortul. quam cel. LINK cum *Er. verticillata* conjungit, differt tamen: axillis nudis, pedicellis plerumque spicula longioribus, flosculis lanceolato-ovatis, ligula eberbi.

Eragrostis capillaris N. ab Es. Agr. Bras. p. 505. Paniculae (superne) patentis, lucidae, capillaris radiis verticillatis sparsisve, fere a basi compositis, axillis nudis; Pedicellis pl. min. elongatis; Spiculis oblongis, 2 — 5-floris; Flosculis ovatis, pl. min. acutis, obsolete nervosis: valv. sup. paulo breviori, serrulata; Foliis angustis, planis, basin versus supra villosis; Ligula ciliari, pl. min. barbata.

Poa capillaris L. sp. pl. ed. 1. (nec ed. 2.) R. et S. II. p. 552. Mant. 2. p. 306.

V. spp. Canad.

Eragrostis polymorpha R. et S. II. p. 575. Paniculae patulae, lucidae radiis solitariis, a basi compositis, axillis nudis; Pedicellis aliis spicula brevioribus, aliis eadem longioribus; Spiculis ovatis (pectinato-flosculosis) 10 — 20-floris; Flosculis ovatis, acutiusculis, distincte nervosis: valv. sup. subaequilonga, acute serrata; Foliis angustis, planis vel subinvolutis, glabris; Ligula ciliari, barbulata.

Poa polymorpha Willd.

V. spp. Ind. or. Manil.

Obs. Spiculis ob flosculos imbricatissimos eleganter pectinatis vel eminus distinguitur.

Eragrostis lugens N. ab Es. Agr. Bras. p. 505. Paniculae patulae radiis semiverticillatis, superioribus solitariis binisve, subcapillaribus, longe supra basin compositis, ad ramificationes omnes barbatis; Pedicellis elongatis; Spiculis lineari-ellipticis, 4 — 7-floris; Flosculis ovatis, acutiusculis, obsolete nervosis: valv. sup. aequilonga, brevissime serrulata; Foliis angustissimis, patentissime et lucide pilosis; Ligula obsoleta.

V. spp. Bras. Chil.

Eragrostis purpurascens N. ab Es. Agr. Bras. p. 506. Jubae patentis lucidissimae, sparsiflorae, radiis binis solitariisque, subcapillaribus, a basi vel non longe supra basin compositis, axillis nudis; Pedicellis longissimis; Spiculis angustissimis, 5— 7-floris; Flosculis ovatis, acutis, distincte nervosis: valv. sup. aequilonga, serrulata; Foliis linearibus involutisque, strictis, glabris (praelongis); Ligula ciliari, subeberbi.

Poa megapotamica Spr. in sched.

V. spp. Brasil.

Tripedalis. Radii non semper scabri: radioli potius.

** Perianthiis pl. min. ellipticis l. lanceolatis *).

Eragrostis hapalantha. Paniculae (subjubalis) lineari-elongatae, densiusculae radiis binis solitariisque, a basi compositis et floriferis, axillis nudis; Spiculis brevissime pedicellatis, elliptico-linearibus, 5— 12-floris; Flosculis ovato-ellipticis, acutiusculis obtusiusculisve, obsolete nervosis (minimis): valv. sup. subaequilonga, laevi; Foliis linearibus, planis, glabris; Ligula obsoleta, imberbi, lateribus subcallosis.

Poa interrupta LaM. et *Roth.* R. et S. II. p. 565. Mant. 2. p. 213. (non *Brownii*).

V. spp. Ind. or. Manil. Bras. (ad flum. Parana in arenosis).

Obs. Valvula superior mihi semper nuda visa est. Culmus interdum late reptans. — In *hbio cel.* HORNEMANNI eandem speciem s. n. *Poae diandrae* a WALLICHIO determinatam vidi.

Eragrostis conferta. Paniculae (terminalis ramorumque) subjubalis, contractae, densiusculae radiis solitariis pluribusque a basi vel prope a basi compositis, axillis nudis; Spiculis pedicello aequilongis vel longioribus, elliptico-linearibus (subdiaphano-membranaceis), 7— 11-floris; Flosculis ovato-lanceolatis, acu-

*) Species in hac subdivisione enumeratae sunt secundum formam perianthiorum, progrediendo ad ovato-ellipticis ad lanceolata.

tiusculis, distincte nervosis (perparvis): valv. sup. parum breviori, serrulata; Foliis linearibus, planis, glabris; Ligula membranacea, brevissima, imberbi.

Poa conferta Ell. Schult. Mant. 2. p. 311.

V. sp. Am. bor.

Pedalis et ultra, tota glabra, erecto-ramosa, ramis omnibus paniculiferis, radicalibus saepe brevissimis. Culmus geniculato-procumbens. — Similis *hapalanthae*, sed minor.

Eragrostis aegyptiaca Link. Paniculae contractae (cultae patulae) radiis semiverticillatis, a basi subracemoso-compositis et floriferis, axillis nudis; Spiculis subsessilibus vel brevipedicellatis, linearibus, (subdiaphano-membranaceis), 9—15-floris; Flosculis ovato-lanceolatis, acutiusculis, distincte nervosis: valv. sup. tertiam partem breviori, apicem versus serrulata; Foliis angustissimis, subinvolutis, glabris; Ligula ciliari, barbata.

Poa aegyptiaca Willd. R. et S. II. p. 566.

V. spp. Aegypt. Ross. merid.

Eragrostis reptans N. ab Es. Agr. Bras. p. 514. Paniculae jubalis (parvae) subglomeratae radiis brevibus, solitariis binisve, a basi subcompositis et floriferis, axillis nudis; Spiculis subsessilibus vel brevissime pedicellatis, linearibus l. lineari-ellipticis, 10—40-floris; Flosculis ovato-lanceolatis, acutis, distincte nervosis: valv. sup. quartam tertiamve partem breviori, serrulata; Foliis brevibus, subinvolutis planisve; Ligula obsoleta, barbulata.

Megastachya reptans et *hypnoides Pal.* R. et S. II. p. 589.

Poa reptans Mchx.

Poa hypnoides LaM.

Poa carinata Poir.? R. et S. II. p. 565.

Poa Weigeltiana Reichenb. hb.

V. spp. Am. bor. Surin. Bras.

Obs. Culmum et folia, pubescentia in planta boreali-Americana, glabra in Brasilianis speciminibus.

Eragrostis parviflora. Paniculae subelongatae, patulae, lucidae, nutantis radiis semiverticillatis, racemiformibus, a basi aut prope a basi compositis, dissite floriferis, axillis nudis; Spiculis pedicello adpresso aequilongis l. brevioribus, linearibus, 8 — 12-floris; Flosculis ovato-lanceolatis, acutiusculis, subobsolete nervosis: valv. sup. tertiam partem breviori, apicem versus serrulata; Foliis planis l. planiusculis, glabris; Ligula ciliari, eberbi.

Poa parviflora Br. R. et S. II. p. 573.

Sieb. Agrostoth. n° 79.

V. spp. nov. Holl.

Sesquipedalis, basi erecto-ramosa.

Eragrostis abessinica Link. Paniculae laxae, capillaris radiis verticillatis, binis solitariisque, superne compositis, axillis barbatis; Pedicellis elongatis; Spiculis lineari-ovatis, 4 — 5-floris; Flosculis ovato-lanceolatis, acutis, distincte nervosis: valv. sup. dimidio breviori, serrulato-scabra; Foliis planis, glabris; Ligula membranacea, brevissima, barbulata.

Poa abyssinica Jcq. R. et S. II. p. 551.

V. cc.

Obs. Quam s. n. *Poae indicae* (e Guadeloupe) accepi, huic simillima, differt valvula superiori inferiore parum tantum breviori.

Eragrostis acutiflora N. ab Es.! Agr. bras. p. 501. Paniculae contractae, strictiusculae radiis solitariis, fere a basi divisis, axillis barbulatis; Spiculis pedicello longioribus, lanceolatis, 7 — 10-floris; Flosculis ovato-lanceolatis, acutissimis, distinctiuscule nervosis: valv. sup. parum breviori, serrulata; Foliis planis, strictis, glabris; Ligula brevissima, ciliari, barbulata.

Poa acutiflora Kth.

Megastachya acutiflora R. et S. II. p. 588.

V. sp. Bras.

Eragrostis elegans N. ab Es. Agr. bras. p. 608. Paniculae contractiusculae, elongatae radiis solitariis, binis aut pseudofasciculatis, plerumque fere a basi divi-

sis, axillis nudis; Spiculis pedicello plerumque longioribus, sublinearibus, 6—9-floris; Flosculis lineari-ellipticis, obtusis, distincte nervosis (minimis); valv. sup. parum breviori, subserrulata; Foliis latiusculo-planis, flaccidulis, glabris; Ligula membranacea, brevissima.

Eragrostis brasiliana N. ab Es. Agr. bras. p. 510. (an Syn. SPRENGELII, cui folia *convoluta* dicuntur?)

V. sp. Bras.

Eragrostis sclerophylla. Paniculae jubalis, strictae, patulae, lucidae radiis binis ternisve subverticillatis, mox supra basin compositis, dissitifloris, axillis obsolete barbatis; Spiculis pedicello pl. min. brevioribus, oblongo-ovatis, sub- 7-floris; Flosculis (coriaceo-membranaceis) lanceolatis, obtusiusculis, distincte-nervosis: valv. sup. fere tertiam partem breviori, laevi; Foliis subinvolutis, rigidis, glabris; Ligula ciliari, parce barbulata.

V. spp. Brasil. (ad rivulum Jiquitinonha).

Tripedalis et ultra, stricto-erecta, glabra, culmo scabriusculo. Folia pedalia, sensim breviora, supremum perbreve. Panicula quasi obovata, dodrantalis, fuscescens.

Eragrostis Diomedearum. Jubae thyrsodis densissimae, lanceolato-elongatae radiis brevissimis fasciculatis, a basi floriferis, axillis pubescentibus; Spiculis sessilibus, linearibus, 10— 20-floris; Flosculis lanceolatis, acutis, distinctiuscule nervosis, obsolete pubescentibus: valv. sup. paulo breviori, pubescendo-serrulata; Foliis margine involutis, strictissimis; Ligula ciliari, eberbi.

V. spp. ex Albatros-eiland.

Bipedalis et altior, strictissima, inferne adpresso-ramosa. Folia coriacea, sensim longiora, suprema jubam aequantia. Juba s. thyrsus strictissimus, pedalis, angusto-lanceolatus, acuminatus, aut basi tantum aut totus subinterruptus, e flavescente fuscescens.

Eragrostis wahowensis. Paniculae s. Jubae densissimae radiis verticillatis solitariisque, simpliciusculis, a basi l. prope a basi floriferis, axillis barbatis; Spiculis

subsessilibus l. brevissime pedicellatis, elliptico-linearibus, 7— 15-floris, Flosculis lanceolatis (interdum caudulato-mucronatis), distincte nervosis: valv. sup. parum breviori, serrulata; Foliis involutis, subulato-attenuatis (longissimis); Ligula ciliari, barbata.

V. spp. ex Ins. Wahu.

3— 4-pedalis, glabra, erecta. Folia jubam aequantia l. superantia. Juba oblongo-lanceolata, densissima, e flavo fuscescens, spithamaea—ultrapedalis, longior basi interrupta.

Obs. Videtur affinis *Pois aturensi et acutiflorae Kunth.*

Eragrostis equitans. Paniculae jubalis lineari-elongatae, strictae radiis solitariis fasciculatisve, a basi l. prope a basi subracemiformi-compositis et floriferis, axillis villosis nudisve; Spiculis subsessilibus, oblongis, sub 3-floris; Flosculis lanceolatis (glumisque) acutissimis, distinctiuscule nervosis, superne valvulaque superiori pl. min. breviori serrulatis; Foliis involutis planisve, rigidis; Ligula ciliari, barbata.

V. spp. ex Ins. Wahu.

Pedalis et ultra, stricto-erecta. Folia radicalia dense distiche vel subunilateraliter imbricata. Culmus simplex. Panicula lineari-lanceolata, spithamaea, fuscescens.

β) Spuriae: (rhachi saepius solubili) valvula superiori una cum inferiore cedente.

Eragrostis collina. Paniculae pl. min. strictae radiis subverticillatis, superne compositis, axillis nudis; Spiculis brevi- et subadpresso-pedicellatis, oblongis, 2— 5-floris; Flosculis lineari-oblongis, acutiusculis, obsolete nervosis, nudis: valv. sup. subaequilonga, laeviuscula; Foliis planis subcoriaceis; Ligula ciliari, eberbi.

Aira arundinacea L. sp. pl. ed. 1? *M. Bieb.* Fl. TC.!

Poa tatarica hb. Gorenk.!

V. spp. Cauc. Pers.

Eragrostis Tricuspis. Paniculae (Jubae) patulae l. patentis radiis solitariis binisve, superne compositis, axillis subbarbatis; Spiculis pl. min. brevi-(adpresso) pedicellatis, lineari-ellipticis, sub- 7-floris; Flosculis elliptico-lanceolatis, tricuspidatis, distincte nervosis, basi, dorso nervisque pilosis; valv. sup. parum breviori, superne brevissime serrulata; Foliis compressis; Ligula ciliari, barbulata.

Tridens quinquefida R. et S. II. p. 599.

Poa quinquefida Pursh.

Poa seslerioides Mchx.

Poa arundinacea Poir.

Triodia cuprea Jcq.

Tricuspis caroliniana Pal.

Windsoria poaeformis Nutt.

V. spp. Am. bor.

Eragrostis Calotheca. Paniculae laxae, nutantis radiis binis ternisve, pl. min. longe supra basin (subracemoso-) compositis, axillis nudis; Spiculis aliis pedicello paulo brevioribus, aliis longioribus, subadpressis, ovatis, sub- 5-floris (sub anthesi subrotundo-squarrosis); Flosculis lato-ovatis, mucronato-acutis, subobsolete nervosis: valv. sup. tertiam partem breviori, pubescendo-serrulata; Foliis subinvolutis, rigidiusculis, sursum asperis; Ligula membranacea, exserta, eberbi.

V. spp. Bras. (Sto Paulo, in fruticetis humidis prope Jundiahy.)

Habitu et ligula *Brizae* affinis, tamen ob perianthii valv. inf. 3 nervem, superiorem plicato-compressam rhachinque solidam vera Eragrostis.

Culmus circiter 4-pedalis, simplex, 3-nodis. Vaginae praelongae, sursum scabrae. Folia inferiora fere bipedalia, plana vel siccitate involuta, sursum scabra. Ligulae subbifidae, obtusae. Panicula dodrantalis, pedalis, lucidissima, laxa, pallide viridis. Flosculi e nervo carinali brevissime cuspidati.

b) Racemus, simplex vel compositus.

Eragrostis coromandelina. Racemi simplicissimi spiculis sessilibus, bifariam alternis, secundis, elliptico-linearibus ovatisque, 10— 30-floris; Flosculis ovatis, distincte nervosis: valvula superiori aequilonga, laevi; Foliis planiusculis glabris; Ligula ciliari, eberbi.

Poa coromandeliana Koen. (auct. SWARTZII) et *Roth.* R. et S. II. p. 564. Mant. 2. p. 312.

Poa bifaria Vahl. R. et S. II. p. 563.

V. spp. Ind. or.

Spiculae excavationibus axis pl. min. manifestis margine impressae.

Eragrostis nardoides. Racemi simplicissimi spiculis sessilibus, subuniseriatim alternis, secundis, elliptico-linearibus, 6— 8-floris; Flosculis ovatis, subobsolete nervosis: valv. sup. parum breviori, tenere serrulata; Foliis filiformibus pilosis; Ligula ciliari, parce barbata.

V. spp. Nepal.

Pedalis et ultra. Radix densissime fibrosa. Culmi caespitosi, filiformes, subgeniculati. Folia pilis rariusculis ciliata. Racemus spithamaeus, pertenuis. Spiculae dissitae, circiter sesquilineales, fuscae, axi hinc leviter excavato margine incumbentes.

Eragrostis cynosuroides Pal. Racemi compositi (Thyrsi) lineari-elongati, densi radiis sparsis, racemosis, a basi dense floriferis; Spiculis sessilibus, ovatis, sub-9-floris; Flosculis lanceolato-ovatis, distinctiuscule nervosis: valv. sup. subaequilonga, serrulata; Foliis linearibus, planis; Ligula ciliari, eberbi.

Eragrostis cynosuroides. R. et S. II. p. 577.

Briza bipinnata L. S. N.

Uniola bipinnata L. sp. pl. ed. 2.

Poa cynosuroides Retz.!

V. spp. Aegypt. Ind. or.

Eragrostis spinosa. Racemi compositi racemulis horizontalibus dissitis; Spiculis in axibus partialibus complanatis biseriatim alternis, brevipedicellatis, dissitiusculis, 7 — 9-floris; Flosculis ovato-ellipticis, obtusis, distincte nervosis: valv. sup. parum breviori, serrulato-scabra. Foliis brevissimis, pungentibus, glabris; Ligula ciliari, eberbi.

Poa spinosa Thbg. R. et S. II. p. 561.

Festuca spinosa L. sppl.

V. spp. Cbsp.

Basi prostrata. Racemus dodrantalis. Axes racemulorum inferiores bipollicares, superne sensim breviores et brevissimi, complanati, apice nudo pungentes. Spiculae refractae, deciduae, pedicellis persistentibus. Perianthii valvula inferior convexa. — Aegre Eragrostidis neque vero majori jure ulli alii generi associatur.

DESCRIPTION THÉORIQUE

D'UN

ALKOOMÈTRE

ADAPTÉ AUX EAUX-DE-VIE NORMALES DE RUSSIE;

PAR

M. PARROT.

Avec une Planche.

(Lu le 10 Octobre 1827.)

Notices préliminaires.

Au commencement de Septembre 1826, l'Académie reçut par le canal du Ministre de l'Instruction publique l'ordre impérial de faire un rapport sur l'alkoomètre de M. GAY-LUSSAC, que ce Physicien célèbre avait présenté à Sa Majesté Impériale, apparemment dans le dessein que cet instrument fût introduit en Russie. La chambre des finances de Pétersbourg, qui avait reçu précédemment le même ordre, avait répondu que l'alkoomètre de M. GAY-LUSSAC était d'un usage trop compliqué pour les personnes chargées en Russie de la recette et de la vente des eaux-de-vie et esprits.

Je fus chargé, conjointement avec MM. les Académiciens PETROFF et COLLINS, de l'examen de cet alkoomètre, et du rapport à faire. Voici les propres termes de ce rapport.

Nous soussignés, nommés par l'Académie impériale des sciences à sa conférence du 11 du mois courant pour examiner par ordre de S. E. M. le Ministre de l'in-

struction publique l'alkoomètre de M. GAY-LUSSAC relativement à son emploi en Russie, avons l'honneur de faire le rapport suivant:

L'idée d'employer l'aréomètre à fixer les degrés de force des eaux-de-vie ou d'un mélange d'eau pure et d'alkool a été travaillée depuis longtems par plusieurs Physiciens étrangers à la France, tels que DESAGUILLERS, RAMSDEN, GILPIN et ATKINS en Angleterre, RICHTER, ROSE et TRALLES en Allemagne, LOWITZ en Russie etc.

L'idée fondamentale qui sert de base à tous ces travaux, est une table qui contient dans une colonne les proportions de mélange d'eau et d'alkool, et dans l'autre la pesanteur spécifique de chacun de ces mélanges, en sorte que, lorsqu'on trouve par une aréomètre quelconque, propre à cet effet, la pesanteur spécifique d'une eau-de-vie, le nombre de la première colonne, correspondant à cette pesanteur spécifique, indique les p.C. d'alkool qu'elle contient, et en fixe par conséquent la qualité.

Mais ces tables ne sont vraies et applicables qu'en tant que l'essai se fait sous la température normale qui a été admise pour les expériences qui ont fourni la table. Sous toute autre température elles cessent de l'être, parce qu'une chaleur moindre ou plus grande condense ou dilate le liquide, et cela plus ou moins pour différentes proportions du mélange, qui paraît par là de moindre ou de meilleure qualité.

Une seconde considération force encore à consulter le thermomètre relativement au volume total diminué ou augmenté par les différences de température, qui font qu'une masse d'eau-de-vie paraît être plus petite ou plus grande qu'elle n'est en effet; ce qui produit une erreur sur le nombre de mesures qui se vendent ou s'achètent.

L'on a employé divers moyens pour tenir compte de ces irrégularités causées par les variations de température. M. GAY-LUSSAC a choisi celle de réduire toutes ces données variables en tables qui dispensent des calculs, et à cet égard il n'est pas douteux qu'il n'ait rendu service à son pays, d'autant plus qu'auparavant, on se servait en France des alkoomètres défectueux de BAUMÉ et de CARTIER. Peut-être a-t-il aussi le mérite d'avoir fait une nouvelle suite d'expériences qui certainement

ne le céderont à aucune autre en fait d'exactitude. Au reste la description qui accompagne l'instrument n'en fait pas mention.

Malgré les avantages que cette méthode semble offrir, les commissaires ci-dessous nommés croient néanmoins ne pouvoir en conseiller l'introduction en Russie, par les considérations suivantes.

1) L'emploi des tables est un peu compliqué et paraîtra sûrement difficile aux personnes peu instruites qui devront en faire usage. Ces tables d'ailleurs ne sont pas calquées sur les eaux-de-vie normales de la Couronne, dont les forces réelles se trouveront vraisemblablement exprimées en fractions.

2) Ces tables s'étendent, quant à la force, jusqu'à 15 degrés au-dessus et au-dessous de la température normale de 15 degrés centigrades, ou 12 degrés de Réaumur, et leur seconde moitié est superflue, parce que l'on trouve partout (au moins en Russie) une chambre dont la température est au moins à 12° R.

3) Quant à la variation du volume total par la température relativement à la vraie quantité de l'eau-de-vie vendue ou achetée, l'étendue de la table est insuffisante, en ce qu'elle ne descend que jusqu'à zéro ou le terme de la congélation de l'eau; car la Couronne achète les eaux-de-vie souvent en hiver sous la température de 15° à 20° R. au-dessous de zéro, sans pouvoir donner une autre température à ces grandes masses pour les mesurer.

4) Le Barême centésimal, tables qui font environ le tiers de l'ouvrage et dont le but est d'épargner des multiplications et des divisions, paraît être en Russie entièrement superflu, en ce que les plus ignares des employés de la Couronne et des marchands peuvent faire ces calculs par le moyen de leur machine arithmétique avec la plus grande facilité et sûreté.

5) La comparaison des indications de l'alkoomètre de M. Gay-Lussac à celles de Cartier est absolument inutile en Russie, où l'on ne s'est jamais servi de l'instrument de Cartier.

6) L'Aréomètre de M. Gay-Lussac et ses tables sont construits sur les expériences faites avec de l'eau-de-vie de France. Celles de grains en diffèrent par une

*

certaine quantité d'huile empyreumatique qui lui donne le goût et l'odeur désagréables que les Allemands nomment *Fusel.* Il n'est pas invraisemblable que cette troisième substance ne produise dans le mélange de l'eau et de l'Alkool une autre proportion de condensation que dans les eaux-de-vie pures, proportion sur laquelle se fonde la construction de l'alkoomètre et des tables. Au moins est-il prouvé par l'expérience qu'une eau-de-vie éprouvée de la manière usitée en Russie, par inflammation, paraît de 2, 3 et même 4 p.C. plus faible ou plus forte selon qu'elle contient plus ou moins de cette huile.

7) Enfin l'introduction de cet instrument rendrait la Russie dépendante de l'artiste de Paris à qui sa confection est confiée et que notre Gouvernement ne pourrait guères rendre responsable, s'il se permettait, dans la vue de s'épargner de la peine et du tems, de livrer des instrumens peu exacts.

Malgré l'opinion émise ci-dessus, les soussignés sont d'avis qu'il est très à désirer que notre Gouvernement se décide enfin à substituer les alkoomètres, mais construits sur la nature de nos eaux-de-vie et sur nos besoins, à la méthode vicieuse qui est en usage et se prête à des erreurs et des fraudes dont l'énumération ne peut être que fastidieuse. Ils croient même qu'à cet égard M. GAY-LUSSAC, en soumettant son alkoomètre à Sa Majesté impériale, a bien mérité de la Russie.

St.-Pétersbourg ce 18 Octobre 1826.

(Signé) BASILE PÉTROW,
ED. COLLINS,
PARROT, rédacteur.

L'on voit par ce rapport, adopté par l'Académie, que l'opinion de la chambre des finances de Pétersbourg est confirmée et qu'en outre la qualité des eaux-de-vie et esprits de grains, les seuls que l'on confectionnait alors en Russie, s'oppose à l'introduction de l'alkoomètre en question, qui n'est applicable qu'aux liqueurs spiritueuses extraites du jus de raisin, exemptes de l'huile de Fusel et nommées ordinairement eaux-de-vie de France.

Lorsque, conjointement avec mes collégues, j'émis cette opinion, je ne connaissais pas encore le travail de M. HENSMANNS sur les eaux-de-vie relativement au Fusel, sans quoi il eut été mentionné dans le rapport. Je ne connaissais les effets de cette huile que par les expériences non publiées de M. AUGUSTE DE SIVERS, gentilhomme livonien, propriétaire de plusieurs terres et le distillateur le plus instruit que j'aie connu. Ce n'est que quelques mois après la présentation de ce rapport que je trouvai l'annonce du travail de M. HENSMANNS, que je fis venir sur le champ.

Cet examen de l'alkoomètre de M. GAY-LUSSAC et le besoin d'un alkoomètre adapté aux besoins de la Russie et généralement désiré, me conduisit à l'invention de l'alkoomètre dont je livre ici la théorie fondée sur un nouveau principe alkoométrique, et je me fais un vrai plaisir de déclarer que le beau travail de M. GAY-LUSSAC m'a été d'un grand secours, travail dont on ne peut apprécier tout le mérite que lorsqu'on a traité le même sujet.

Celui que je livre n'est rien moins que terminé et je l'ai déclaré dans un mémoire présenté à l'Académie le 26 Décembre 1827; il indique les principaux travaux encore à faire et les motifs qui m'ont empêché de continuer. On les trouvera la plupart indiqués dans cette *description théorique*, que je prie de n'envisager que comme la méthode selon les principes de laquelle je crois qu'on doit construire les alkoomètres pour la Russie.

J'avais joint à cette description une *Instruction pratique* pour faire voir de quelle facilité et simplicité est l'usage de l'alkoomètre que je propose. Il suffit d'en énoncer ici le contenu, son impression ne pouvaut être d'aucune utilité réelle.

Pour mettre la plus grande clarté dans l'énoncé des règles pratiques j'ai disséqué le problème général en 8 problèmes particuliers:

I. Une liqueur étant donnée, l'on veut savoir si elle a la force normale ou non.

II. Trouver combien il faut mêler d'eau à une liqueur trop forte ou d'esprit N°. 4 à une liqueur trop faible pour en faire une liqueur normale.

III. Abaisser un esprit N°. 4 trop fort à la force normale.

IV. Faire du N°. 2, et du N°. 3 avec du N°. 4 et de l'eau.

V. Trouver la diminution de volume qui a lieu, lorsqu'on mêle une liqueur spiritueuse avec de l'eau.

VI. Trouver les variations de volume causées par la température dans les masses des liqueurs spiritueuses, afin de fixer la vraie quantité livrée, rapportée à la température de 12° R.

VII. Une liqueur spiritueuse est donnée, à laquelle on doit mêler une certaine quantité d'eau. Mais on ne peut donner ni à la liqueur ni à l'eau la température normale de 12°. L'on demande quelle sera la quantité d'eau à mêler à la liqueur sans changer les températures de l'une ou de l'autre.

VIII. Trouver les p. C. d'alkool contenus dans chacune des liqueurs sur lesquelles on travaille.

Le premier de ces problèmes n'exige aucune table; il suffit de la simple inspection de l'alkoomètre pour le résoudre.

Le second exige une petite table composée de 9 colonnes et de 21 lignes, qui comprend les résultats cherchés.

Le troisième exige une table de 2 colonnes et de 21 lignes.

Le quatrième exige une table de 2 colonnes et de 3 lignes.

Le cinquième exige une table de 8 colonnes et de 12 lignes.

Le sixième exige une table de 8 colonnes et de 48 lignes.

Le septième n'exige aucune table particulière.

Le huitième exige une table de 12 colonnes et de 12 lignes, plus une table de 24 colonnes et de 3 lignes.

Ainsi toutes les tables de ce système alkoométrique ensemble ne contiennent pas plus de 741 nombres. Elles sont annexées chacune immédiatement à la solution du problème auquel elle appartient, de sorte qu'on a la plus grande facilité et sûreté dans la recherche des nombres désirés.

Elles sont calculées pour 100 Wédros (mesure du pays) et livrent les résultats pour tous les cas, y compris les dixièmes de degré.

Lorsqu'on n'a pas précisément 100 Wédros à livrer ou à recevoir, mais plus ou moins, il faut faire un petit calcul. Or comme les fractions sont exprimées en décimales, j'ai mis en tête de cette *Instruction pratique* une courte instruction sur les trois premières règles du calcul décimal, la division n'étant pas nécessaire. Le Russe, accoutumé au calcul centésimal pour les roubles et copecs, se fera très facilement à ce calcul. En outre il a été ajouté à la solution générale de chaque problème un, deux ou trois exemples qui ne laissent aucun doute sur la manière d'employer les règles et les tables et faire les petits calculs nécessaires.

Le nombre des pages de toute l'*instruction pratique* y compris les tables ne fait que la moitié du nombre de celles de cette *description théorique;* ce qui donne une idée de la facilité avec laquelle les employés, les marchands et les distillateurs s'initieront dans l'usage de cet alkoomètre.

Je ne puis terminer ces notices préliminaires sans ajouter que j'avais prié l'Académie de nommer trois commissaires pour examiner mon travail, que ces trois commissaires furent MM. les Académiciens WISNIEWSKY, COLLINS et FUSS, et que je dois à leur amitié quelques observations utiles dont j'ai fait usage avec plaisir et reconnaissance.

M. GAY-LUSSAC ayant témoigné publiquement le désir de connaître ce travail alkoométrique, l'Académie se fera un plaisir d'en envoyer un exemplaire à ce célèbre Savant.

Le premier pas à faire pour bien résoudre un problème, c'est de l'énoncer avec précision. Le but de notre Alkoomètre est de mettre les personnes qui vendent et qui achètent les eaux-de-vie et esprits à même de faire avec facilité et sûreté toutes les opérations qui concernent ce commerce avec les espèces d'eaux-de-vie et d'esprits dont le Gouvernement a fixé la force normale. Ce problème général se résoud en cinq problèmes particuliers:

1) Indiquer si l'eau-de-vie et l'esprit présentés en vente ont la force normale de l'espèce ou non, en tenant compte des variations aréométriques causées par la température.

2) Déterminer de combien l'eau-de-vie ou l'esprit présenté est au-dessus ou au-dessous de la force normale qu'il doit avoir.

3) Fixer la quantité d'eau ou d'un esprit plus fort pour ammener à la force normale une eau-de-vie ou un esprit qui ne l'a pas.

4) Déterminer la contraction qui a lieu par les mélanges, pour savoir combien ils produisent de mesures.

5) Fixer les variations de volume que cause la température dans la masse des eaux-de-vie et esprits, au moment de leur mesure, pour fixer la vraie quantité livrée, rapportée à une température normale.

Le système adopté ordinairement pour la construction des Alkoomètres s'étend à tous les cas pour la plupart des problèmes particuliers qui viennent d'être énoncés. Il en résulte des tables volumineuses, qui n'épargnent pas même tous les calculs, et le praticien ne s'initie que difficilement dans les opérations qu'il a à faire. C'est ce que le Gouvernement a senti à l'occasion de l'Alkoomètre de Mr. Gay-Lussac.

J'ai préféré, pour cause de simplicité et d'exactitude, restreindre le problème général aux cas qui ont lieu dans la pratique en Russie pour ne pas offusquer les praticiens de trop de règles et de calculs.

Comme la température joue un grand rôle dans toutes les opérations alkoométriques, je l'ai prise pour base de la division de l'instrument et calqué le reste sur cette division. Ce principe fournit, toutes choses d'ailleurs égales, l'avantage d'obtenir pour tous les cas de pratique des divisions de plus de moitié plus grandes que si l'on avait exprimé immédiatement sur l'échelle les pour Cent d'Alkool. Les fautes d'observation diminuent de grandeur dans la même proportion.

Notre Gouvernement a admis comme objets de commerce quatre liqueurs spiritueuses, deux espèces d'eau-de-vie, et deux espèces d'esprit. Nous désignerons ces quatre liqueurs (en commençant par la plus faible) par N°. 1, N°. 2, N°. 3 et N°. 4.

S. E. Monsieur le Ministre des finances a fourni à l'Académie des échantillons de ces quatre espèces et plusieurs bouteilles de chacune. J'ai commencé par faire l'épreuve de trois bouteilles de chaque espèce à la balance aréostatique, sous la température de + 12° R., que le Gouvernement a admise comme normale, et trouvé les pesanteurs spécifiques suivantes:

	N°. 1	N°. 2	N°. 3	N°. 4
	0, 95557	0, 94139	0, 91879	0, 88095
	0, 95538	0, 94182	0, 91868	0, 87968
	0, 95535	0, 94139	0, 91835	0, 87962
Moyennes	0, 95543	0, 94153	0, 91872	0, 88008.

Une quatrième bouteille de N°. 3, qui avait un signe à part, s'est trouvée de la pesanteur 0, 91888.

Mises à l'épreuve de l'Alkoomètre de GAY-LUSSAC, à la température de + 15° C. ou 12° R., ces bouteilles ont fourni en p.C. d'alkool:

	N°. 1	N°. 2	N°. 3	N°. 4
	37, 5	46, 0	57, 5	73, 8
	37, 5	45, 9	57, 3	73, 8
	37, 5	46, 0	57, 5	73, 9
Moyennes	37, 5	45, 96	57, 43	73, 83.

Ces différences dans les résultats, quoique petites, m'ont engagé à mélanger les échantillons de chaque espèce, et de regarder les liqueurs résultantes comme ayant la force normale. Du reste, il dépend du Gouvernement de fixer cette force normale comme il le jugera à propos; cela ne fait rien à la théorie de l'instrument que j'ai l'honneur d'offrir à l'Académie. J'ai mis ces quatre mélanges à l'épreuve de la balance aréostatique et de l'Alkoomètre de GAY-LUSSAC, à la température de + 12° R. et j'ai trouvé:

	N°. 1	N°. 2	N°. 3	N°. 4
Pesanteur spécifique	0, 95529	0, 94171	0, 91893	0, 88414
p.C. d'alkool	37, 6	45, 8	57, 4	73, 1.

Notre Alkoomètre a pour chacune de ces liqueurs une échelle à part, la tige de l'instrument étant par cette raison carrée. Commençons par la construction de ces échelles.

Théorie de l'échelle thermo-aréométrique.

Soit le volume de l'instrument plongé jusque en a (Fig. 1), où commence l'échelle, $= P$; les volumes, lorsque l'instrument plonge jusqu'en b, c, d, e etc. $=$ P_{I}, P_{II}, P_{III}, P_{IV}, etc.

La condition aréométrique du problème étant que chaque division exprime une égale partie aliquote du volume plongé, on a $ab = \frac{1}{n} bp$, $bc = \frac{1}{n} cp$, $cd = \frac{1}{n} dp$, etc. Les volumes variables seront donc:

$$\left.\begin{aligned}
P &= P \\
P_{I} &= P + \tfrac{1}{n} P = \tfrac{n+1}{n} \cdot P \\
P_{II} &= \tfrac{n+1}{n} \cdot P + \tfrac{n+1}{n^2} \cdot P = \tfrac{(n+1)^2}{n^2} \cdot P \\
P_{III} &= \tfrac{(n+1)^2}{n^2} \cdot P + \tfrac{(n+1)^2}{n^3} \cdot P = \tfrac{(n+1)^3}{n^3} \cdot P \\
P_{IV} &= \tfrac{(n+1)^3}{n^3} \cdot P + \tfrac{(n+1)^3}{n^4} \cdot P = \tfrac{(n+1)^4}{n^4} \cdot P \\
\text{et en général } P_m &= \tfrac{(n+1)^m}{n^m} \cdot P
\end{aligned}\right\} A.$$

En soustrayant ces valeurs l'une de l'autre, on obtiendra pour les divisions elles-mêmes ab, bc, cd, etc. les valeurs $\frac{1}{n} \cdot P$, $\frac{n+1}{n^2} P$, $\frac{(n+1)^2}{n^3} \cdot P$, $\frac{(n+1)^3}{n^4} \cdot P$ et en général $x_m = \frac{(n+1)^m}{n^{m+1}} \cdot P$. Mais comme ces valeurs n'ont aucune utilité pratique pour la construction graphique de l'échelle, nous reprenons les valeurs A pour les développer par voie de division; ce qui donne:

$$\left.\begin{aligned}
P &= P \\
P_{I} &= \left(1+\frac{1}{n}\right) P \\
P_{II} &= \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) P \\
P_{III} &= \left(1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right) P \\
P_{IV} &= \left(1+\frac{4}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{4}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right) P \\
P_{V} &= \left(1+\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}+\frac{10}{n^3}+\frac{5}{n^4}+\frac{1}{n^6}\right) P
\end{aligned}\right\} B.$$

Pour trouver les valeurs de ces formules pour chaque degré, il faut préalablement connaître la valeur de n ou de $\frac{1}{n}$ P. Cela se fait le plus commodément au moyen des tables connues concernant la dilatation des liquides spiritueux par la chaleur. Celles de GAY-LUSSAC nous fournissent pour une étendue de 24° R., à commencer de zéro, pour nos quatre espèces de liqueurs:

N°. 1 ······ 0, 019	et pour un degré moyen ou $\frac{1}{n}$ ····	0, 0007916 $= \frac{1}{1263}$
N°. 2 ······ 0, 021	— — — —	0, 0008750 $= \frac{1}{1143}$
N°. 3 ······ 0, 024	— — — —	0, 0010000 $= \frac{1}{1000}$
N°. 4 ······ 0, 028	— — — —	0, 0016666 $= \frac{1}{857}$

Il suit de là que $\frac{1}{n^2}$ est une grandeur absolument imperceptible pour les quatre cas, et à plus forte raison les puissances plus élevées, quelque longueur qu'on puisse supposer raisonnablement à l'échelle *). Ainsi nous pourrons négliger dans les va-

*) En supposant l'échelle longue de 10 pouces (la plus grande de nos quatre n'aura que 3''·3''') la faute pour le N°. 3 serait $10^{p} \cdot \frac{1}{1000000} = \frac{1}{100000}$ du pouce pour le moyen degré, et de $\frac{24}{100000} = \frac{1}{4166}$ pour les vingt-quatre. Mais comme l'échelle de ce Numéro n'aura pas tout-à-fait 3 p., la faute sera moindre que $\frac{1}{13638}$ du pouce.

*

leurs B toutes les puissances au-dessus de la première, et nous aurons: $P = P$, $P_I = \left(1 + \frac{1}{n}\right)P$, $P_{II} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)P$, $P_{III} = \left(1 + \frac{3}{n}\right)P$ etc., et en soustrayant le volume P, nous aurons $ab = \frac{1}{n}P$, $ac = \frac{2}{n}P$, $ad = \frac{3}{n}P$ etc. D'où il suit que, pour les valeurs trouvées du coefficient $\frac{1}{n}$, et dans les bornes de 24° R., les x peuvent être faits égaux sans craindre une erreur sensible.

Ainsi les longueurs ab, ac, ad, ae etc. forment sensiblement pour nos quatre échelles une progression arithmétique; et si l'on place ces longueurs en qualité d'ordonnées sur une droite AC (fig. II.), dont les abscisses expriment les températures, les extrémités des ordonnées formeront la droite BC.

Mais cette échelle ne serait juste que sous la condition que les dilatations par la chaleur fussent en proportion des degrés thermométriques de mercure, c'est-à-dire que les liqueurs spiritueuses eussent une dilatation proportionnée à celle du mercure. Mais comme cela n'a pas lieu, il faudra corriger notre échelle selon la loi des dilatations des liqueurs spiritueuses, et l'on prévoit que ces corrections produiront une courbe CcB, dont la concavité sera tournée vers l'hypothénuse BC.

En appliquant le même raisonnement aux quatre espèces de liqueur que nous traitons, dans la supposition que AB, AB', AB'', AB''' représentent les longueurs des échelles entières, depuis 0° à 24° R. pour ces quatre liqueurs, nous aurons les courbes CcB, $Cc'B'$, CcB'', $Cc'''B'''$ à construire.

Cherchons d'abord où se trouveront les points c, c', c'', c''', où les ordonnées, élevées sur CA, fournissent le maximum pour les ac. Soit n le degré de la ligne des abscisses où ce maximum se trouvera, il doit être tel que les accroissemens entre ces courbes et leurs droites correspondantes, de 0 degré à n degrés, soient égaux à ceux de n degrés à 24 degrés. Si nous consultons les tables alkoométriques de Gay-Lussac pour les variations de volume par la température, nous trouverons que pour notre N°. 1 (qui a 37,6), pour N°. 2 (qui a 45, 8), pour N°. 3 (qui a 57, 4) et pour N°. 4 (qui a 73, 1), ce degré n est e 15 centésim. ou 12° R.

Pour ne pas m'en rapporter uniquement aux tables de M. GAY-LUSSAC, je me suis servi des formules que M. BIOT livre dans son traité de Physique T. 1. p. 218 pour l'alkool pur $D_T = 0,784T + 0,00208T^2 + 0,0000077 5T^3$, et p. 219 pour parties égales d'alkool et d'eau $D_T = 0,705333T + 0,00275T^2 + 0,0000011667T^3$, dans la vue de trouver les petites ordonnées *dd*, *ee*, *ff*, etc. (fig. II.), dont *ac* est la plus grande. J'ai pour cet effet supposé 120 parties dans la hauteur *AB* et inscrit les ordonnées de *C* en *A* pour la ligne droite. Puis j'ai cherché, d'après les formules citées la valeur D_T correspondante à 24° R., pour laquelle nous avons pris une droite partagée en 120 parties égales. Le même calcul a eu lieu pour les valeurs D_t des autres degrés. En faisant les proportions $D_T : 120 = D_t : x$, l'on obtient les ordonnées pour notre courbe, qui, soustraites des ordonnées correspondantes pour la ligne droite, nous fournissent les variables de *ac*. La table suivante nous offre ces résultats.

Pour l'alkool pur.

Degrés	Ordonnées pour la droite	Ordonnées pour la courbe	Accroissemens.
1	5,000	4,712	0,288
2	10,000	9,365	0,635
3	15,000	14,137	0.863
4	20,000	18,909	1,091
5	25,000	23,681	1,319
6	30,000	28,513	1,487
7	35,000	33,344	1,656
8	40,000	38,136	1,864
9	45,000	43,127	1,873
10	50,000	48,018	1,982
11	55,000	52,969	2,031
12	60,000	57,980	2,020
13	65,000	62,990	2,010

Degrés	Ordonnées pour la droite	Ordonnées pour la courbe	Accroissemens.
14	70,000	68,001	1,999
15	75,000	73,071	1,929
16	80,000	78,201	1,799
17	85,000	83,669	1,669
18	90,000	88,461	1,539
19	95,000	93,650	1,350
20	100,000	98,840	1,160
21	105,000	104,089	0,911
22	110,000	109,338	0,662
23	115,000	114,647	0,353
24	120,000	120,000	0,000

Parties égales d'alkool et d'eau.

1	5,000	4,490	0,510
2	10,000	8,109	1,891
3	15,000	13,728	1,272
4	20,000	18,347	1,653
5	25,000	22,909	2,191
6	30,000	27,135	2,865
7	35,000	32,459	2,541
8	40,000	37,335	2,665
9	45,000	42,146	2,854
10	50,000	46,983	3,017
11	55,000	51,980	3,020
12	60,000	56,965	3,035
13	65,000	61,965	3,095
14	70,000	66,905	3,028
15	75,000	72,040	2,960

Degrés	Ordonnées pour la droite	Ordonnées pour la courbe	Accroissemens.
16	80,000	77,172	2,828
17	85,000	82,304	2,996
18	90,000	87,500	2,500
19	95,000	92,093	2,906
20	100,000	98,149	1,851
21	105,000	103,334	1,666
22	110,000	108.800	1,200
23	115,000	114,850	0,150
24	120,000	120,000	0,000.

La première de ces tables nous donne 11 degrés pour le point où *ac* est à son maximum; la seconde table nous donne 13 degrés pour le même point. Mais si l'on considère les différences des valeurs voisines pour 10, 11, 12, 13, 14 dans les deux tables, l'on voit que le point du maximum ne doit se trouver qu'un peu au dessous de 12 degrés pour le premier et le second cas. Ce qui confirme le résultat que nous avons trouvé par les tables de M. Gay-Lussac.

Enfin, l'on peut trouver directement et d'une manière plus simple le point cherché du maximum, en annullant le quotient différentiel des équations de M. Biot, de la manière suivante:

Soit x l'abscisse qui répond au maximum (ou bien au minimum), l'ordonnée correspondante de la ligne droite est $CB = \frac{AB}{AC}\, x = \frac{D_{24}}{24}\, x$.

Or, *pour l'alkool pur* l'on a :

$\frac{D_{24}}{24} = 0{,}784 + 0{,}00208 \cdot 24 + 0{,}00000775 \cdot 24^2 = 0{,}838384$. Ainsi

$$\frac{D_{24}}{24}\, x - D_x = 0{,}838384\, x - (0{,}784\, x + 0{,}00208\, x^2 + 0{,}00000775\, x^3)$$
$$= 0{,}054384\, x - 0{,}00208\, x^2 - 0{,}00000775\, x^3$$

En différentiant et en annullant on obtient

$$0{,}054384 - 0{,}00416\, x - 0{,}00002325\, x^2 = 0$$

Donc $x = \frac{-0{,}00416 \pm \sqrt{0{,}00416^2 + 4 \cdot 0{,}054384 \cdot 0{,}00002325}}{2 \cdot 0{,}00002325}$

d'où l'on déduit $x = 12{,}236^\circ$.

Pour parties égales d'alkool et d'eau l'on a

$\frac{D_{24}}{24} = 0,705333 + 0,00275 \cdot 24 + 0,000011667 \cdot 24^2.$ Ainsi

$\frac{D_{24}}{24} x - D_x = 0,072720192\, x - 0,00275\, x^2 - 0,000011667\, x^3.$

Donc en différentiant et annullant

$$0,072720192 - 0,0055\, x - 0,000035001\, x^2 = 0$$

$$\text{et } x = \frac{-0,0055 \pm \sqrt{0,0055^2 + 4 \cdot 0,072720192 \cdot 0,000035001}}{2 \cdot 0,000035001}$$

d'où l'on déduit $x = 12,222^0$.

Ainsi, pour les deux cas, le maximum est aux environs de 12¼ degrés.

Cette analyse nous prouve que l'on peut, sans erreur sensible, placer le maximum cherché à 12°, et que, si les tables de M. GAY-LUSSAC offrent à cet égard quelques anomalies, elles proviennent de ce que cet auteur célèbre a négligé les décimales inférieures, ou de ce qu'il s'est glissé quelques petites fautes d'observation dans le grand nombre de ses expériences.

Si nous construisions nos ordonnées dans le principe de notre première analyse, nous obtiendrions, en réunissant les bouts des ordonnées, des assemblages de petites droites qui ne s'écarteraient pas sensiblement de la ligne droite, et y rentreraient en plusieurs points. Prenons pour exemple les nombres qui correspondent à 38 p. C., valeur la plus proche de notre N°. 1, et mettons à côté les nombres correspondans de la ligne droite. Nous aurons :

GAY-LUSSAC	Ligne droite	Différences	GAY-LUSSAC	Ligne droite	Différences.
1010 . . .	1009,6 . . .	+ 0,4	1005 . . .	1005,4 . . .	— 0,4
1009 . . .	1009,0 . . .	0,0	1004 . . .	1004,8 . . .	— 0,8
1009 . . .	1008,4 . . .	+ 0,6	1004 . . .	1004,2 . . .	— 0,2
1008 . . .	1007,8 . . .	+ 0.2	1003 . . .	1003,6 . . .	— 0,6
1007 . . .	1007,2 . . .	— 0,2	1002 . . .	1003,0 . . .	— 0,8
1007 . . .	1006.6 . . .	+ 0.4	1002 . . .	1002.4 . . .	— 0,4
1006 . . .	1006.0 . . .	0.0	1001 . . .	1001,8 . . .	— 0,8

Gay-Lussac	Ligne droite	Différences.
1001	1001,2	— 0,2
1000	1000,0	0,0
999	999,4	— 0,4
999	998,8	+ 0,2
998	998,2	— 0,2
998	997,6	+ 0,4
997	997,0	0,0
996	996,4	— 0,4
996	995,8	+ 0,2
995	995,2	— 0,2
995	994,6	+ 0,4
994	994,0	0,0
994	993,4	+ 0,6
993	992,8	+ 0,2
993	992,2	+ 0,8
992	991,6	+ 0,4
991	991,0	+ 0,0

Ainsi, si les nombres de M. Gay-Lussac représentent les ordonnées d'une courbe, cette courbe ne s'éloigne pas sensiblement d'une droite; car la droite coïncide avec la courbe dans tous les points où la différence des ordonnées est nulle et la coupe partout où les différences changent de signe; ce qui fait en tout 14 points communs. Il faut encore observer que le nombre des différences positives et négatives est presque le même, c-à-d. 12 et 13. On peut conclure de ces données que les différences observées proviennent vraisemblablement de ce que M. Gay-Lussac a rejeté de ses tables les décimales que le calcul lui livrait (ce qui l'a forcé de mettre plusieurs fois deux fois de suite le même nombre pour deux degrés voisins), et que les ordonnées pour la ligne droite approchent de la vraie valeur, au moins autant que les nombres des tables de M. Gay-Lussac, dans les limites de température de 0 à 30 degrés C.

Ces principes nous fournissent une méthode simple pour la construction de notre échelle thermo-aréométrique. Je l'ai préférée à la méthode graphique d'ailleurs très satisfaisante de Mr. le Professeur Schmidt de Giessen pour l'échelle purement aréométrique, à laquelle il eût fallu ajouter également les corrections pour le défaut de régularité dans les dilatations, ce qui n'eût pu se faire que par le calcul. Cette méthode en outre, assez expéditive, lorsqu'il ne s'agit que des pour cent, est longue

et pénible lorsqu'on a besoin des millièmes, et exigerait dans notre cas un dessin d'une longueur démesurée et impraticable.

Pour exécuter notre méthode, il fallait une échelle arbitraire divisée très exactement en petites parties égales. J'en ai employé une faite avec la machine du Cabinet de Physique de l'Université de Dorpat. Chaque partie équivaut à peu près à $\frac{1}{9}$ de la ligne du pied de Paris. Pour mesurer et transporter les longueurs je me suis servi d'un compas à verge, muni de loupes, au moyen duquel je pouvais distinguer avec la plus grande sûreté $\frac{1}{10}$ d'une partie de l'échelle, en sorte que la plus grande faute que je pouvais commettre n'atteignait pas $\frac{1}{1000}$ du pouce *).

Pour épargner les répétitions de ces opérations pour chaque instrument, et pour obtenir un plus grand degré d'exactitude, j'ai construit un *Alkoomètre normal* de 2″ de diamètre, cylindrique, terminé en haut et en bas par une demi-sphère, et surmonté d'une tige creuse et carrée, dont les côtés sont destinés à porter les échelles qui se rapportent aux quatre espèces de liqueurs spiritueuses. Son volume, sans la tige, est d'environ 17 pouces cubes. Une petite assiette, qu'on peut placer sur le haut de la tige, sert à trouver la grandeur des poids pour enfoncer l'instrument autant qu'il est nécessaire dans les N°. 3, 2, 1, lorsqu'il a été lesté uniquement pour le N°. 4.

Cet instrument ainsi construit, je le place dans le N°. 4, à la température de + 12° R., puis à celle de 0, puis à celle de + 24, et je marque avec le plus grand soin les lignes d'enfoncement. Cela se fait pour les trois autres liqueurs normales également, en ayant soin de lester convenablement l'instrument pour chacun. Ces trois points cardinaux étant ainsi fixés, nous n'avons pas à tenir compte du changement de volume de l'instrument même, causé par la température; ces changemens de volume étant très sûrement proportionels aux variations du thermomètre dans les limites étroites des observations requises.

*) L'exactitude de ce compas va beaucoup plus loin, lorsqu'il ne s'agit que de prendre une ligne donnée et de la transporter. Comme ici il s'agit d'estimer les décimales d'une partie de l'échelle, environ $\frac{1}{90}$ d'une ligne, l'exactitude dépend en partie non de la force de la vue, mais de la justesse du coup-d'oeil.

Ces opérations ont fourni les résultats suivants:

Pour le N°. 1	longueur totale de l'échelle	229, 6.	Longueur de 0° à 12°	= 106, 0;	*ac* = 8, 80
— — N°. 2	— — — — — — —	273, 1.	— — — — —	= 129, 0;	*ac* = 7, 55
— — N°. 3	— — — — — — —	312, 6.	— — — — —	= 150, 4;	*ac* = 5, 90
— — N°. 4	— — — — — — —	354, 7.	— — — — —	= 172, 6;	*ac* = 4, 75

Les poids qui servaient de lest furent trouvés

Pour N°. 1	— — —	373, 85
— N°. 2	— — —	310, 85
— N°. 3	— — —	196, 85
— N°. 4	— — —	0, 00

Lorsqu'il s'agira de l'exécution réelle pour l'introduction de ce système alkoométrique, on pourra à ces trois observations en ajouter deux autres, l'une à 6°, et l'autre à 18° R. pour s'assurer d'une plus grande exactitude. En outre, pour ne pas s'en rapporter à la loi que fournissent les tables de Mr. Gay-Lussac, on pourra se servir de la formule générale

$$D_t = At + Bt^2 + Ct^3 \cdots \text{etc.}$$

en ne prenant que les deux premiers termes, les troisièmes puissances n'ayant pas d'influence sensible. Les observations fourniront les coefficiens A et B qui détermineront les valeurs cherchées entre 0 et 6, entre 6 et 12, entre 12 et 18, et entre 18 et 24 degrés.

Tables pour la construction de l'échelle thermo-aréométrique.

Température R.	Ordonnées de la Droite	Pour N°. 1.				vraies Ordonnées.
		Corrections pour la temp.	Ordonnées corrigées	Corrections pour l'angle		
24°	229,600	0,000	229,600	0.00		229,60
23	220,033	0,733	219,300	0,07		219.23
22	210,466	1,466	209,000	0,13		208.87
21	200,900	2,200	198,700	0.20		198.50
20	191,333	2,933	188,400	0.27		188.13
19	181,766	3,666	178,100	0,33		177.77
18	172,200	4,400	167.800	0,40		167.40
17	162,633	5,133	157.500	0.47		157.03
16	153,066	5,866	147,200	0.53		146.67
15	143,500	6,600	136,900	0,60		136.30
14	133,933	7,333	126,600	0,67		125.93
13	124,366	8,066	116,300	0,73		115,57
12	114,800	8,800	106,000	0,00		106,00
11	105,233	8,066	97,167	0,73		96,44
10	95,666	7,333	88,333	0,67		87.66
9	86,100	6,600	79,500	0,60		78,90
8	76,533	5,866	70,667	0,53		70.14
7	66.966	5,133	61,833	0.47		61.36
6	57,400	4.400	53,000	0.40		52.60
5	47,833	3,666	44,167	0,33		43,84
4	38,266	2.933	35,333	0,27		35,06
3	28,700	2.200	26,500	0,20		26,30
2	19,133	1,466	17,667	0,13		17,54
1	9,566	0,733	8,833	0,07		8,76

Tempé-rature R.	Ordonnées de la Droite	Pour N°. 2.			vraies Ordonnées.
		Corrrctions pour la temp.	Ordonnées corrigées	Corrections pour l'angle	
24°	273,100	0,000	273,100	0,00	273,10
23	261,719	0,629	261,090	0,06	261,03
22	250,340	1,258	249,082	0,11	248,97
21	238,961	1,887	237,074	0,17	236,90
20	227,582	2,517	225,065	0,23	224,83
19	216,203	3,146	213,075	0,28	212,78
18	204,824	3,775	201,049	0,34	200,71
17	193,445	4,404	189,041	0,40	188,64
16	182,066	5,033	177,033	0,46	176,57
15	170,687	5,662	165,025	0,51	164,52
14	159,307	6,292	153,015	0,57	152,45
13	147,928	6,921	141,007	0,63	140,38
12	136,550	7,550	129,000	0.00	129,00
11	125,170	6,921	118,249	0,63	117,62
10	113,791	6,292	107,499	0,57	106,93
9	102,412	5,662	96,750	0,51	96,24
8	91,033	5,033	86,000	0,46	85,54
7	79,654	4,404	75,250	0,40	74,85
6	68,275	3,775	64,500	0,34	64,16
5	56,896	3,146	53,750	0,28	53,48
4	45,516	2,517	42,999	0,23	42,77
3	34,137	1,887	32,246	0,17	32,08
2	22,758	1,258	21,500	0,11	21,39
1	11,379	0,629	10,750	0,06	10,69

Tempé-rature R.	Ordonnées de la Droite	Pour N°. 3.			vraies Ordonnées.
		Corrections pour la temp.	Ordonnées corrigées	Corrections pour l'angle	
24°	312,600	0.000	312,600	0,00	312,60
23	299.575	0,492	299.083	0,04	299,04
22	286,550	0.984	285.566	0,09	285 48
21	273,525	1,475	272,050	0,13	271,92
20	260,500	1,966	258,534	0,18	258,35
19	247,475	2,458	245,017	0.22	244,80
18	234,450	2,950	231,500	0,27	231,23
17	221,425	3,442	217,983	0,31	217.67
16	208,400	3,933	204,467	0,36	204.11
15	195,375	4,425	190,950	0,40	190,55
14	182.350	4,917	177,433	0,44	176.99
13	169.325	5,408	163,917	0.49	163,43
12	156.300	5,900	150,400	0,00	150.40
11	143,275	5.408	137,867	0.49	137.38
10	130,250	4,917	125,333	0.44	124,89
9	117,225	4,425	112,800	0,40	112.40
8	104,200	3,933	100,267	0,36	99,91
7	91,175	3.442	87,733	0,31	87,42
6	78,150	2.950	75,200	0,27	74,93
5	65,125	2.458	62,667	0,22	62,45
4	52.100	1.966	50,134	0,18	49,95
3	39,075	1,475	37,600	0,13	37,47
2	26,050	0,984	25,066	0,09	24,98
1	13,025	0,492	12,533	0,04	12,49

Tempé-rature R.	Ordonnées de la Droite	Pour N°. 4.			vraies Ordonnées.
		Corrections pour la temp.	Ordonnées corrigées	Corrections pour l'angle	
24°	354,700	0,000	354,700	0,00	354,70
23	339,919	0,396	339,523	0,03	339,49
22	325,140	0,792	324,348	0,07	324,28
21	310,361	1,187	309,174	0,11	309,06
20	295,582	1,583	239,999	0,14	293,86
19	280,803	1,979	278,824	0,18	278,64
18	266,023	2,375	263,648	0,22	263,43
17	251,245	2,771	248,474	0,25	248,22
16	236,466	3,167	233,299	0,29	233,01
15	221,687	3,562	218,125	0,32	217,81
14	206.907	3,958	202,949	0,36	202,59
13	192,128	4,354	187,774	0,39	187,38
12	177,350	4,750	172,600	0,00	172,60
11	162,570	4,354	158,216	0,39	157,83
10	147,791	3,958	143,833	0,36	143,47
9	133,012	3,562	129,450	0,32	129,13
8	118,233	3,167	115,066	0,29	114,78
7	103,454	2,771	100,683	0,25	100,43
6	88,675	2,375	86,300	0,22	86,08
5	73,896	1,979	71,917	0,18	71,74
4	59,116	1,583	57,533	0,14	57,39
3	44,337	1,187	43,150	0,11	43,04
2	29,558	0,792	28,766	0,07	28,70
1	14,779	0,396	14,383	0,03	14,35

La première colonne contient les températures du liquide, la seconde les ordonnées appartenantes à la ligne droite, à nos *CB*, *CB'* etc., calculées sur les hauteurs respectives *AB*, *AB'* etc. La troisième colonne contient ce qu'il faut soustraire des nombres de la seconde pour obtenir les ordonnées appartenantes aux droites *Cc* et *cB*, *Cc'* et *c'B'* etc. La quatrième contient ces ordonnées elles-mêmes. Si l'on considère de près cette quatrième colonne, on s'apercevra aisément que les nombres font un saut entre les degrés de température 12 et 13. Cela provient de l'angle *AcB* que nos deux droites *Ac*, *cB* font entre elles, par lequel les ordonnées ne coupent pas ces droites sous le même angle. Ce saut n'aurait évidemment pas lieu (car il n'existe pas dans la nature de ces liquides) si l'on avait pris les ordonnées parallèles à une droite qui coupât l'angle *AcB* en deux parties égales, ou bien perpendiculaires à *CB*. Pour faire disparaître ce défaut, nous prenons la différence commune de 0° à 12°, et de 12° à 24° et soustrayons ces deux différences l'une de l'autre. La moitié de cette différence des différences sera ce qu'il faut répartir par soustraction de 0° à 12°, et de 12° à 24°. Pour rester dans l'hypothèse de la ligne droite, que nous avons reconnue suffire pour ces latitudes de température, nous divisons cette différence en 11 parties égales, en rejetant la troisième décimale, qui à présent n'est plus nécessaire. Ce onzième, ajouté 11 fois à lui-même, forme les nombres de la cinquième colonne, intitulée: *corrections pour l'angle c;* et ces nombres soustraits des correspondans de la colonne précédente, livrent enfin la sixième colonne, qui contient les vraies ordonnées exprimées en parties de l'échelle adoptée, telles qu'il les faut pour la construction graphique des quatre échelles de notre Alkoomètre.

On pourrait peut-être éliminer cette dernière correction, et obtenir un plus haut degré d'exactitude en ajoutant une troisième observation pour chacune des 4 espèces normales de liqueur, en tirant des 3 équations

$$A \cdot 24 + B \cdot 24^2 + C \cdot 24^3 = a$$
$$A \cdot 12 + B \cdot 12^2 + C \cdot 12^3 = b$$
$$A \cdot 12 + B \cdot 12^2 + C \cdot 12^3 = c$$

les coefficiens indéterminés A, B, C et former pour les 4 liqueurs normales une formule $D_t = At + Bt^2 + Ct^3$, qui fournirait immédiatement, sans correction ultérieure, les ordonnées cherchées. — Mais c'est assez de théorie pour une description qui ne doit que fournir la marche à suivre dans la construction du nouvel Alkoomètre.

L'Alkoomètre dont je propose l'usage est plus petit que l'instrument normal. Il a 1″, 6‴ de diamètre, et son volume est d'environ 7 pouces cubes. Pour chaque individu je fixe par des expériences les points extrêmes de l'échelle pour 0° et pour 24° R. Cette longueur totale de l'échelle étant donnée, il est facile de trouver graphiquement les autres points. Pour cet effet, je construis pour chaque liquide un triangle isocèle ABC (Fig. III), dont la base est l'échelle de l'instrument normal, et chacun des côtés égal à la double longueur de la base. D'autres auteurs construisent un triangle équilatéral, mais je préfère l'isocèle, parce que la base se trouve coupée vers les côtés sous de plus grands angles par les droites menées du sommet aux divisions. Le reste de l'opération est trop connu pour exiger une description.

Notre instrument étant construit, nous pouvons procéder à la solution des cinq problèmes énoncés dont se compose le problème général de l'Alkoométrie.

Ier Problème.

Trouver si l'eau-de-vie ou l'esprit présenté en vente a la force normale de son espèce, ou non.

On place le thermomètre et l'Alkoomètre dans la liqueur pendant 2 ou 3 minutes (en remuant le liquide avec le thermomètre il ne faut pas ½ minute), afin que l'un et l'autre prennent la température du liquide. Alors on observe les degrés indiqués par l'un et l'autre. S'ils sont égaux, la liqueur a la force normale. Si l'Alkoomètre indique plus de degrés que le thermomètre, alors la liqueur a plus de force: s'il en indique moins, la liqueur a moins de force que la liqueur normale de cette espèce.

Note. Il faut avoir soin que la température de la liqueur ne diffère pas de celle de la chambre de beaucoup si l'on veut avoir des indications très exactes.

IIe Problème.

Déterminer la quantité d'alkool que la liqueur présentée a de plus ou de moins que la liqueur normale de cette espèce.

Pour résoudre ce problème, il faut que notre instrument indique les p. C. d'alkool contenus dans la liqueur donnée. Une simple soustraction indiquera la différence.

Pour obtenir cette indication, il faut admettre que les degrés thermo-aréométriques peuvent être pris pour des degrés alkoométriques, et déterminer la valeur d'un degré thermo-aréométrique en p. C. d'alkool pour nos quatre liqueurs. Mais il faut préalablement prouver que cette admission est légitime.

Prenons dans les tables de M. Gay-Lussac les colonnes des p. C. d'Alkool qui appartiennent aux p. C. qui approchent le plus du N°. 1, du N°. 2, du N°. 3, du N°. 4, et cherchons les différences des valeurs indiquées de 0° à 15° C. et de 15° à 29°, pour obtenir 14 différences en-deçà et en-delà de 15° C. Nous aurons :

	Pour N°. 1	Pour N°. 2	Pour N°. 3	Pour N°. 4.
Degrés	0,38	0,46	0,58	0,73
1	0,3	0,4	0,3	0,3
2	0,4	0,4	0,4	0,3
3	0,4	0,4	0,3	0,3
4	0,4	0,3	0,4	0,4
5	0,4	0,4	0,3	0,3
6	0,5	0,4	0,4	0,3
7	0,4	0,3	0,3	0,3
8	0,4	0,4	0,3	0,3
9	0,4	0,4	0,4	0,3
10	0,4	0,4	0,3	0,3
11	0,4	0,3	0,3	0,3
12	0,4	0,4	0,4	0,3

13	0,4	0,4	0,3	0,3
14	0,4	0,4	0,4	0,3
15	0,4	0,4	0,3	0,3
16	0,5	0,4	0,4	0,4
17	0,4	0,4	0,3	0,3
18	0,4	0,3	0,4	0,3
19	0,4	0,4	0,3	0,3
20	0,4	0,4	0,4	0,3
21	0,4	0,4	0,3	0,3
22	0,4	0,4	0,4	0,3
23	0,4	0,4	0,4	0,4
24	0,4	0,4	0,3	0,3
25	0,4	0,3	0,3	0,3
26	0,4	0,4	0,4	0,3
27	0,4	0,4	0,3	0,4
28	0,4	0,4	0,4	0,3
29	0,4	0,4	0,4	0,3.

Si nous additionnons toutes les différences au-dessus et au-dessous de 15°, nous aurons:

	Pour N°. 1	Pour N°. 2	Pour N°. 3	Pour N°. 4.
au-dessus	5, 6	5, 3	4, 8	4, 3
au-dessous	5, 7	5, 4	5, 0	4, 5
différence	0, 1	0, 1	0, 2	0, 2.

Ce résultat prouve d'abord que, si nous considérons notre droite rompue *CcB* (Fig. II), comme la courbe alkoométrique, le point correspondant au maximum des *ca* sera 15° C. + une petite fraction égale à la moitié de la différence, et la faute moyenne qui en résultera pour 1 degré sera pour le N°. 1 $\frac{0,05}{14} = 0,0035$;

*

pour le N°. 2 $\frac{0,05}{14} = 0,0035$; pour le N°. 3 $\frac{0,1}{14} = 0,0071$ et pour le N°. 4, $\frac{0,1}{14} = 0,0071$, dont l'unité est 1 p. C. Et l'on ne peut pas dire que ces fautes s'accumulent, puisque pour la graduation de notre instrument, nous avons fixé par l'expérience les trois points cardinaux de l'échelle. Ces différences de nos résultats avec ceux de M. Gay-Lussac sont donc telles, qu'elles ne dépassent pas une mesure sur 28000 pour N°. 1 et pour N°. 2, sur 14000 pour N°. 3 et pour N°. 4. Ajoutons à cela que M. Gay-Lussac ayant éloigné de ses tables les décimales au dessous de $\frac{1}{10}$ p. C., il est clair que les fautes qui en résultent pour ses tables sont de règle beaucoup plus grandes que celles que nous pouvons avoir commises en prenant 15° C. ou 12° R. pour le point où ac est à son maximum *).

Si l'on jette un coup-d'oeil sur les tables elles-mêmes ou sur ces différences, l'on voit qu'ici, comme dans les tables des volumes, les nombres croissent arithmétiquement, et que les fautes qui ont lieu dans cette supposition et dans les limites de 0° à 12° R., et de 12° à 24° échappent à l'observation la plus exacte. Ainsi nous pouvons en toute sûreté évaluer notre degré thermo-aréométrique en parties de pour Cent d'alkool, et faire par là de notre échelle une échelle alkoométrique.

Pour cet effet nous nous rappelons que nous avons opéré sur nos liqueurs spiritueuses à la température de 12° R. pour en fixer la pesanteur spécifique et la richesse en alkool, et que cette température est la température normale que le Gouvernement a adoptée.

Si nous prenons les tables de M. Gay-Lussac pour base, nous trouvons que la valeur d'un degré thermométrique équivaut à 0,5062 p. C. pour le N°. 1, à 0,4812

---

*) Ces considérations trouvent un nouvel appui dans le fait que la plupart des Physiciens qui ont composé des tables alkoométriques n'ont expérimenté que de 5 à 5 p. C. et interpolé les autres nombres selon la progression arithmétique. Or nous allons voir que pour nos quatre liqueurs nos 12 degrés correspondent a 5 ou 6 p. C. d'alkool.

p. C. pour le N°. 2, à 0,4375 p. C. pour le N°. 3, à 0,3916 pour le N°. 4 *). Ces données nous fournissent la table suivante de réduction des degrés thermo-aréométriques en p. C. d'Alkool pour nos quatre espèces de liqueurs.

Tables de réduction

de degrés thermo-aréométriques en p. C. d'alkool.

N°. 1.			
Degrés		Force de la liqueur	
		plus faible	plus forte
1	0,506	37,09	38,11
2	1,012	36,59	38,61
3	1,518	36,08	39,12
4	2,024	35,58	39,62
5	2,530	35,07	40,13
6	3,036	34,56	40,64
7	3,542	34,06	41,14
8	4,048	33,55	41,65
9	4,554	33,05	42,15
10	5,062	32,54	42,66
11	5,568	32,03	43,17
12	6,074	31,53	43,67

$\frac{1}{10}$ ... 0,05	$\frac{4}{10}$ ... 0,20	$\frac{7}{10}$ ... 0,35
$\frac{2}{10}$ ... 0,10	$\frac{5}{10}$ ... 0,25	$\frac{8}{10}$ ... 0,40
$\frac{3}{10}$ ... 0,15	$\frac{6}{10}$ ... 0,30	$\frac{9}{10}$ ... 0,45

N°. 2.			
Degrés		Force de la liqueur	
		plus faible	plus forte
1	0,481	45,32	46,28
2	0,962	44,84	46,76
3	1,443	44,36	47,24
4	1,924	43,88	47,72
5	2,405	43,39	48,21
6	2,886	42,91	48,69
7	3,367	42,43	49,17
8	3,848	41,95	49,65
9	4,331	41,47	50,13
10	4,812	40,99	50,61
11	5,293	40,51	51,09
12	5,774	40,03	51,67

$\frac{1}{10}$ ... 0,05	$\frac{4}{10}$ ... 0,19	$\frac{7}{10}$ ... 0,34
$\frac{2}{10}$ ... 0,10	$\frac{5}{10}$ ... 0,24	$\frac{8}{10}$ ... 0,39
$\frac{3}{10}$ ... 0,14	$\frac{6}{10}$ ... 0,29	$\frac{9}{10}$ ... 0,44

*) MM. Richter et Tralles admettent pour la pratique indistinctement 1 p. C. sur $1\frac{1}{4}$ degré thermométrique; ce qui fait 0, 8 p. C. pour 1 degré, et pour tous les mélanges d'Alkool et d'eau. Les données de M. Gay-Lussac sont évidemment plus sûres.

N°. 3.			
Degrés		Force de la liqueur	
		plus faible	plus forte
1	0,438	56,96	57,84
2	0,876	56,52	58,28
3	1,314	56,09	58,72
4	1,752	55,65	59,15
5	2,190	55,21	59,59
6	2,625	54,78	60,03
7	3,062	54,34	61,46
8	3,500	53,70	60,90
9	3,937	53,46	61,34
10	4,375	53,03	61,78
11	4,813	52,59	62,21
12	5,250	52,15	62,65

$\frac{1}{10}$···0,04	$\frac{4}{10}$···0,18	$\frac{7}{10}$···0,31
$\frac{2}{10}$···0,09	$\frac{5}{10}$···0,22	$\frac{8}{10}$···0,35
$\frac{3}{10}$···0,13	$\frac{6}{10}$···0,26	$\frac{9}{10}$···0,39

N°. 4.			
Degrés		Force de la liqueur	
		plus faibles	plus forte
1	0,392	72,71	73,49
2	0,783	72,32	73,88
3	1,175	71,93	74,28
4	1,556	71,55	74,67
5	1,958	71,14	75,06
6	2,350	70,75	75,45
7	2,741	70,36	75,84
8	3,133	69,97	76,23
9	3,544	69,50	76,62
10	3,916	69,18	77,02
11	4,308	68,79	77,41
12	4,699	68,40	77,80

$\frac{1}{10}$···0,04	$\frac{4}{10}$···0,16	$\frac{7}{10}$···0,27
$\frac{2}{10}$···0,08	$\frac{5}{10}$···0,19	$\frac{8}{10}$···0,31
$\frac{3}{10}$·· 0,12	$\frac{6}{10}$···0,23	$\frac{9}{10}$···0,35

La première colonne contient les différences des degrés de thermomètre de 1 à 12. La seconde, ce qu'il faut soustraire où ajouter pour connaître les p. C. d'alkool contenus dans la liqueur qu'on examine, selon que l'alkoomètre s'enfonce dans la liqueur moins ou plus que le thermomètre n'indique. La troisième et la quatrième colonne contiennent ces p. C. pour les quatre espèces de liqueur. Un exemple suffira pour expliquer l'usage de cette table.

Supposons qu'on offre une liqueur qui doit être du N . 1. Sa température est + 18 degrés. Si l'instrument s'enfonçait précisement jusqu'à + 18 degrés, alors la liqueur aurait la force normale. Mais il ne plonge que jusqu'à 12 degrés. La

différence est 6 degrés. La valeur de ces 6 degrés se trouve dans la seconde colonne indiquée par le nombre correspondant à 6 degrés, 3,036, et la troisième colonne livre sur la même ligne horizontale le nombre 34,56 pour le nombre cherché des p. C. d'alkool contenus dans la liqueur. Si l'instrument s'était enfoncé jusqu'à 24 degrés, le nombre 40,84 de la quatrième colonne indiquerait la force de la liqueur.

Pour les cas où la différence des indications serait affectée de fractions de degré, il a été ajouté, dans une petite table annexée au bas de la grande, la valeur des dixièmes de degré *).

On entrera facilement dans l'idée qui fait la base de ce système alkoométrique, si l'on se souvient que nous avons fait de notre instrument d'abord un aréomètre, puis un thermomètre qui indiquerait immédiatement la température d'une de nos quatre liqueurs, si cette température changeait. Dans les cas, par exemple, où une liqueur comme le N°. 1 fût d'abord à la température + 12°, et qu'elle se refroidît d'un degré, alors l'instrument monterait d'un degré de l'échelle N. 1. Mais cette ascension prouve une augmentation de la pesanteur spécifique qui se mesure ici en degrés de chaleur, au lieu que d'ordinaire on l'exprime en parties du poids de l'eau distillée. Il ne faut donc plus que savoir quel changement de p. C. d'alkool correspondent à un de ces degrés, pour faire de ce thermomètre un alkoomètre.

IIIème Problème.

Déterminer combien il faut mêler d'eau ou d'un esprit plus fort pour amener à la force normale une liqueur qui ne l'a pas.

---

*) On voit par l'inspection de ces tables que, à partir de la température normale + 12° R, leur usage est très étendu. La 1. va depuis 31,53 p. C. à 43,67; la 2. depuis 40,03 à 51,57, la 3. depuis 52,15 a 62,65 et la 4. depuis 68,40 à 77,80, c.-à-d. à presque toutes les liqueurs spiritueuses depuis 31,53 jusqu'à 77,80. Car si l'on a du N°. 4 de la force 77,80, on pourra construire avec de l'eau toutes les liqueurs énoncées dans les colonnes de la table N°. 4, et partant le N°. 4 normal, avec lequel on pourra faire le N°. 3 normal, et toutes les liqueurs comprises dans les deux colonnes de la table, et ainsi de suite. En étendant les tables jusqu'à 15° R. au-dessus et au-dessous de 12, on pourrait faire toutes les liqueurs entre les extrêmes. Au reste, le but de notre Alkoomètre n'est pas si étendu. Il ne faut pour l'usage que les problèmes qui vont suivre.

Ce problème, qui se nomme en France le *mouillage*, a été résolu par M. Gay-Lussac, conjointement avec celui de la concentration, d'une manière élégante, mais peu commode pour l'usage pratique. Nous séparons par cette raison ces deux problèmes. Nous ne pouvons en outre nous servir des tables de ce célèbre Physicien parce que la nature des liqueurs spiritueuses s'y oppose par les raisons suivantes:

La base de toute Alkoométrie est l'alkool desséché au maximum. Or, l'on n'obtient ce maximum qu'en employant le muriate de chaux, qui enlève non seulement l'eau, mais aussi une huile (essentielle selon quelques Chimistes, empyreumatique selon d'autres) que les Allemands nomment *Fusel-Oel*, qui se trouve dans toutes les liqueurs spiritueuses excepté dans celles de vin, et produite, soit par l'acte de la fermentation, soit par celui d'une distillation trop vive. D'où il résulte que cette méthode de rectification change la nature du mélange originaire en soustrayant cette huile. M. Hensmanns, de Louvain, a traité récemment ce sujet dans son mémoire sur les liqueurs spiritueuses, couronné par l'Académie de Bruxelles, dans lequel il prouve que, tant que les liqueurs spiritueuses contiennent cette huile (et une portion d'acide acétique) elles ne peuvent être portées au même degré de concentration (par la seule distillation) que les esprits *de vin*, et trouve pour l'esprit de grains une différence de $3\frac{1}{4}$ degrés de l'alkoomètre de Baumé, mais que, purifiées de ces substances étrangères, elles peuvent obtenir le même maximum de concentration que l'esprit de vin, à procédés égaux. Il est donc clair qu'un esprit *de grains*, rectifié par la seule distillation, contient plus d'alkool qu'il ne paraît en contenir, et que, par conséquent, le mouillage doit se ressentir de cette différence.

M. Hensmanns n'ayant pas fourni de données sur les divers degrés de force qui eussent pu fournir une règle, j'ai cherché par des expériences directes les quantités d'eau de mouillage pour les cas les plus importans, ceux où l'on veut transformer du N°. 4 en N°. 1, N°. 2 ou N°. 3. Ce qui fournit la petite table suivante:

Pour faire du N°. 1 il faut 98,80 Wédros d'eau sur 100 W. d'esprit N°. 4.
— — — N°. 2 — 62,70 — — — — — — — —
— — — N°. 3 — 29,29 — — — — — — — —

Je me suis servi de la méthode suivante pour fixer les autres proportions du mouillage: d'abord j'ai calculé les tables au moyen de la simple formule $\frac{c-a}{a}$ pour les cas où l'on mouille avec de l'eau, formule où a est la force de la liqueur qu'on veut obtenir, et c la force de la liqueur trop forte donnée; pour les cas où l'on mouille avec l'esprit No. 4, la formule est $\frac{a-c}{e-a}$, où e est la force de No 4. Puis j'ai admis en principe que les quantités d'eau de mouillage pour tous les cas sont en proportion des quantités que donne la formule *), et j'ai calculé sur la petite table précédente les corrections à faire. Les coefficiens de ces corrections sont pour le No. 1 $= \frac{1}{21,5}$, pour le No. 2 $= \frac{1}{19,2}$, pour le No. 3 $= \frac{1}{14,1}$. Pour le mouillage avec l'esprit No. 4, je n'ai pas calculé les corrections parce qu'elles me paraissent assez petites pour pouvoir être négligées. C'est ainsi que j'ai formé les trois tables qui se trouvent dans *l'instruction pratique* au IIe Problème p. 2.

Il n'est pas inutile, pour la pratique, d'observer que les opérations du mouillage supposent que le No. 4 ait la force normale, et que, s'il ne l'a pas, ou plutôt s'il est plus fort, il n'est pas nécessaire de le mouiller en effet, mais seulement de calculer. *L'instruction pratique* contient à la page 4 la règle à observer et la table nécessaire pour cette réduction du No. 4; c'est l'objet du IIIe Problème de cette instruction.

Au reste l'extrême exactitude dans le mouillage échouera toujours contre un écueil inévitable, la différence de nature des eaux que l'on emploiera. Cette extrême exactitude ne peut exister que sous la condition que l'eau de mouillage est partout la même; ce qui forcerait à une impossibilité pratique, celle de n'employer que de l'eau distillée. L'eau de la Néva, avec laquelle les expériences citées ont été faites, a une pesanteur spécifique de 1,0003164. Celles d'autres fleuves, er sur tout celles de puits, sont plus pesantes.

---

*) Ce principe n'est peut-être pas rigoureusement vrai; il ne pourrait être justifié que par des expériences directes qui exigeraient beaucoup de soins. Je dois même avouer que dans la petite table qui fixe l'eau de mouillage pour faire du No. 1, du No. 2 et du No. 3, il peut s'être glissé quelques petites fautes; les expériences nécessaires à cet effet, si elles doivent se faire avec la dernière rigueur, exigent un appareil qui n'est pas encore à ma disposition. Elles eussent en outre été inutiles pour le présent, le Gouvernement ne m'ayant pas instruit de la force des liqueurs qu'il admet comme base.

IVème Problème.

Déterminer la concentration causée pas les mélanges.

Il a déjà été observé que M. Gay-Lussac a résolu ce problème. Mais il m'a paru douteux que les expériences qui servent de base à ses tables, faites avec de l'alkool pur, puissent être appliquées aux eaux-de-vie de grains qui toutes contiennent une portion de l'huile de Fusel et d'acide acétique. J'ai dû par conséquent faire des expériences directes sur cet objet. Elles ont eu lieu pour le problème de la transformation du N°. 4 en N°. 1, en N°. 2 et en N°. 3, comme pour le mouillage. Elles ont fourni la petite table suivante:

En faisant du N°. 1 la concentration est 1,12 W. sur 100 du mélange.
— — — N°. 2 — — — — 1,95 — — — — —
— — — N°. 3 — — — — 1,39 — — — — —

Ces données ont servi à calculer la concentration pour les tables de mouillage, en admettant que les concentrations sont proportionnelles aux différences des degrés de force. Elles ont produit les tables du Ve problème de *l'Instruction pratique*, p. 5. Le N°. 4 n'offrant point de terme de comparaison, dans son mouillage, j'ai cherché par la voie de l'expérience la concentration qui a lieu pour les cas du degré 12 des autres tables, et j'ai trouvé 0,40 pour 100 Wédros ,sur quoi j'ai fait le calcul pour les autres degrés, selon le même principe. C'est ce qui a fourni la quatrième des tables citées, p. 5 de l'instruction pratique.

Vème Problème.

Fixer les variations de volume causées par la température dans la masse des liqueurs spiritueuses, afin de trouver la vraie quantité livrée, rapportée à la température + 12 *R.*

M. Gay-Lussac a annexé à ses tables de la force réelle la solution de ce problème depuis 0° jusqu'à 30° C.; ce qui suffit apparemment pour la France. En Russie, où on livre les eaux-de-vie et esprits au fort de l'hiver préférablement à

l'été, il est convenable de pousser ces tables jusqu'à — 30° C. ou — 24° R. Comme j'ai fait mon travail alkoométrique en été, je n'aurais pu atteindre ce degré de froid artificiel qu'en opérant dans une cave à glace, où il eût été difficile d'avoir le jour nécessaire, et dont l'humidité eût été très nuisible à ma santé. En attendant, je n'ai pas voulu laisser cette lacune, et je l'ai remplie en supposant que les condensations au-dessous de zéro suivent la même loi qu'au-dessus. Pour justifier théoriquement cette supposition, il s'agissait de savoir si la suite des nombres livrés par M. Gay-Lussac est conforme à une formule générale, ou au moins ne s'en éloigne pas sensiblement. J'ai pris à cet effet la même formule générale dont M. Biot s'est servi dans son traité de Physique, T. I, p. 212, $D_t = At + Bt^2 + Ct^3$ en fixant la valeur des coefficiens par des données prises des tables de Gay-Lussac, pour obtenir trois formules; et pour avoir dans les résultats tout d'un coup d'autres membres de ces tables, je suis parti du point où $t = o$, et j'ai donné à la formule un terme en sus qui exprime selon M. Gay-Lussac le volume de notre N°. 1 à la température 0; ce terme est 1010, et notre formule générale pour ce N°. 1 sera

$$X_t = 1010 + At + Bt^2 + Ct^3$$

d'où nous tirons $x_1 = 1010 + A + B = 1009$ . . . . selon Gay-Lussac

$$x_{15} = 1010 + 15A + 225B + 3375C = 1000 \quad — \quad — \quad —$$

$$x_{30} = 1010 + 30A + 900B + 27000C = 991 \quad — \quad — \quad —$$

On élimine A en divisant ces formules par les coefficiens de A, et en soustrayant les nouvelles formules deux à deux; ce qui donne:

$$\left.\begin{array}{l} 1009 = 1010 + A + B + C \\ 66,666 = 67,333 + A + 15B + 225C \\ 33,633 = 33,666 + A + 30B + 900C \end{array}\right\} \begin{array}{l} 942,334 = 942,667 - 14B - 224C \\ 33,633 = 33,667 - 15B - 675C \end{array}$$

En divisant les deux équations résultantes par les coefficiens de B, et en soustrayant l'on a

$$\left.\begin{array}{l} 67,309 = 67,333 - B - 16C \\ 2,242 = 2,244 - B - 45C \end{array}\right\} 65,067 = 65,089 + 29C, \text{ et } C = -0,00076.$$

D'où l'on tire $B = 0,036$ et $A = -1,035$.

Ce qui fournit pour le N°. 1 l'équation générale

$$X_t = 1010 - 1{,}035\,t + 0{,}036\,t^2 - 0{,}00076\,t^3.$$

Voulons-nous savoir cette valeur par ex: pour + 20°, nous aurons

$$X_{20} = 1010 - 20{,}70 + 14{,}40 - 6{,}08 = 997{,}62$$

Gay-Lussac a = 997,00

En opérant de la même manière sur les autres numéros aux températures + 10, + 15, + 20° C. j'ai obtenu les résultats suivants:

			Gay-Lussac
Pour le N°. 2 . . .	$x_{10} = 1003{,}01$	. . .	1003
	$x_{20} = 996{,}99$	. . .	996
	$x_{25} = 993{,}45$	. . .	993
Pour le N°. 3 . . .	$x_{10} = 1003{,}51$	. . .	1004
	$x_{20} = 997{,}49$	. . .	996
	$x_{25} = 992{,}61$	. . .	992
Pour le N°. 4 . . .	$x_{10} = 1004{,}50$	. . .	1005
	$x_{20} = 995{,}49$	. . .	995
	$x_{25} = 990{,}86$	. . .	991

Comme M. Gay-Lussac a abandonné toutes les décimales et nous les décimales inférieures à la troisième, les différences entre les résultats de la formule et les nombres de M. Gay-Lussac pouvant s'attribuer à cela, l'on peut admettre que ce célèbre auteur a calculé ses tables d'après une formule de ce genre, ou que ses expériences cadrent avec une telle formule, et que, par conséquent, en attendant les expériences au-dessous de zéro, l'on peut supposer la même loi que pour les températures au-dessus de zéro. C'est ainsi que j'ai formé la table contenue dans *l'instruction* pratique pour le VIe problème, p. 6.

Au reste, on ne peut disconvenir que les tables de Gay-Lussac pour cet objet, faites sur des liqueurs privées de l'huile de Fusel, ne sont probablement pas applicables en toute rigueur aux eaux-de-vie et esprits de grains. Pour ne laisser aucun doute à cet égard, il faudrait de nouvelles expériences directes.

Cette influence de la température sur le volume des liqueurs spiritueuses a lieu également dans toutes les opérations du mouillage, et entraînerait des erreurs notables, si on la négligeait. Le VIIe problème de *l'instruction pratique* enseigne à en tenir compte *).

Il ne me reste plus qu'à alléguer les raisons qui m'ont fait préférer le métal au verre dans la construction de l'Alkoomètre, quoiqu'il soit plus facile, soit de souffler un instrument de verre que d'en fabriquer un de laiton, soit d'écrire quatre divisions sur une bande de papier que de les graver sur du métal. La première raison est la solidité de l'instrument; car lorsqu'un alkoomètre est cassé, non seulement il faut en acheter un autre, mais (ce qui est bien plus important) le distillateur ne peut pas examiner ses liqueurs et risque par là, ou de sister son travail, ou de retarder ses envois jusqu'à l'arrivée du nouvel instrument. La seconde est que l'on peut donner plus d'égalité à la tige de l'alkoomètre de laiton que n'ont d'ordinaire les tubes de verre, même choisis. La troisième est que le bord du liquide à la surface de la tige de l'alkoomètre, déterminé par l'adhésion, est bien plus visible et par là plus facile à observer avec rigueur sur le laiton que sur une surface de verre, et par conséquent l'observation plus exacte.

Au reste j'avoue, d'après l'expérience que ces travaux m'ont donnée, que je ne conseillerais pas d'introduire les Alkoomètres de métal, malgré les raisons que je viens d'alléguer, parce que la construction de l'échelle sur le métal offre tant de difficultés de pratique, si l'on veut lui donner toute l'exactitude possible, qu'il est très probable que les ouvriers qu'on charge de ce travail n'y mettront pas le soin nécessaire.

---

*) La dilatation de l'eau étant peu considérable, Gay-Lussac l'a négligée, et je l'ai imité en cela dans l'instruction pratique. Cependant, comme l'eau se dilate de $+ 12°$ à $+ 24°$, d'environ 0,0034 ou de 0,34 W. sur 100 Wédros, on pourrait en tenir compte en diminuant le résultat trouvé pour la liqueur spiritueuse, d'autant que la température pour l'eau indiquerait. Au reste, ce serait une complication peu désirée et peu désirable.

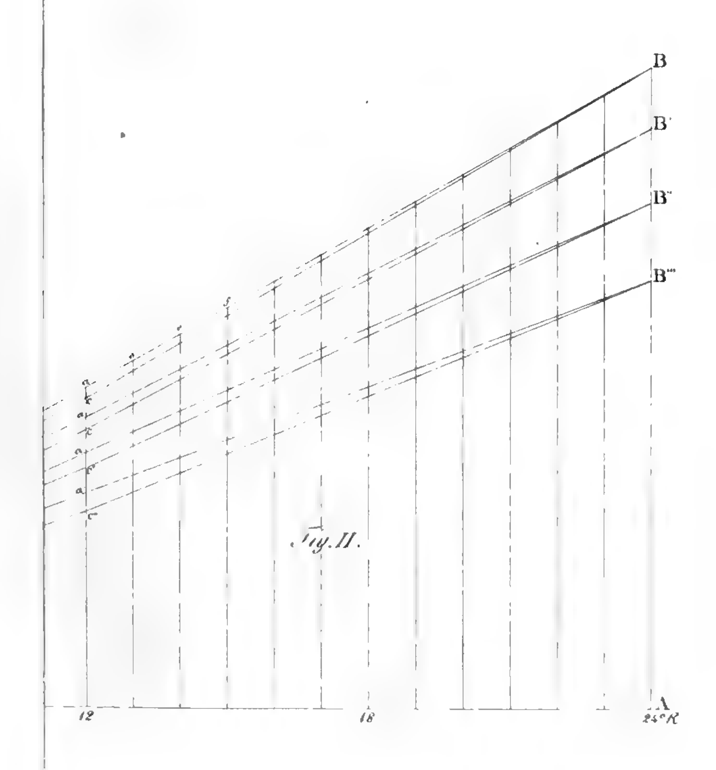
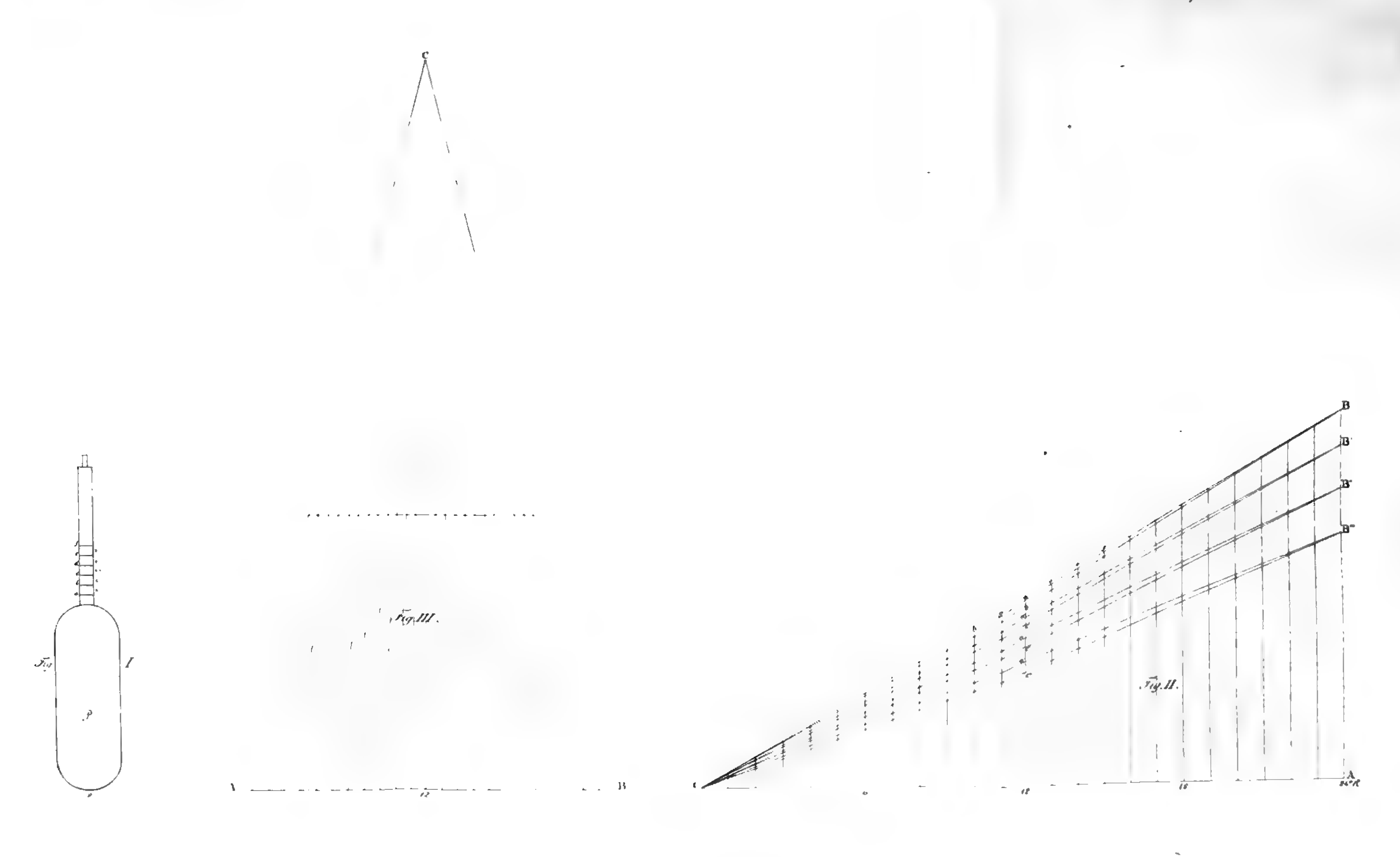


Fig. II.


C
Fig. I
Fig. III.
A
B
Fig. II.
B
B'
B''
B'''
A

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS

A DIFFÉRENCES PARTIELLES, RELATIVES

AUX

PETITES VIBRATIONS D'UN MILIEU ÉLASTIQUE;

PAR

M. OSTROGRADSKY.

(Lu le 10 Juin 1829.)

Imaginons un milieu élastique indéfini, et supposons qu'une cause quelconque déplace toutes les molécules de ce milieu de manière que la molécule qui, dans l'état naturel, occupait le point déterminé par les coordonnées rectangles x, y, z se trouve transportée au point dont les coordonnées sont :

$$x + f(x, y, z), \quad y + F(x, y, z), \quad z + \mathrm{f}(x, y, z),$$

et se trouve animée dans ce point des vitesses parallèles aux axes coordonnés, exprimées par

$$f_1(x, y, z), \quad F_1(x, y, z), \quad \mathrm{f}_1(x, y, z).$$

Les quantités $f(x, y, z)$ $F(x, y, z) \cdots \mathrm{f}_1(x, y, z)$ sont des fonctions, très petites, des variables x, y, z.

Désignons par $x + u$, $y + v$, $z + w$ les coordonnées de la même molécule au bout du temps t, l'origine du temps est rapportée à l'instant où toutes les molécules du milieu ont été deplacées de leur position naturelle.

Il est clair qu'on doit avoir pour $t=o$, quelles que soient x, y, z:

$$a)\quad \begin{cases} u=f(x, y, z), & v=F(x, y, z), & w=\mathfrak{f}(x, y, z), \\ \frac{du}{dt}=f_1(x, y, z), & \frac{dv}{dt}=F_1(x, y, z), & \frac{dw}{dt}=\mathfrak{f}_1(x, y, z); \end{cases}$$

De plus, les géomètres qui se sont occupés des petites vibrations des corps à l'élasticité uniforme, ont trouvé que les quantités u, v, w doivent vérifier les équations différentielles

$$b)\quad \begin{cases} o=\frac{d^2u}{dt^2}-k^2\left(3\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}+2\frac{d^2v}{dx\,dy}+2\frac{d^2w}{dx\,dz}\right) \\ o=\frac{d^2v}{dt^2}-k^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}+3\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}+2\frac{d^2u}{dx\,dy}+2\frac{d^2w}{dy\,dz}\right) \\ o=\frac{d^2w}{dt^2}-k^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+3\frac{d^2w}{dz^2}+2\frac{d^2u}{dx\,dz}+2\frac{d^2v}{dy\,dz}\right) \end{cases}$$

k^2 étant une constante.

La résolution des équations (a) et (b) est l'objet de cette note. Pour les intégrer supposons

$$c)\quad \begin{cases} u=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty} T_1\,\Psi\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \\ v=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty} T_2\,\Psi\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu \\ w=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty} T_3\,\Psi\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu. \end{cases}$$

Les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ sont des variables accessoires, $T_1\, T_2\, T_3$ sont des fonctions inconnues de $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ et du temps t; Ψ désigne, pour abréger, le produit $e^{(x-\lambda)\alpha\sqrt{-1}}\;e^{(y-\mu)\beta\sqrt{-1}}\;e^{(z-\nu)\gamma\sqrt{-1}}$. Pour trouver les fonctions T_1, T_2, T_3 nous remarquerons qu'on a d'abord, en faisant $t=o$,

$$d)\quad \begin{cases} T_1=f(\lambda, \mu, \nu), & T_2=F(\lambda, \mu, \nu), & T_3=\mathfrak{f}(\lambda, \mu, \nu) \\ \frac{dT_1}{dt}=f_1(\lambda, \mu, \nu), & \frac{dT_2}{dt}=F_1(\lambda, \mu, \nu), & \frac{dT_3}{dt}=\mathfrak{f}_1(\lambda, \mu, \nu) \end{cases}$$

on a ensuite, en substituant les seconds membres des équations (c) respectivement à la place de u, v, w, dans les équations (b), et désignant pour abréger $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ par ρ^2 :

$$o = \frac{d^2 T_1}{dt^2} + k^2 \varrho^2 T_1 + 2k^2 \alpha (\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3)$$

$$o = \frac{d^2 T_2}{dt^2} + k^2 \varrho^2 T_2 + 2k^2 \beta (\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3)$$

$$o = \frac{d^2 T_3}{dt^2} + k^2 \varrho^2 T_3 + 2k^2 \gamma (\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3)$$

d'où l'on tire

$$o = \frac{d^2 (\alpha T_2 - \beta T_1)}{dt^2} + k^2 \varrho^2 (\alpha T_2 - \beta T_1)$$

$$o = \frac{d^2 (\gamma T_1 - \alpha T_3)}{dt^2} + k^2 \varrho^2 (\gamma T_1 - \alpha T_3)$$

$$o = \frac{d^2 (\beta T_3 - \gamma T_2)}{dt^2} + k^2 \varrho^2 (\beta T_3 - \gamma T_2)$$

$$o = \frac{d^2 (\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3)}{dt^2} + 3k^2 \varrho^2 (\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3)$$

En intégrant ces équations de manière à satisfaire aux équations (d) on trouvera

$$\alpha T_2 - \beta T_1 = [\alpha F(\lambda, \mu, \nu) - \beta f(\lambda, \mu, \nu)] \cos. k\varrho t$$
$$+ \int_0^t [\alpha F_1 (\lambda, \mu, \nu) - \beta f_1 (\lambda, \mu, \nu)] \cos. k\varrho t \, dt,$$

$$\gamma T_1 - \alpha T_3 = [\gamma f(\lambda, \mu, \nu) - \alpha \mathrm{f} (\lambda, \mu, \nu)] \cos. k\varrho t$$
$$+ \int_0^t [\gamma f_1 (\lambda, \mu, \nu) - \alpha \mathrm{f}_1 (\lambda, \mu, \nu)] \cos. k\varrho t \, dt,$$

$$\beta T_3 - \gamma T_2 = [\beta \mathrm{f} (\lambda, \mu, \nu) - \gamma F(\lambda, \mu, \nu)] \cos. k\varrho t$$
$$+ \int_0^t [\beta \mathrm{f}_1 (\lambda, \mu, \nu) - \gamma F(\lambda, \mu, \nu)] \cos. k\varrho t \, dt,$$

$$\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3 = [\alpha f(\lambda, \mu, \nu) + \beta F(\lambda, \mu, \nu) + \gamma \mathrm{f} (\lambda, \mu, \nu)] \cos. k\varrho t \sqrt{3}$$
$$+ \int_0^t [\alpha f_1 (\lambda, \mu, \nu) + \beta F_1 (\lambda, \mu, \nu) + \gamma \mathrm{f}_1 (\lambda, \mu, \nu)] \cos. k\varrho t \sqrt{3} \, dt;$$

d'où l'on tire

$$T_1 = f(\lambda, \mu, \nu) \cos. k\varrho t + \int_0^t f_1 (\lambda, \mu, \nu) \cos. k\varrho t \, dt + k^2 p \alpha \sqrt{-1} + k^2 \alpha \sqrt{-1} \int_0^t q dt,$$

$$T_2 = F(\lambda, \mu, \nu) \cos. k\varrho t + \int_0^t F_1 (\lambda, \mu, \nu) \cos. k\varrho t \, dt + k^2 p \beta \sqrt{-1} + k^2 \beta \sqrt{-1} \int_0^t q dt,$$

$$T_3 = \mathrm{f} (\lambda, \mu, \nu) \cos. k\varrho t + \int_0^t \mathrm{f}_1 (\lambda, \mu, \nu) \cos. k\varrho t \, dt + k^2 p \gamma \sqrt{-1} + k^2 \gamma \sqrt{-1} \int_0^t q dt.$$

On a supposé pour abréger

$$p = [\alpha f(\lambda, \mu, \nu) + \beta F(\lambda, \mu, \nu) + \gamma \mathrm{f}(\lambda, \mu, \nu)] \frac{\cos. k\rho t - \cos. k\rho t \sqrt{3}}{k^2 \rho^2} \sqrt{-1}$$

$$q = [\alpha f_1(\lambda, \mu, \nu) + \beta F_1(\lambda, \mu, \nu) + \gamma \mathrm{f}_1(\lambda, \mu, \nu)] \frac{\cos. k\rho t - \cos. k\rho t \sqrt{3}}{k^2 \rho^2} \sqrt{-1}.$$

En faisant attention que

$$\frac{\cos. k\rho t - \cos. k\rho t \sqrt{3}}{k^2 \rho^2} = \int_t^{t\sqrt{3}} \int_0^{\tau} \cos. k\rho r\, dr\, d\tau$$

on aura

$$p = \sqrt{-1} \int_t^{t\sqrt{3}} \int_0^{\tau} [\alpha f(\lambda,\mu,\nu) + \beta F(\lambda,\mu,\nu) + \gamma \mathrm{f}(\lambda,\mu,\nu)] \cos. k\rho r\, dr\, d\tau$$

$$q = \sqrt{-1} \int_t^{t\sqrt{3}} \int_0^{\tau} [\alpha f_1(\lambda,\mu,\nu) + \beta F_1(\lambda,\mu,\nu) + \gamma \mathrm{f}_1(\lambda,\mu,\nu)] \cos. k\rho r\, dr\, d\tau.$$

En multipliant les valeurs de T_1 T_2 T_3 par $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \Psi\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$, en intégrant ensuite le résultat par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et supposant pour abréger

$$Y = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} p\, \Psi\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu, \quad U = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} q\, \Psi\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

on aura

$$u = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, \mu, \nu)\, \Psi \cos. k\rho t\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^t dt \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda,\mu,\nu)\, \Psi \cos. k\rho t\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu + k^2 \left(\frac{dY}{dx} + \int_0^t \frac{dU}{dx} dt\right)$$

$$v = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda, \mu, \nu)\, \Psi \cos. k\rho t\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^t dt \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\lambda,\mu,\nu)\, \Psi \cos. k\rho t\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu + k^2 \left(\frac{dY}{dy} + \int_0^t \frac{dU}{dy} dt\right)$$

$$w = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(\lambda, \mu, \nu)\, \Psi \cos. k\rho t\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_0^t dt \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}_1(\lambda,\mu,\nu)\, \Psi \cos. k\rho t\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\lambda\, d\mu\, d\nu + k^2 \left(\frac{dY}{dz} + \int_0^t \frac{dU}{dz} dt\right)$$

$$Y=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_t^{t\sqrt{3}}\int_0^{\tau}\Big[\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda,\mu,\nu)\,\Psi\cos.k\varrho r\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu$$

$$+\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda,\mu,\nu)\,\Psi\cos.k\varrho r\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu$$

$$+\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathfrak{f}(\lambda,\mu,\nu)\,\Psi\cos.k\varrho r\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\Big]\,dr\,d\tau$$

on aura la valeur de U en changeant dans celle de Y, f, F, $\mathfrak{f}$, respectivement en f_1, F_1, $\mathfrak{f}_1$.

Maintenant si l'on observe que

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\lambda,\mu,\nu)\,\Psi\cos.k\varrho r\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\lambda\,d\mu\,d\nu$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+kr\cos.p\sin.q,\ y+kr\sin.p\sin.q,\ z+kr\cos.q)\,r\sin.q\,dp\,dq$$

on obtiendra

$$4\pi u=\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(x+kt\cos.p\sin.q,\ y+kt\sin.p\sin.q,\ z+kt\cos.q)\,t\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f_1(x+kt\cos.p\sin.q, y+kt\sin.p\sin.q, z+kt\cos.q)\,t\sin.q\,dp\,dq+k^2\left(\frac{dY}{dx}+\int_0^t\frac{dU}{dx}\,dt\right)$$

$$4\pi v=\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F(x+kt\cos.p\sin.q,\ y+kt\sin.p\sin.q,\ z+kt\cos.q)\,t\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F_1(x+kt\cos.p\sin.q,y+kt\sin.p\sin.q,z+kt\cos.q)\,t\sin.q\,dp\,dq+k^2\left(\frac{dY}{dy}+\int_0^t\frac{dU}{dy}\,dt\right)$$

$$4\pi w=\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{f}(x+kt\cos.p\sin.q,\ y+kt\sin.p\sin.q,\ z+kt\cos.q)\,t\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{f}_1(x+kt\cos.p\sin.q, y+kt\sin.p\sin.q, z+kt\cos.q)\,t\sin.q\,dp\,dq+k^2\left(\frac{dY}{z}+\int_0^t\frac{dU}{dz}\,dt\right)$$

$$Y=\int_t^{t\sqrt{3}}\Big[\frac{d}{dx}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(x+k\tau\cos.p\sin.q,\ y+k\tau\sin.p\sin.q,\ z+k\tau\cos.q)\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{d}{dy}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}F(x+k\tau\cos.p\sin.q,\ y+k\tau\sin.p\sin.q,\ z+k\tau\cos.q)\sin.q\,dp\,dq$$

$$+\frac{d}{dz}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{f}(x+k\tau\cos.p\sin.q, y+k\tau\sin.p\sin.q, z+k\tau\cos.q)\sin.q\,dp\,dq\Big]\,\tau\,d$$

$$U = \int_t^{t\sqrt{3}} \left[\frac{d}{dx} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x+k\tau\cos.p\sin.q,\ y+k\tau\sin.p\sin.q,\ z+k\tau\cos.q)\sin.q\,dp\,dq \right.$$

$$+ \frac{d}{dy} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F_1(x+k\tau\cos.p\sin.q,\ y+k\tau\sin.p\sin.q,\ z+k\tau\cos.q)\sin.q\,dp\,dq$$

$$\left. + \frac{d}{dz} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{f}_1(x+k\tau\cos.p\sin.q,\ y+k\tau\sin.p\sin.q,\ z+k\tau\cos.q)\sin.q\,dp\,dq \right] \tau\, d\tau$$

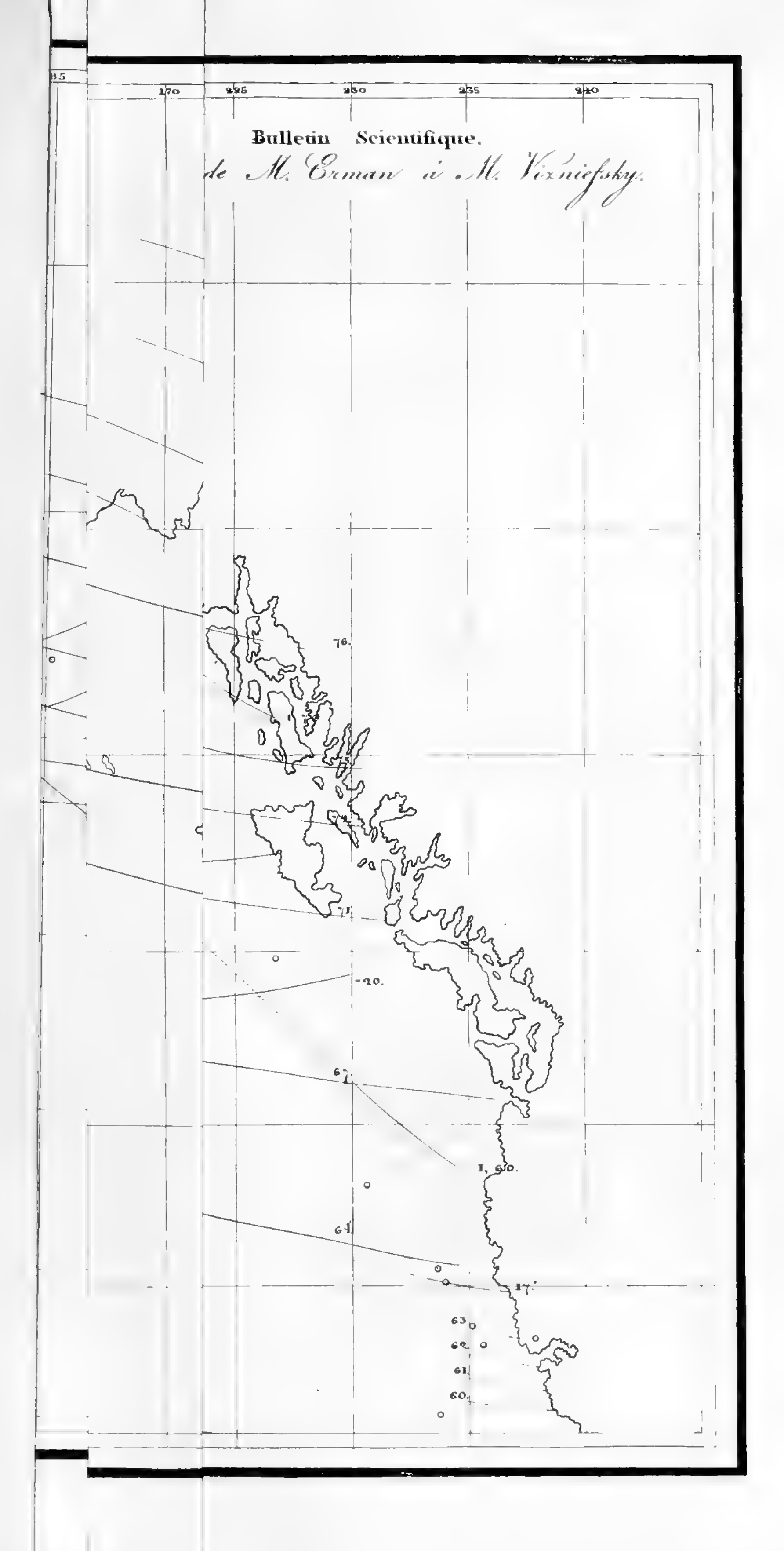
telles sont les intégrales des équations à différences partielles relatives aux petites vibrations d'un milieu élastique, en admettant toutefois que l'élasticité soit partout la même.

Si le dérangement primitif n'avait lieu que dans une portion terminée de l'espace élastique, les fonctions $f(x,y,z)$, $F(x,y,z) \cdots \mathrm{f}_1(x,y,z)$ n'auront des valeurs sensibles que dans l'étendue du volume dérangé et se réduiront chacune à zéro. Dans le reste de l'espace les intégrales précédentes conviendront à ce cas, pourvu qu'il n'y ait point de saut brusque ni dans la valeur des $f(x,y,z)$, $F(x,y,z) \cdots \mathrm{f}_1(x,y,z)$ ni dans celle de leurs dérivées partielles relativement à x, y, z.

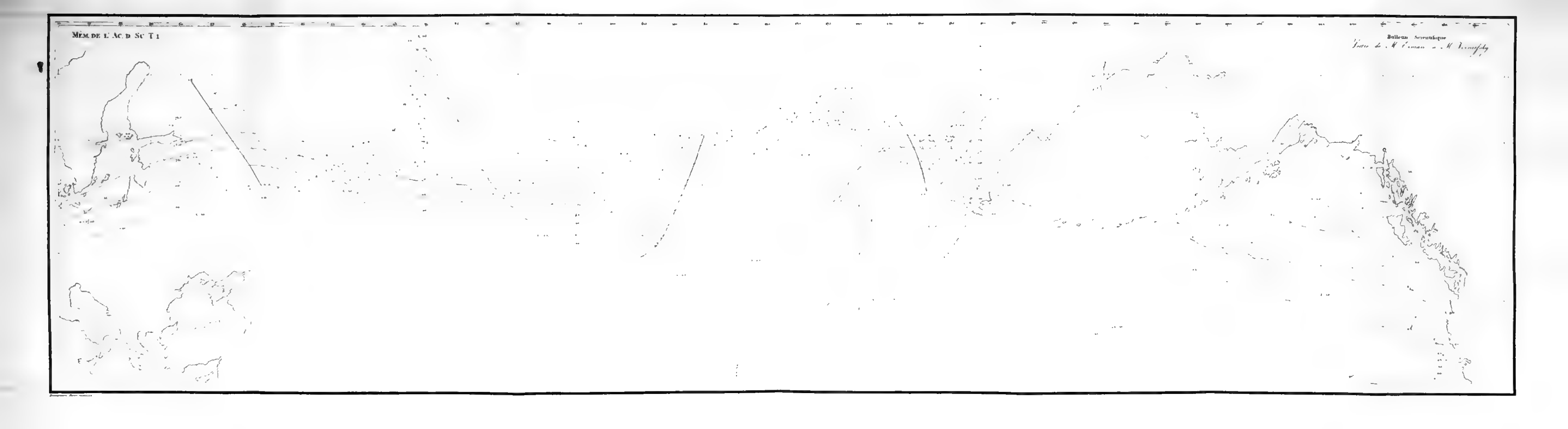
Il est intéressant de connaître l'instant où le mouvement commence, et celui où le mouvement finit, dans un point donné de l'espace. Pour déterminer ces instants considérons une des fonctions $f(x,y,z) \cdots \mathrm{f}_1(x,y,z)$, par exemple la première. Pour savoir si $f(x+r\cos.p\cos.q,\ y+r\sin.p\sin.q,\ z+r\cos.q)$ est sensible ou non, il n'y a qu'à décrire du point (x,y,z) comme centre et avec le rayon r une surface sphérique, la fonction $f(x+r\cos.p\sin.q,\ y+r\sin.p\sin.q,\ z+r\cos.q)$ sera différente de zéro pour toute la partie de la surface sphérique qui sera comprise dans le volume primitivement dérangé; donc cette fonction commence à avoir des valeurs sensibles quand r sera égal à la plus petite distance du point (x,y,z) au volume dérangé, et se réduira de nouveau à zéro quand r deviendra égal à la plus grande distance du même point au même volume. Il en est de même pour les autres fonctions F, $\mathrm{f} \cdots \mathrm{f}_1$.

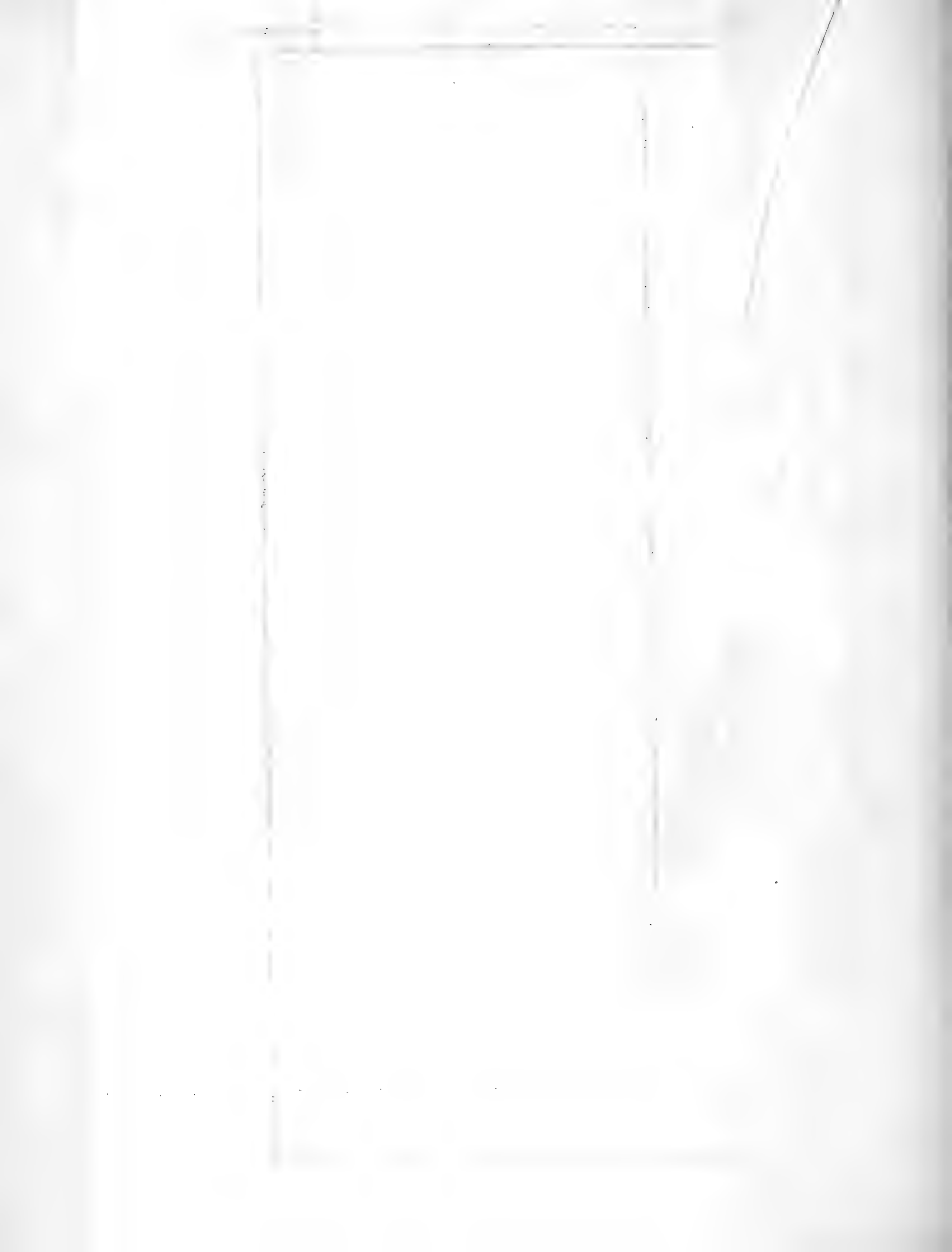
Cela posé, il est évident que les quantités Y et U deviendront sensibles quand $t = \frac{R_0}{k\sqrt{3}}$ et cesseront de l'être quand $t = \frac{R_1}{k}$, R_0 et R_1 étant la plus grande et la

plus petite distance du point (x, y, z) au volume primitivement mis en mouvement. Les parties de u, v, w indépendentes de Y et U deviendront sensibles plus tard, savoir quand $t = \frac{R_0}{k}$, et elles disparaîtront en même temps que Y et U. Donc le mouvement au point quelconque commence quand $t = \frac{R_0}{k\sqrt{3}}$, il finit quand $t = \frac{R_1}{k}$, et par conséquent le mouvement dure pendant le temps $= \frac{R_1\sqrt{3} - R_0}{k\sqrt{3}}$. En sorte que la durée du mouvement est en raison inverse de l'élasticité k, et ne dépend point du dérangement primitif.



Bulletin Scientifique.
de M. Erman à M. Vizniefsky.
170
225
230
235
240
76.
-20.
67
I, 60.
64
63
62
61
60


Bulletin Scientifique



100 110

160

150

140

130

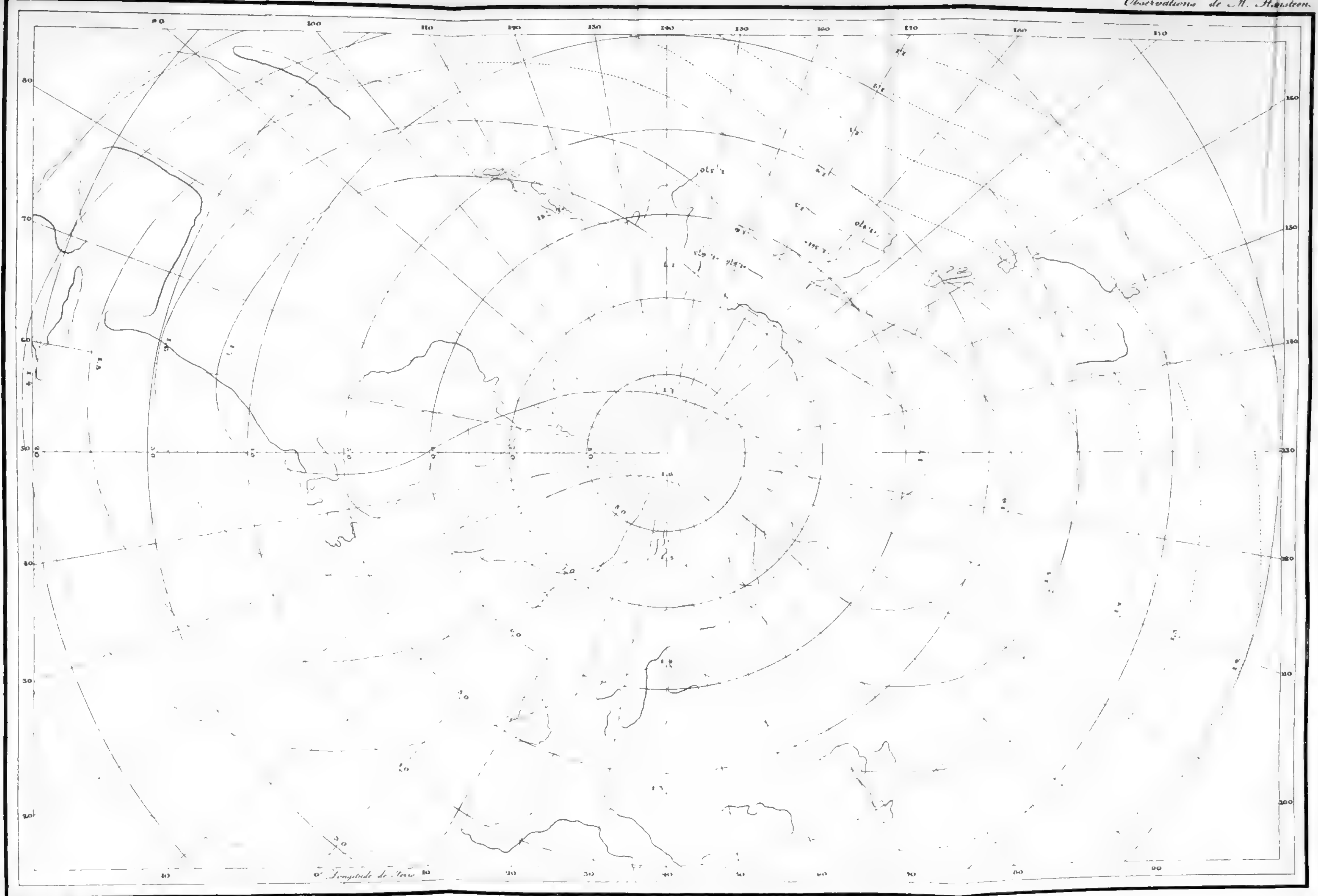
120

110

100

1.6 1.5 1.4 1.3 1.2

80 90


0° Longitude de Ferro

SUR LES

MAXIMA ET LES MINIMA

DES

FONCTIONS A DEUX VARIABLES;

PAR

M. BOUNIAKOWSKY.

(Lu le 11 Novembre 1829.)

On sait par la théorie du Calcul différentiel que pour qu'une fonction d'une ou de plusieurs variables admette un *maximum* ou un *minimum*, il faut que sa différentielle du premier ordre devienne nulle, et qu'en même tems sa différentielle du second ordre soit constamment négative pour le maximum, et constamment positive pour le minimum, quelles que soient les différentielles des variables indépendantes qui composent la fonction.

En partant de ces principes, les Géomètres ont déterminé les caractères auxquels on peut reconnaître si les valeurs des variables indépendantes qui font anéantir la première différentielle de la fonction, rendent cette même fonction ou *maximum* ou *minimum*, ou bien: si ces valeurs ne font qu'anéantir la différentielle première de la fonction, sans la rendre ni *maximum* ni *minimum*.

Si les valeurs des variables indépendantes qui rendent nulle la première différentielle de la fonction, font disparaître aussi sa différentielle seconde, la fonction n'admettra ni maximum ni minimum, à moins que les mêmes valeurs des variables indépendantes ne réduisent aussi à zéro la différentielle 3me de la fonction, et qu'elles

ne rendent la différentielle 4me constamment positive ou constamment négative, quelles que soient les valeurs des différentielles des variables indépendantes.

Je n'ai vu nulle part ces principes fournir des caractères, auxquels on puisse reconnaître si les valeurs des variables indépendantes qui rendent nulles les trois premières différentielles de la fonction, rendent cette même fonction un *maximum* ou un *minimum*. Je me propose ici de déterminer ces caractères, en me bornant au cas de deux variables indépendantes, me proposant d'y revenir plus tard et d'étendre, s'il est possible, les mêmes considérations à un nombre quelconque de variables.

Désignons par x et y deux variables indépendantes, et par $z = f(x, y)$ une fonction de ces deux variables.

Supposons que les valeurs $x = a$, $y = b$, font disparaître les différentielles

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$$

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2z}{dx\,dy} dx\,dy + \frac{d^2z}{dy^2} dy^2$$

$$d^3z = \frac{d^3z}{dx^3} dx^3 + 3 \frac{d^3z}{dx^2 dy} dx^2 dy + 3 \frac{d^3z}{dx\,dy^2} dx\,dy^2 + \frac{d^3z}{dy^3} dy^3$$

quelles que soient dx et dy, ou ce qui revient au même, qu'elles fassent disparaître les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ .... $\frac{d^3z}{dy^3}$. On demande si la fonction $f(a, b)$ est un *maximum* ou un *minimum* de $f(x, y)$. Si cette fonction est un *minimum*, la différentielle

$$d^4z = \frac{d^4z}{dx^4} dx^4 + 4 \frac{d^4z}{dx^3dy} dx^3dy + 6 \frac{d^4z}{dx^2dy^2} dx^2dy^2 + 4 \frac{d^4z}{dx\,dy^3} dx\,dy^3 + \frac{d^4z}{dy^4} dy^4$$

pour $x = a$, $y = b$, doit nécessairement et constamment être positive. Cette même différentielle doit nécessairement et constamment être négative si $f(a, b)$ est un *maximum*, les différentielles dx et dy étant arbitraires.

En supposant pour abréger

$$\frac{d^4z}{dx^4} = A;\ \frac{d^4z}{dx^3dy} = B;\ \frac{d^4z}{dx^2dy^2} = C;\ \frac{d^4z}{dx\,dy^3} = D;\ \frac{d^4z}{dy^4} = E,$$

e problème se réduira à déterminer les conditions nécessaires pour que la fonction

$$A\,dx^4 + 4B\,dx^3\,dy + 6C\,dx^2\,dy^2 + 4D\,dx\,dy^3 + E\,dy^4$$

demeure constamment positive ou constamment négative.

Cette fonction sera constamment positive ou négative en même tems que

$$A\lambda^4 + 4B\lambda^3 + 6C\lambda^2 + 4D\lambda + E$$

λ étant quelconque.

Pour que cette dernière expression soit constamment positive ou négative, il faut que la fonction

$$1)\qquad \lambda^4 + \frac{4B}{A}\lambda^3 + \frac{6C}{A}\lambda^2 + \frac{4D}{A}\lambda + \frac{E}{A}$$

soit constamment positive. Cette condition ayant lieu, $f(a, b)$ sera *maximum* si $A < 0$, et *minimum* si $A > 0$; tout se réduit donc à trouver les conditions nécessaires pour que l'expression (1) soit positive pour toutes les valeurs réelles de λ, ou ce qui revient au même pour que l'équation

$$2)\qquad \lambda^4 + \frac{4B}{A}\lambda^3 + \frac{6C}{A}\lambda^2 + \frac{4D}{A}\lambda + \frac{E}{A} = 0$$

n'ait que des racines imaginaires.

On peut observer d'abord que $\frac{E}{A}$ doit être positif, et que par conséquent les quantités A et E sont de même signe. Si cette condition n'est pas satisfaite, $f(a, b)$ ne sera ni maximum ni minimum de $f(x, y)$, et les recherches ultérieures seront inutiles.

Désignons pour abréger par

$$3)\qquad A' = \frac{B}{A};\quad B' = \frac{C}{A};\quad C' = \frac{D}{A};\quad D' = \frac{E}{A},$$

l'équation (2), dont toutes les racines doivent être imaginaires, deviendra

$$4)\qquad \lambda^4 + 4A'\lambda^3 + 6B'\lambda^2 + 4C'\lambda + D' = 0.$$

Or, cette équation pourra être décomposée en deux facteurs du second degré; en sorte qu'en désignant par μ une racine de l'équation

$$5)\qquad \mu^6 + 12(B' - A'^2)\mu^4 - 4(D' - 9B'^2 - 4C'A' + 24B'A'^2 - 12A'^4)\mu^2 - 16(C' - 3A'B' + 2A'^3)^2 = 0,$$

la formule (4) deviendra:

$$6)\ \left[\lambda^2+(2A'+\mu)\lambda+\frac{\mu^3+2A'\mu^2+2(3B'-2A'^2)\mu+4(C'-3A'B'+2A'^3)}{2\mu}\right]\times$$
$$\left[\lambda^2+(2A'-\mu)\lambda+\frac{\mu^3-2A'\mu^2+2(3B'-2A'^2)\mu-4(C'-3A'B'+2A'^3)}{2\mu}\right]=o$$

Les équations (5) et (6) montrent que l'équation (4) peut être décomposée en facteurs du second degré de trois manières différentes; mais comme cette équation doit avoir toutes ses racines imaginaires, elle ne pourra être décomposée en facteurs réels du second degré que d'une seule manière, ce qui exige que l'équation (5), résolue par rapport à la quantité μ^2, n'ait qu'une seule racine positive. Il est évident d'abord, que cette équation aura nécessairement une racine μ^2 positive, mais il faut encore qu'elle n'ait qu'une seule racine de cette nature; par conséquent il faut que les deux autres racines de cette équation soient imaginaires, ou réelles, mais négatives.

Si ces racines sont imaginaires, l'inégalité

$$7)\ (B'D'-C'^2-B'^3+2C'B'A'-D'A'^2)^2-\tfrac{1}{27}(D'+3B'^2-4C'A')^3>0$$

sera satisfaite, et la fonction (4) sera constamment positive. Si l'inégalité (7) n'est pas satisfaite, les racines de l'équation (5) seront toutes réelles, mais à cause du dernier terme négatif, ces racines seront ou toutes trois positives, ou il n'y en aura de positive qu'une seule. Si les trois racines de cette équation sont positives, le coefficient de μ^4 sera négatif et celui de μ^2 sera positif; si une de ces deux conditions n'est pas remplie, l'équation (5) n'aura qu'une seule racine positive. Donc, dans le cas même ou l'inégalité (7) ne sera pas satisfaite, la fonction (4) restera encore constamment positive, si une des inégalités

$$B'-A'^2>0$$
$$D'-9B'^2-4C'A'+24B'A'^2-12A'^4>0$$

est satisfaite.

Or la fonction

$$\lambda^4+\frac{4B}{A}\lambda^3+\frac{6C}{A}\lambda^2+\frac{4D}{A}\lambda+\frac{E}{A}$$

restant constamment positive en même tems que

$$\frac{A}{E}+\frac{4B}{E}\lambda+\frac{6C}{E}\lambda^2+\frac{4D}{E}\lambda^3+\lambda^4,$$

il faudra définitivement [en vertu des équations (3), (7) et (8)], pour que chacune de ces deux fonctions reste constamment positive, qu'une quelconque des cinq inégalités

$$9)\quad \begin{cases} AC - B^2 > 0 \qquad EC - D^2 > 0 \\ EA^3 - (4BD + 9C^2)A^2 + 24B^2CA - 12B^4 > 0 \\ AE^3 - (4BD + 9C^2)E^2 + 24D^2CE - 12D^4 > 0 \\ (ECA - D^2A - EB^2 - C^3 + 2DCB)^2 - \frac{1}{27}(EA + 3C^2 - 4DB)^3 > 0 \end{cases}$$

soit satisfaite. Donc, pour que $f(a, b)$ soit un *maximum* ou un *minimum* de $f(x, y)$, il faut 1° que les quantités A et E soient de même signe; 2° qu'une des cinq inégalités (9) soit satisfaite. On sera assuré alors que la fonction $f(a, b)$ est un *maximum* ou un *minimum* de $f(x, y)$, et en particulier, elle sera un *maximum* si les quantités A et E sont toutes deux négatives, et un *minimum* si ces quantités sont toutes deux positives.

Nous ne nous arrêterons pas à examiner le cas particulier où deux racines, ou même toutes les quatres, de l'équation (2) deviendraient égales entr'elles; ce cas ne présentant aucune difficulté, le lecteur pourra facilement suppléer à cette omission. Il ne nous reste qu'à montrer l'application de ce que nous venons de dire à un exemple particulier.

Soit une surface du quatrième ordre, représentée par l'équation

$$z = a + bx^4 + cx^2y^2 + dy^4;$$

cherchons si cette surface admet un maximum ou un minimum pour $x = o$, $y = o$; c'est à dire si $z = a$, représente ou non une valeur maximum ou minimum. On trouvera

$$A = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot b, \quad B = o, \quad C = 2 \cdot 2 \cdot c, \quad D = o, \quad E = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot d.$$

Il faudra donc d'abord que b et d soient de même signe, sans quoi z ne saurait admettre ni maximum ni minimum. Ensuite les valeurs précédentes de A, B, C, D, E étant substituées dans les inégalités (9), deux premières de ces inégalités exigent que

*

les quantités b, c, d soient de même signe; cette condition exige trop. En effet, la troisième, la quatrième et la cinquième, inégalités exigent seulement que

$$4bd - c^2 > 0.$$

Cette dernière condition est la plus étendue. Donc l'ordonnée a sera l'ordonnée *maximum* si, b et d étant négatifs, l'inégalité $4bd - c^2 > 0$ a lieu, et *minimum* si, la dernière inégalité étant satisfaite, b et d sont positifs.

SUR LA

DÉCOMPOSITION DE L'ALCOOL

PAR LA POTASSE;

PAR

M. HESS.

(Lu le 25 Août 1830.)

Lorsqu'on prépare une dissolution alcoolique de potasse, elle est d'abord incolore, mais peu après elle prend une teinte jaunâtre qui enfin passe au brun foncé. On a prétendu que l'alcool se trouvait décomposé en matière résineuse qui colore la dissolution, en acide acétique et en acide carbonique. Mais on a élevé à juste titre des doutes contre cette explication. Il est connu que dans la préparation de la potasse caustique dite potasse à l'alcool, la matière résineuse, si on continue l'évaporation jusque vers la fin, se transforme en charbon, que, quand on enlève ce charbon et qu'on élève la chaleur jusqu'à la fusion de la potasse, celle-ci contient bien une petite quantité d'acide carbonique, mais personne n'a remarqué qu'il y eut décomposition d'acide acétique. En outre M. Berzelius dit positivement ne pas se souvenir que quelqu'un ait fait des expériences directes à ce sujet.

Pour savoir si la décomposition de l'alcool par la potasse pouvait avoir lieu sans le contact de l'air, je remplis un tube de verre qui était fermé par un bout, d'une dissolution alcoolique de potasse, et je le renversai sur du mercure. Au bout de quelque temps, la dissolution se colora en brun, laissa déposer une très petite quan-

tité de la matière résineuse sous forme d'une poudre brune foncée, devint ensuite transparente et ne changea plus. Il ne se déposa point de carbonate de potasse. La même expérience répétée à une température élevée jusqu'à l'ébullition du liquide, donna lieu au même résultat; outre qu'il se degagea une petite quantité de gaz qui comportait à peine $\frac{1}{25}$ du volume du liquide. Mais comme ce gaz s'était dégagé avant l'ébullition complète il ne pouvait provenir que d'une petite quantité d'air atmosphérique qui avait été retenue par l'alcool. Pour vérifier cette supposition, je répétai l'expérience avec une dissolution préparée avec de l'alcool qui venait de bouillir, pour en chasser l'air en grande partie. Cette fois la quantité du gaz dégagé comporta à peine la moitié de celle qu'avait fourni l'expérience précédente. Je crois donc pouvoir en conclure que la décomposition de l'alcool par la potasse caustique ne donne lieu à aucun produit gazeux.

Pour savoir quelle influence l'air exerçait sur cette décomposition, une petite cloche remplie de la dissolution alcoolique fut renversée sur du mercure et on y introduisit ensuite de l'air atmosphérique. Il y eut bientôt absorption; supposant que c'était l'oxigène qui avait été absorbé, j'en fis entrer une portion assez considérable qui disparut toute. Je répétai l'expérience en introduisant dans la cloche volumes égaux d'oxigène et de dissolution. A mesure que l'oxigène était absorbé il se formait de plus en plus un précipité brun foncé, et cela durait tant que la cloche contenait encore de l'oxigène; on ne vit point se déposer de carbonate potassique. Cette absorption d'oxigène ne marche que lentement à la température de 20° Ct. mais elle peut être accélérée si on expose l'appareil à l'action du soleil.

Une quantité assez considérable d'une dissolution alcoolique de potasse fut distillée pour enlever la majeure partie de l'alcool; on versa ensuite le produit de la distillation sur le résidu qui se trouvait dans la cornue et répéta cette expérience plusieurs fois, après quoi l'alcool, ayant été séparé en dernier lieu de la potasse par une nouvelle distillation, le résidu de potasse, qui paraît être un alcoolate, fut dissout dans l'eau et distillé de nouveau. Le produit de cette distillation fut de l'esprit de vin à 54 p. C. d'alcool selon l'alcoolomètre de Richter. Il est clair que si la

décomposition de l'alcool par la potasse caustique donne lieu, entre autres produits, à de l'acide acétique, toute la quantité d'acide acétique qui aurait pu se former, devait se retrouver en combinaison avec la potasse. Celle-ci fut donc saturée d'acide sulfurique, jusqu'à ce qu'il y en ait eu un léger excès dans la dissolution. Il ne se manifesta aucune odeur d'acide acétique. La dissolution soumise à une nouvelle distillation, dont le produit fut fractionné, le liquide obtenu avait toujours la pesanteur spécifique de l'eau, et n'exerçait pas la moindre réaction sur le papier de tournesol. Il avait une odeur fétide très désagréable. Il paraît donc qu'il ne se forme point d'acide acétique à cette occasion.

Pour connaître les propriétés de la matière résineuse j'étais embarassé de trouver le moyen de la préparer en quantité suffisante, vu que la formation ordinaire n'en produit que très peu. M. Doebereiner (*Beiträge zur physikalischen Chemie Th. IV. Jena* 1824) dit que l'éther à oxigène, (*Sauerstoffäther*) qu'il croit avoir découvert mais dont il ne démontre pas la composition, se transforme par l'action de la potasse caustique en matière résineuse. J'ai pensé que cette matière résineuse pourrait avoir quelque analogie avec celle dont je m'occupai, je tachai donc de m'en procurer, mais traitant l'alcool par l'acide sulfurique et le suroxide manganique dans les proportions indiquées par M. Doebereiner, je ne suis parvenu à obtenir que de l'éther ordinaire (éther sulfurique). M. Liebig, dans son beau mémoire sur le noir de platine (Annales de Chimie et de Physique Tome 42. p. 321.) dit, que quand on fait nager un morceau de verre qui contient de l'alcool et du noir de platine, sur une dissolution de potasse caustique, la potasse se colore en jaune, que cette couleur augmente, et qu'il se forme un précipité. J'ai répété cette expérience et j'ai trouvé effectivement qu'on pouvait se procurer cette matière à volonté et en abondance; que de plus elle jouissait des mêmes propriétés que celle qu'on obtient par la décomposition de l'alcool par la potasse caustique. Pour se procurer cette substance en quantité assez considérable, il suffit donc de verser un dissolution alcoolique de potasse dans une capsule de verre large et plate, de recouvrir la capsule par un entonnoir renversé comme le fait M. Liebig, et de suspendre horizontalement et très peu

au-dessus du liquide un verre de montre qui contient du noir de platine. Quand il s'est formé une quantité suffisante de cette substance, ce qui a déjà lieu au bout de deux ou trois jours, on sature la dissolution de potasse pas l'acide muriatique; et la substance précipitée par cet acide se rassemble ordinairement à la surface du liquide, y étant portée par un léger dégagement d'acide carbonique, on filtre et on lave à l'eau froide, car l'eau bouillante dissoudrait une partie de la substance. Obtenue de cette manière et séchée dans le vide sur de l'acide sulfurique, elle est d'un jaune de safran; elle est très légère, très poreuse, possède une odeur particulière qui ressemble un peu à celle de quelque résine odorifère comme l'Elémi: elle est soluble dans l'alcool, très soluble dans l'éther, peu soluble dans l'eau chaude, pas dans l'eau froide. Il lui manque une des propriétés principales des résines: l'élévation de température ne la fait point fondre, mais parvenue à un certain degré la décompose et laisse une quantité considérable de charbon. L'acide sulfurique la transforme en charbon, sans qu'il y ait un dégagement de gaz remarquable. Le charbon qu'on obtient est très poreux et attire l'humidité en si peu de temps qu'il n'est guère possible de le peser avec quelque précision. Elle ne se combine pas avec les acides et paraît ne point former de combinaisons fixes avec les alcalis. Toutes ces propriétés sont communes tant à la substance qu'on obtient par le procédé de M. Liebig qu'à celle qui est produite par la décomposition spontanée de l'alcool par la potasse caustique.

Si l'on considère que selon M. Duflos l'éther traité par la potasse caustique se décompose d'une manière analogue, que M. Doebereiner à trouvé que l'éther nitreux produit aussi une quantité considérable de cette substance par le même traitement: on sera conduit à admettre dans ces divers cas un même phénomène, c'est que l'alcool et l'éther, qui l'un et l'autre, en se combinant à l'oxigène, se transforment en acide acétique, sont dans ce cas déterminés par la potasse caustique à se transformer en cette substance dont il est question.

Il faut pourtant bien remarquer que cette action pourrait ne pas être immédiate quoiqu'en tout cas dépendante d'une oxidation, car selon la manière dont je m'y suis

pris pour préparer la substance, il n'y avait pourtant que la vapeur d'alcool qui peut se trouver en contact avec l'oxigène et le noir de platine, et non la dissolution qui contenait la potasse. Or on sait que dans ces circonstances il se forme de l'acide acétique ce dont il est facile de s'assûrer. Mais cet acide possède une odeur éthérée particulière, et désagréable. Je fis une expérience pour voir si la potasse exposée à cette action ne se saturait pas d'acide. Je pesai deux portions égales d'une dissolution alcoolique de potasse. L'une d'elles fut de suite étendue d'eau saturée par l'acide muriatique, jusqu'à ce que le papier de tournesol indiqna une légère réaction acide. La quantité de l'acide employé était de $4^{g}, 74$. L'autre, exposée pendant 24 heures à l'action du noir de platine et de l'air, devint tout-à-fait foncée et forma un précipité assez abondant; saturée par l'acide muriatique au même degré, la quantité qu'il en fallut était de $4^{g}, 75$. Il se pourrait fort bien d'après cette expérience, qu'il se forma par la voie de l'oxidation un éther qui n'est pas encore connu et que ce soit le contact de l'éther avec la potasse qui produise la substance en question. J'avancerai encore à cette occasion ce qui m'a engagé à faire ces expériences: J'avais un flacon à large goulot, à demi rempli d'une dissolution alcoolique de potasse, et fermé par un bouchon frotté à l'éméri. Lorsque le flacon fut ouvert il se répandit dans la chambre une odeur d'éther, fort remarquable et qui fut sentie et reconnue au premier abord par des personnes qui ne connaissent de l'éther que par son odeur; je n'ai pourtant pas pu parvenir à obtenir la moindre quantité d'éther en traitant l'alcool par la potasse caustique.

Quant à la composition de la substance dite résineuse, je n'hasarde pas de vouloir la démontrer, car quoique j'en aie fait plusieurs analyses, elles n'ont fait que me donner quelques idées sur la nature du phénomène qui a lieu à l'occasion de sa formation. Je m'abstiens de les communiquer car n'ayant pas encore découvert une combinaison fixe de la substance dont il s'agit, je compte revenir encore sur ce sujet.

D U

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS

EN SERIES

SUIVANT LES FACULTÉS NUMÉRIQUES DES VARIABLES:

PAR

M. COLLINS.

(Lu le 5 Mai 1830.)

§. 1. Soit fx une fonction donnée, susceptible d'être transformée en une série, finie ou infinie, de cette forme:

$$A + \overset{1}{A} x^{1|\delta} + \overset{2}{A} x^{2|\delta} + \overset{3}{A} x^{3|\delta} + \cdots = S\,[\overset{n}{A} x^{n|\delta}]$$

où les coëfficiens, $A, \overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \cdots \overset{n}{A}$, et la différence δ sont des quantités indépendantes de la variable x. Proposons nous de chercher la loi de la formation des coëfficiens $\overset{n}{A}$, et, pour ce but, supposons que la variable x reçoive un accroissement quelconque h: le binome de KRAMP nous fournira cette équation:

$$\begin{aligned} f(x+h) = {} & A + \overset{1}{A} h^{1|\delta} + \overset{2}{A} h^{2|\delta} + \overset{3}{A} h^{3|\delta} + \cdots\cdots \\ & + (\overset{1}{A} + 2_1 \overset{2}{A} h^{1|\delta} + 3_2 \overset{3}{A} h^{2|\delta} + 4_3 \overset{4}{A} h^{3|\delta} + \cdots)\, x^{1|\delta} \\ & + (\overset{2}{A} + 3_1 \overset{3}{A} h^{1|\delta} + 4_2 \overset{4}{A} h^{2|\delta} + 5_3 \overset{5}{A} h^{3|\delta} + \cdots)\, x^{2|\delta} \end{aligned}$$

etc. etc.

Faisons: $\overset{1}{A} + 2_1\, \overset{2}{A} x^{1|\delta} + 3_2\, \overset{3}{A} x^{2|\delta} + \cdots = {}^{\delta}(fx)'$ ou ${}^{\delta}f'x$

$$\overset{2}{A} + 3_1\, \overset{3}{A} x^{1|\delta} + 4_2\, \overset{4}{A} x^{2|\delta} + \cdots = \frac{{}^{\delta}(fx)''}{2\,!} \text{ ou } \frac{{}^{\delta}f''x}{2\,!}$$

$$\overset{3}{A} + 4_1\, \overset{4}{A} x^{1|\delta} + 5_2\, \overset{5}{A} x^{2|\delta} + \cdots = \frac{{}^{\delta}(fx)'''}{3\,!} \text{ ou } \frac{{}^{\delta}f'''x}{3\,!}$$

et généralement

$$S\left[(n+\mathfrak{a})_{\mathfrak{a}}\overset{n+\mathfrak{a}}{A}\cdot x^{\mathfrak{a}|\delta}\right] = \overset{n}{A} + (n+1)_1 \overset{n+1}{A} x^{1|\delta} + (n+2)_2 \overset{n+2}{A} x^{2|\delta} + \cdots = \frac{{}^{\delta}(fx)^{(n)}}{n\,!} \text{ ou } \frac{{}^{\delta}f^{(n)}x}{n\,!}$$

nous aurons:

$$\text{(I)}\quad f(x+h) = S\left[\frac{{}^{\delta}f^{\mathfrak{a}}h}{\mathfrak{a}\,!}x^{\mathfrak{a}|\delta}\right] = fh + \frac{{}^{\delta}f'h}{1\,!}x^{1|\delta} + \frac{{}^{\delta}f''h}{2\,!}x^{2|\delta} + \cdots$$

donc aussi:

$$\text{(II)}\quad f(x+h) = S\left[\frac{h^{\mathfrak{a}|\delta}}{\mathfrak{a}\,!}{}^{\delta}f^{\mathfrak{a}}x\right] = fx + \frac{h^{1|\delta}}{1\,!}{}^{\delta}f'x + \frac{h^{2|\delta}}{2\,!}{}^{\delta}f''x + \cdots$$

et par conséquent, en prenant successivement $h = -\delta, -2\delta, -3\delta$, etc.:

$$f(x-\delta) = fx - \delta\cdot{}^{\delta}f'x$$

$$f(x-2\delta) = fx - 2\delta\cdot{}^{\delta}f'x + 2\delta^2\cdot\frac{{}^{\delta}f''x}{2\,!}$$

$$f(x-3\delta) = fx - 3\delta\cdot{}^{\delta}f'x + 3\cdot2\,\delta^2\cdot\frac{{}^{\delta}f''x}{2\,!} - 3\cdot2\cdot1\,\delta^3\cdot\frac{{}^{\delta}f'''x}{3!}$$

$$f(x-4\delta) = fx - 4\delta\cdot{}^{\delta}f'x + 4\cdot3\,\delta^2\cdot\frac{{}^{\delta}f''x}{2!} - 4\cdot3\cdot2\,\delta^3\frac{{}^{\delta}f'''x}{3\,!} + 4\cdot3\cdot2\cdot1\,\delta^4\cdot\frac{{}^{\delta}f^{IV}x}{4\,!}$$

etc. etc.

ce qui donne:

$${}^{\delta}f'x = \frac{fx - f(x-\delta)}{\delta}$$

$$\frac{{}^{\delta}f''x}{2!} = \frac{fx - 2f(x-\delta) + f(x-2\delta)}{2\,!\ \delta^2} = \frac{{}^{\delta}f'x - {}^{\delta}f'(x-\delta)}{2!\ \delta}$$

$$\frac{{}^{\delta}f'''x}{3!} = \frac{fx - 3f(x-\delta) + 3f(x-2\delta) - f(x-3\delta)}{3\,!\ \delta^3} = \frac{{}^{\delta}f''x - {}^{\delta}f''(x-\delta)}{3\,!\ \delta}$$

etc. etc.

et il est évident, que les numérateurs de ces expressions ne sont autre chose que les différences des ordres premier, second, et suivans d'une série formée de ces termes: fx, $f(x-\delta)$, $f(x-2\delta)$, $f(x-3\delta)$, etc.

En combinant tout ce qui précède nous aurons donc la solution de la question proposée à l'entrée de ce §, c'est-à-dire :

$$\text{(III)}\quad fx = S\left[\frac{{}^{\delta}f^{\mathfrak{a}}o}{\mathfrak{a}!}\, x^{\mathfrak{a}|\delta}\right] = fo + \frac{{}^{\delta}f'o}{1!}\, x^{1|\delta} + \frac{{}^{\delta}f''o}{2!}\, x^{2|\delta} + \frac{{}^{\delta}f'''o}{3!}\, x^{3|\delta} + \ldots$$

où ${}^{\delta}f'o$ signifie $\dfrac{{}^{\delta}f^{o}o - f(-\delta)}{\delta}$

${}^{\delta}f''o$,, $\dfrac{{}^{\delta}f'o - {}^{\delta}f'(-\delta)}{\delta}$

${}^{\delta}f'''o$,, $\dfrac{{}^{\delta}f''o - {}^{\delta}f''(-\delta)}{\delta}$

etc.

enfin où, pour ce qui concerne la somme combinatoire S, ${}^{\delta}f^{o}o$ doit être remplacé par fo.

§. 2. En nommant la fonction donnée fx la *primitive*, nous pourrons désigner celle-ci: ${}^{\delta}f'x$ par le nom de sa *première dérivée par* δ, et on entendra également par: *seconde dérivée par* δ, *troisième dérivée par* δ, et ainsi de suite, les fonctions ${}^{\delta}f''x$, ${}^{\delta}f'''x$, etc. Enfin ${}^{o}f'x$, ${}^{o}f''x$, etc. ou bien, la première, la seconde, etc. dérivées *par* o ne seront autre chose que les différentielles de fx des ordres correspondans. Toutes ces fonctions seront donc caractérisées par l'une de ces équations:

$$\text{(a)}\qquad {}^{\delta}f^{(n)}x = \frac{{}^{\delta}f^{(n-1)}x - {}^{\delta}f^{(n-1)}(x-\delta)}{\delta} = S\left[\frac{(-1)^{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{a}}\, f(x-\mathfrak{a}\delta)}{\delta^{n}}\right]$$

ou, ce qui revient au même:

$$\frac{{}^{\delta}f^{(n)}x}{n!} = \frac{S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{a}}\, f(x-\mathfrak{a}\delta)\right]}{\delta^{n|\delta}}$$

$$\text{(b)}\qquad \frac{{}^{\delta}f^{(n)}x}{n!} = \frac{S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} (n-m)_{\mathfrak{a}}\, {}^{\delta}f^{(m)}(x-\mathfrak{a}\delta)\right]}{n!\ \delta^{n-m}}$$

$$\text{(c)}\qquad {}^{\delta}f^{(n)}(x-m\delta) = S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} m_{\mathfrak{a}}\, \delta^{\mathfrak{a}}\ {}^{\delta}f^{(n+\mathfrak{a})}x\right]$$

qui, toutes les trois, sont des conséquences immédiates des définitions du §. 1.

Observons que dans ces formules les lettres x et δ peuvent représenter des quantités quelconques, mais que n et m doivent nécessairement désigner des nombres entiers et positifs, à moins qu'on ne veuille étendre le sens des définitions primitives. Pour ce qui concerne l'équation (b), il est évident, qu'on y a supposé

$n > m$: cependant elle n'est pas moins vraie pour le cas contraire, mais c'est alors une série infinie qu'exprime le membre droit, qui malgré cela peut être remplacée par une expression finie, lorsque, en s'arrêtant à un terme quelconque, on y ajoute encore certains termes, dont la forme et le nombre peuvent être déterminés pour chaque cas particulier. Quoique, pour ce qui suit, nous n'ayons point besoin de cette équation (b) pour d'autres suppositions que celles, où $n > m$, nous croyons néanmoins, qu'il ne sera pas sans intéret, de vouer quelques instans à l'examen de ce que devient cette équation dans les cas, où n n'excède point m.

D'abord, pour $m = n$, l'expression du second membre devient absolument identique avec celle du premier membre, parce que o_a, étant $= 1$ pour $a = o$, disparaît pour toutes les autres suppositions admissibles: reste donc seulement à examiner ce qu'on obtient pour $m > n$.

Partons de ces équations:

$$^{\delta}f^{(m)}x - p_1\,{}^{\delta}f^{(m)}(x-\delta) + p_2\,{}^{\delta}f^{(m)}(x-2\delta) - p_3\,{}^{\delta}f^{(m)}(x-3\delta) + \cdots = \delta^p \cdot {}^{\delta}f^{(m+p)}x$$

$$^{\delta}f^{(m)}(x-\delta) - p_1\,{}^{\delta}f^{(m)}(x-2\delta) + p_2\,{}^{\delta}f^{(m)}(x-3\delta) - p_3\,{}^{\delta}f^{(m)}(x-4\delta) + \cdots = \delta^p \cdot {}^{\delta}f^{(m+p)}(x-\delta)$$

$$^{\delta}f^{(m)}(x-2\delta) - p_1\,{}^{\delta}f^{(m)}(x-3\delta) + p_2\,{}^{\delta}f^{(m)}(x-4\delta) - p_3\,{}^{\delta}f^{(m)}(x-5\delta) + \cdots = \delta^p\,{}^{\delta}f^{(m+p)}(x-2\delta)$$

. . . .

. . . .

$$^{\delta}f^{(m)}(x-k\delta) - p_1\,{}^{\delta}f^{(m)}[x-(k+1)\delta] + p_2\,{}^{\delta}f^{(m)}[x-(k+2)\delta] - \cdots = \delta^p \cdot {}^{\delta}f^{(m+p)}(x-k\delta)$$

qui, à ce qu'on voit, ne sont que des résultats de la formule (b) pour le cas validé de $n > m$ et ne présentent que des expressions finies, puisque les coëfficiens p_r du binome disparaissent chaque fois que $r > p$.

Multiplions la seconde de ces équations par q', la troisième par q'', etc., enfin la dernière par $q^{(k)}$; q', q'', $\cdots q^{(k)}$ étant des quantités à déterminer par la condition qu'elles satisfassent à ces équations:

$$q' - p_1 = o$$

$$q'' - q'p_1 + p_2 = o$$

$$q''' - q''p_1 + q'p_2 - p_3 = o$$

$$q^{IV} - q'''p_1 + q''p_2 - q'p_3 + p_4 = o$$

et ainsi de suite;

équations, dont la solution conduit aux relations suivantes:

$$q' = p_1$$
$$q'' = q'p_1 - p_2 = (p+1)_2$$
$$q''' = q''p' - q'p_2 + p_3 = (p+2)_3$$

etc.

de sorte qu'on a généralement:

$$q^{(r)} = (p+r-1)_r = (p+r-1)_{p-1}.$$

Les $(k+1)$ équations, qui nous ont servies de point de départ, étant multipliées respectivement par les valeurs des q', q'',$\cdots$ $q^{(k)}$, telles que nous venons de les déterminer, l'addition de tous les produits, résultans tant a gauche qu'à droite, nous fournira cette équation:

$$\delta^p[{}^\delta f^{(m+p)}x + p_1\,{}^\delta f^{(m+p)}(x-\delta) + (p+1)_2\,{}^\delta f^{(m+p)}(x-2\delta + \cdots + (p+k-1)_k \times$$
$${}^\delta f^{(m+p)}(x-k\delta)] = {}^\delta f^{(m)}x - [(p+k-1)_k \cdot p_1 - (p+k-2)_{k-1} \cdot p_2$$
$$+ (p+k-3)_{k-2} \cdot p_3 - \cdots + (-1)^k p_{k+1}]\,{}^\delta f^{(m)}(x-(k+1)\delta) +$$
$$[(p+k-1)_k p_2 - (p+k-2)_{k-1} p_3 + \cdots + (-1)^k p_{k+2}]\,{}^\delta f^{(m)}[x-(k+2)\delta]$$
$$+ \cdots\cdots = {}^\delta f^{(m)}x - (p+k)_{k+1}\,{}^\delta f^{(m)}[x-(k+1)\delta] +$$
$$(k+1)_1\,(p+k)_{k+2}\,{}^\delta f^{(m)}[x-(k+2)\delta] - (k+2)_2\,(p+k)_{k+3}\,{}^\delta f^{(m)}[x-(k+3)\delta]$$
$$+ (k+3)_3\,(p+k)_{k+4}\,{}^\delta f^{(m)}[x-(k+4)\delta] - \cdots\cdots {}^{*})$$

---

*) Ces réductions remarquables s'obtiennent de la manière suivante:

On a généralement: $(p+n-1)_n = (-1)^n(-p)_n$, donc

$$(p+k-1)_k\,p_1 - (p+k-2)_{k-1}\,p_2 + (p+k-3)_{k-2}\,p_3 - \cdots =$$
$$S\,[(-1)^a(p+k-a-1)_{k-a}\,p_{a+1}] = S\,[(-1)^k(-p)_{k-a}\,p_{a+1}]$$
$$= (-1)^k \cdot S\left[\frac{(-p)^{k-a|-1}}{(k-a)!} \times \frac{p^{a+1|-1}}{(a+1)!}\right] = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} S\left[(k+1)_{a+1}(-p)^{k-a|-1} \cdot p^{a+1|-1}\right]$$
$$= \frac{(-1)^k}{(k+1)!} S\left[(k+1)_a(-p)^{k+1-a|-1}p^{a|-1} - (-p)^{k+1|-1}\right] =$$
$$\frac{(-1)^k}{(k+1)!} S\left[(k+1)_a\,(-p)^{k+1-a|-1} \cdot p^{a|-1}\right] + \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\,(-p)^{k+1|-1} =$$
$$\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\,(-p+p)^{k+1|-1} + (-1)^{k+1}\,(-p)_{k+1} = (p+k)_{k+1};$$

d'où nous tirerons:

$$^{\delta}f^{(m)}x = \delta^p[^{\delta}f^{(m+p)}x + p_1\, ^{\delta}f^{(m+p)}(x-\delta) + (p+1)_2\, ^{\delta}f^{(m+p)}(x-2\delta) + (p+2)_3\, ^{\delta}f^{(m+p)}(x-3\delta) + \cdots + (p+k-1)_k\, ^{\delta}f^{(m+p)}(x-k\delta)] + (p+k)_{k+1}\, ^{\delta}f^{(m)}[x-(k+1)\delta] - (k+1)_1\,(p+k)_{k+2}\, ^{\delta}f^{(m)}[x-(k+2)\delta] + (k+2)_2\,(p+k)_{k+3}\, ^{\delta}f^{(m)}[x-(k+3)\delta] - \text{etc.}$$

ou bien:

$$^{\delta}f^{(m)}x = \delta^p \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=k}{S}[(p-1+\mathfrak{a})_{\mathfrak{a}}\, ^{\delta}f^{(m+p)}(x-\mathfrak{a}\delta)] + S[(-1)^{\mathfrak{a}}(k+\mathfrak{a})_{\mathfrak{a}}\,(p+k)_{k+1+\mathfrak{a}}\, ^{\delta}f^{(m)}(x-(k+1+\mathfrak{a})\delta)]$$

la seconde somme du second membre n'ayant pas besoin d'être limitée par une conditionelle *), puisque au-delà de $\mathfrak{a}=p-1$ les termes s'évanouissent d'eux-mêmes.

Remplaçant m par n, et p par $m-n$, on obtiendra:

$$^{\delta}f^{(n)}x = \delta^{m-n} \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=k}{S}[(m-n-1+\mathfrak{a})_{\mathfrak{a}}\, ^{\delta}f^{(m)}(x-\mathfrak{a}\delta)] + S[(-1)^{\mathfrak{a}}(k+\mathfrak{a})_{\mathfrak{a}} \times (m-n+k)_{k+1+\mathfrak{a}}\, ^{\delta}f^{(n)}(x-(k+1+\mathfrak{a})\delta)] = (\text{à cause de } (-n+\mathfrak{a})_{\mathfrak{a}} = (-1)^{\mathfrak{a}}(n-1)_{\mathfrak{a}}) \left\{ \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=k}{S}[(-1)^{\mathfrak{a}}(n-m)_{\mathfrak{a}}\, ^{\delta}f^{(m)}(x-\mathfrak{a}\delta)] : \delta^{n-m} \right\} + S[(-1)^{\mathfrak{a}}(k+\mathfrak{a})_{\mathfrak{a}}(m-n+k)_{k+1+\mathfrak{a}}\, ^{\delta}f^{(n)}(x-(k+1+\mathfrak{a})\delta)]$$

et, si $k=\infty$:

$$^{\delta}f^{(n)}x = \frac{S[(-1)^{\mathfrak{a}}(n-m)_{\mathfrak{a}}\, ^{\delta}f^{(m)}(x-\mathfrak{a}\delta)]}{\delta^{n-m}},$$ ce qui est l'équation (b).

---

donc aussi:

$$S[(-1)^{\mathfrak{a}}(p+k-\mathfrak{a})_{k+1-\mathfrak{a}} \cdot p_{\mathfrak{a}+1}] = (p+k+1)_{k+2}$$

et de la

$$S[(-1)^{\mathfrak{a}}(p+k-1-\mathfrak{a})_{k-\mathfrak{a}} \cdot p_{\mathfrak{a}+2}] = (p+k)_{k+1} \cdot p - (p+k+1)_{k+2} = (p+k)_{k+1} \times \frac{(k+2)p-(p+k+1)}{k+2} = (p+k)_{k+1} \times \frac{(p-1)\,(k+1)}{k+2} = (k+1)_1\,(p+k)_{k+2};$$

et ainsi pour les autres réductions.

*) Equation de condition, telle que: $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=k$ pour la première somme.

On peut encore démontrer que l'équation (c) est également vraie pour le cas, où m est négatif, et cela se déduit facilement du théor. II, §. 1: car on a en vertu de ce théorème:

$$^{\delta}f^{(n)}(x+m\delta) = S\left[\frac{(m\delta)^{a|\delta}}{a!}\,{}^{\delta}f^{(n+a)}x\right] = S\left[\frac{m^{a|1}}{a!}\,\delta^{a}\cdot{}^{\delta}f^{(n+a)}x\right]$$

$$= S\left[(m+a-1)_{a}\delta^{a}\cdot{}^{\delta}f^{(n+a)}x\right] = S\left[(-1)^{a}(-m)_{a}\delta^{a}\cdot{}^{\delta}f^{(n+a)}x\right],$$

forme, que prend aussi l'équation (c), si l'on y substitue $-m$ à m.

Il serait même facile de généraliser les trois formules en question jusqu'à y rendre négative la caractéristique n marquant l'ordre des dérivées, et pour cela il ne faudrait qu'étendre un peu les définitions primitives. Mais puisque, comme nous l'avons déja dit, cela n'a aucun rapport à nos recherches actuelles, il vaudra mieux remettre ces généralisations à une autre occasion.

§. 3. Nos principes étant posés, commençons par examiner la dépendance de nos dérivées *par* δ des dérivées ordinaires, c'est-à-dire, des différentielles de différens degrés de la fonction primitive fx.

On a par le théorème de Taylor:

$$f(x-\delta) = fx - \delta f'x + \frac{\delta^2}{2!}f''x - \frac{\delta^3}{3!}f'''x + \cdots$$

donc:

$$^{\delta}f'x = f'x - \frac{\delta'}{2!}f''x + \frac{\delta^2}{3!}f'''x - \frac{\delta^3}{4!}f^{IV}x + \cdots\cdot$$

$$^{\delta}f''x = \frac{2^2-2}{2!}f''x - \frac{2^3-2}{3!}\delta\cdot f'''x + \frac{2^4-2}{4!}\delta^2\cdot f^{IV}x - \cdots\cdot$$

$$^{\delta}f'''x = \frac{3^3-3\cdot2^3+3}{3!}f'''x - \frac{3^4-3\cdot2^4+3}{4!}\delta\cdot f^{IV}x + \frac{3^5-3\cdot2^5+3}{5!}\delta^2 f^{V}x -$$

et généralement:

$$^{\delta}f^{(n)}x = \frac{n^n - n_1(n-1)^n + n_2(n-2)^n - \cdots\cdot}{n!}f^{(n)}x -$$

$$\frac{n^{n+1} - n_1(n-1)^{n+1} + n_2(n-2)^{n+1} - \cdots\cdot}{(n+1)!}\delta\cdot f^{(n+1)}x +$$

$$\frac{n^{n+2} - n_1(n-1)^{n+2} + n_2(n-2)^{n+2} - \cdots\cdot}{(n+2)!}\delta^2\cdot f^{(n+2)}x - \text{etc. etc.}$$

ou bien :

$$\delta f^{(n)}x = S\left[\frac{(-1)^a n_a (n-a)^n}{n!}\right] \times f^{(n)}x - S\left[\frac{(-1)^a n_a (n-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right] \times$$

$$\delta \cdot f^{(n+1)}x + S\left[\frac{(-1)^a n_a (n-a)^{n+2}}{(n+2)!}\right] \times \delta^2 \cdot f^{(n+2)}x - \cdots =$$

$$S\left[(-1)^b \times \frac{(-1)^a n_a (n-a)^{n+b}}{(n+b)!} \times \delta^b \cdot f^{(n+b)}x\right] \quad (\odot).$$

Il faudra donc, avant tout, étudier la nature des expressions de cette forme:

$$S\left[\frac{(-1)^a n_a (n-a)^{n+k}}{(n+k)!}\right].$$

Supposant :

$$X = (x-1)^n = S\left[(-1)^a n_a x^{n-a}\right]$$

nous aurons :

$$X' = n(x-1)^{n-1} = S\left[(-1)^a n_a (n-a) x^{n-a-1}\right]$$

donc, en désignant $X'x$ par X_1, X'_1x par $X_2, \cdots X'_n x$ par X_{n+1} :

$$X_1 = X'(x-1) + X' = n(x-1)^n + n(x-1)^{n-1} = S\left[(-1)^a n_a (n-a) x^{n-a}\right]$$

$$X'_1 = n^2(x-1)^{n-1} + n(n-1)(x-1)^{n-2} = S\left[(-1)^a n_a (n-a)^2 x^{n-a-1}\right]$$

$$X_2 = X'_1(x-1) + X'_1 = n^2(x-1)^n + n^{1|-1}\left[n+(n-1)\right](x-1)^{n-1}$$

$$+ n^{2|-1}(x-1)^{n-2} = S\left[(-1)^a n_a (n-a)^2 x^{n-a}\right]$$

et ainsi de suite.

Soit maintenant $\underset{a+b=p}{S\overset{k}{C}}(n-a)$ la somme des *combinaisons à répétition*, de la $k^{\text{ième}}$ classe et aux élémens n, $n-1$, $n-2, \cdots n-p$, chaque combinaison étant considérée comme un produit, et nous obtiendrons, autant que m n'excède pas n, en écrivant en ordre inverse les termes des expressions trouvées par le procédé que nous venons d'indiquer, les relations suivantes:

$$X_m = S(-1)^a n_a (n-a)^m x^{n-a}] = n^{m|-1}(x-1)^{n-m} +$$

$$n^{m-1|-1} \underset{a+b=m-1}{S\overset{1}{C}}(n-a)\cdot(x-1)^{n-m+1} + n^{m-2|-1} \underset{a+b=m-2}{S\overset{2}{C}}(n-a)\cdot(x-1)^{n-m+2}$$

$$+ n^{m-3|-1} \underset{a+b=m-3}{S\overset{3}{C}}(n-a)\cdot(x-1)^{n-m+3} + \cdots + n^m(x-1)^n$$

d'où nous tirons :

$$X_n = S[(-1)^a n_a (n-a)^n x^{n-a}] = n^{n|-1} + n^{n-1|-1} \underset{a+b=n-1}{S\overset{1}{C}} (n-a) \times$$

$$(x-1) + n^{n-2|-1} \underset{a=b=n-2}{S\overset{2}{C}} (n-a)\cdot(x-1)^2 + n^{n-3|-1} \underset{a+b=n-3}{S\overset{3}{C}} (n-a)\cdot(x-1)^3$$

$$+\cdots+ n^n (x-1)^n = S[n^{n-b|-1} \underset{a+c=n-b}{S\overset{b}{C}} (n-a)\cdot(x-1)^b] \quad (♂)$$

où les expressions $S\overset{0}{C}(n-a)$ et $S\overset{n}{C}(n-a)$ devront être remplacées par 1 et par n^n.

En continuant d'opérer sur l'équation (♂) de la même manière que sur les précédentes, on en tirera successivement :

$$X'_n = S[(-1)^a n_a (n-a)^{n+1} x^{n-a-1}] =$$

$$S[n^{n-b|-1} \underset{a+c=n-b}{S\overset{b}{C}} (n-a)\cdot b\,(x-1)^{b-1}] =$$

$$S[n^{n-b|-1} \underset{a+c=n-b-1}{S\overset{b+1}{C}} (n-a)\cdot(x-1)^b]$$

$$X_{n+1} = X'_n + X'_n(x-1) = S[(-1)^a n_a (n-a)^{n+1} x^{n-a}] =$$

$$S[n^{n-b|-1} \underset{a+c=n-b}{S\overset{b+1}{C}} (n-a)\cdot(x-1)^b]$$

$$X_{n+2} = S[(-1)^a n_a (n-a)^{n+2} x^{n-a}] =$$

$$S[n^{n-b|-1} \underset{a+c=n-b}{S\overset{b+2}{C}} (n-a)\cdot(x-1)^b]$$

et généralement :

$$X_{n+\lambda} = S[(-1)^a n_a (n-a)^{n+\lambda} x^{n-a}] =$$

$$S[n^{n-b|-1} \underset{a+c=n-b}{S\overset{b+\lambda}{C}} (n-a)\cdot(x-1)^b] \quad (☿)$$

équation qui, en y faisant $x=1$, fournit celle-ci :

$$S[(-1)^a n_a (n-a)^{n+\lambda}] = n^{n|-1} \underset{a+b=n}{S\overset{\lambda}{C}} (n-a) \quad (2)$$

de sorte, qu'enfin l'équation (⊙) prend cette forme:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\delta f^{(n)}x}{n!} = \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{c}}\, S\overset{\mathfrak{c}}{C}\,(n-\mathfrak{a})\cdot\delta^{\mathfrak{c}}\cdot\frac{f^{(n+\mathfrak{c})}x}{(n+\mathfrak{c})!}\right].$$

Au reste, les expressions désignées par $S\overset{k}{C}\,(n-\mathfrak{a})$ sont toujours de la forme:

$$\overset{k}{a}\cdot n^{k} + \overset{k-1}{a}\cdot n^{k-1} + \cdots + \overset{1}{a}\cdot n$$

$\overset{k}{a}$, $\overset{k-1}{a}$, $\cdots\overset{1}{a}$, étant des coëfficiens indépendans de toute valeur particulière de n; et, pour passer d'une classe de combinaisons à la suivante, on n'a qu'à multiplier le terme sommatoire, $\overset{k}{N}$, de celle-là par n et de regarder ce produit comme le terme général d'une autre série, dont le terme sommatoire aura par conséquent deux facteurs simples de plus que $\overset{k}{N}$ et pourra donc être représenté par $\overset{k+2}{N}$. Il sera par-là possible de calculer $\overset{k+2}{N}$ au-moyen de $\overset{k}{N}$, en faisant usage du théorème connu, par lequel on effectue la sommation des puissances des nombres naturels et en vertu duquel on aura:

$$\overset{k+2}{N} = \int \overset{k}{N}\, n dn + \tfrac{1}{2}\,\overset{k}{N}\, n + \frac{\overset{1}{B}}{2!}\cdot\frac{d(\overset{k}{N} n)}{dn} -$$
$$\frac{\overset{2}{B}}{4!}\cdot\frac{d^3(\overset{k}{N} n)}{dn^3} + \frac{\overset{3}{B}}{6!}\cdot\frac{d^5(\overset{k}{N} n)}{dn^5} - \cdots\cdot$$

où $\overset{1}{B}$, $\overset{2}{B}$, $\overset{3}{B}$, etc. indiquent les nombres de **Bernoulli**, de sorte que $\overset{1}{B} = \frac{1}{6}$, $\overset{2}{B} = \frac{1}{30}$, $\overset{3}{B} = \frac{1}{42}$, $\overset{4}{B} = \frac{1}{30}$, etc.

C'est ainsi que, sachant que $S\overset{1}{C}\,(n-\mathfrak{a}) = (n+1)_2$, on en déduira successivement:

$$S\overset{2}{C}\,(n-\mathfrak{a}) = \tfrac{1}{8}\,n^4 + \tfrac{5}{12}\,n^3 + \tfrac{3}{8}\,n^2 + \tfrac{1}{12}\,n =$$
$$(n+2)_3\cdot\frac{3n+1}{4}$$

$$S\overset{3}{C}\,(n-\mathfrak{a}) = \tfrac{1}{48}\,n^6 + \tfrac{7}{48}\,n^5 + \tfrac{17}{48}\,n^4 + \tfrac{17}{48}\,n^3 + \tfrac{1}{8}\,n^2 =$$
$$(n+3)_4\cdot(n+1)_2$$

$$S\overset{4}{C}\,(n-a) = \frac{1}{384}\,n^8 + \frac{1}{32}\,n^7 + \frac{83}{576}\,n^6 + \frac{77}{240}\,n^5 + \frac{403}{1152}\,n^4$$
$$+ \frac{5}{32}\,n^3 + \frac{1}{288}\,n^2 - \frac{1}{120}\,n =$$
$$(n+4)_5 \cdot \frac{15\,n^3+30\,n^2+5\,n-2}{48}$$

etc. etc.

Il existe encore une autre méthode de traiter les expressions $S\overset{k}{C}\,(n-a)$, par laquelle on parvient à des résultats d'une forme beaucoup plus régulière que ceux que nous venons de trouver. Elle repose sur cette propriété des coëfficiens du binome, que la somme d'une série de n termes et qui a pour terme général $(n+\alpha)_\beta$, est égale à $(n+\alpha+1)_{\beta+1}$. Cependant, pour ne pas trop nous éloigner de notre but actuel, nous ne ferons qu'esquisser cette seconde méthode, en nous reservant d'en développer les résultats dans une autre occasion.

$S\overset{2}{C}\,(n-a)$ devant être la somme d'une série, dont le terme général $= n\,S\overset{1}{C}\,(n-a) = n\cdot(n+1)_2$, on aura, en remplaçant le premier n de cette dernière formule par $\frac{n+2}{3} + \frac{2(n-1)}{3}$, $n\cdot(n+1)_2 = (n+2)_3 + 2(n+1)_3$, terme général, dont la somme est $(n+3)_4 + 2(n+2)_4 = S\overset{2}{C}\,(n-a)$. Multipliant cette équation par $n = \frac{n+4}{5} + \frac{4(n-1)}{5} = \frac{2(n+3)}{5} + \frac{3(n-2)}{5}$, on obtient $n\cdot S\overset{2}{C}\,(n-a) = (n+4)_5 + 8\,(n+3)_5 + 6\,(n+2)_5$, et par-là: $S\overset{3}{C}\,(n-a) = (n+5)_6 + 8\,(n+4)_6 + 6\,(n+3)_6$; et ainsi de suite. Supposant donc généralement:

$$S\overset{k}{C}\,(n-a) = (n+2k-1)_{2k} + \overset{1}{K}\,(n+2k-2)_{2k} + \overset{2}{K}\,(n+2k-3)_{2k} +$$
$$\overset{3}{K}\,(n+2k-4)_{2k} + \cdots + \overset{k-1}{K}\,(n+k)_{2k}$$

on en tirera, en multipliant par $n = \frac{n+2k}{2k+1} + \frac{2k(n-1)}{2k+1} = \frac{2(n+2k-1)}{2k+1} + \frac{(2k-1)(n-2)}{2k+1} = \frac{3(n+2k-2)}{2k+1} + \frac{(2k-2)(n-3)}{2k+1}$ etc. etc., puis en prenant la somme, cette équation:

$$\overset{k+1}{S C}(n-\mathfrak{a}) = (n+2k+1)_{2k+2} + (2\overset{1}{K}+2k)\,(n+2k)_{2k+2} +$$
$$[3\overset{2}{K}+(2k-1)\overset{1}{K}]\,(n+2k-1)_{2k+2} + [4\overset{3}{K}+(2k-2)\overset{2}{K}]\,(n+2k-2)_{2k+2}$$
$+ \cdots + (k+1)\overset{k-1}{K}\,(n+k+1)_{2k+2}$; d'où l'on pourra conclure la forme des coëfficiens $\overset{1}{K}$, $\overset{2}{K}$, $\overset{3}{K}$, etc.

L'équation (IV), combinée avec celle-ci:

$$fx = S\left[\frac{{}^{\delta}f^{\mathfrak{a}}{}_{0}}{\mathfrak{a}\,!}\,x^{\mathfrak{a}|\delta}\right] \text{ (§. 1. III.)}$$

nous fournit la suivante:

$$\text{(V)} \qquad fx = S\left[(-1)^{\mathfrak{c}}\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{d}}{S\overset{\mathfrak{c}}{C}}\,(\mathfrak{d}-\mathfrak{a})\cdot\delta^{\mathfrak{c}}\cdot\frac{f^{(\mathfrak{d}+\mathfrak{c})}{}_{0}}{(\mathfrak{d}+\mathfrak{c})\,!}\,x^{\mathfrak{d}|\delta}\right]$$

qui, lorsqu'on y prend $x=\delta$, se change en celle-ci:

$$f\delta = S\left[(-1)^{\mathfrak{c}}\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{d}}{S\overset{\mathfrak{c}}{C}}\,(\mathfrak{d}-\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{d}\,!\,\frac{f^{(\mathfrak{d}+\mathfrak{c})}{}_{0}}{(\mathfrak{d}+\mathfrak{c})\,!}\,\delta^{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}}\right]$$

ce qui donne:

$$\text{(VI)} \qquad fx = S\left[(-1)^{\mathfrak{c}}\underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{d}}{S\overset{\mathfrak{c}}{C}}\,(\mathfrak{d}-\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{d}\,!\,\frac{f^{\mathfrak{e}}{}_{0}}{\mathfrak{e}!}\cdot x^{\mathfrak{e}}\right]$$

On aura donc, en vertu du théor. de MACLAURIN:

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{c}}\underset{\substack{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{d}\\ \mathfrak{c}+\mathfrak{d}=\mathfrak{e}}}{S\overset{\mathfrak{c}}{C}}\,(\mathfrak{d}-\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{d}\,!\,\frac{f^{\mathfrak{e}}{}_{0}}{\mathfrak{e}\,!}\,x^{\mathfrak{e}}\right] = S\left[\frac{f^{\mathfrak{e}}{}_{0}}{\mathfrak{e}\,!}\,x^{\mathfrak{e}}\right]$$

et par conséquent:

$$S\,[(-1)^{\mathfrak{c}}\underset{\substack{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{d}\\ \mathfrak{c}+\mathfrak{d}=n}}{S\overset{\mathfrak{c}}{C}}\,(\mathfrak{d}-\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{d}\,!\,] = 1$$

ou bien, par l'équation (2):

$$S\left[\frac{(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}\,\mathfrak{c}_{\mathfrak{a}}\,(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})^{n}\cdot\mathfrak{c}\,!}{n\,!}\right] = 1$$

d'où il suit enfin:

$$S\,[(-1)^{\mathfrak{a}}\,(n-\mathfrak{b})_{n-\mathfrak{a}}\,(n-\mathfrak{b})\,!\,\,(n-\mathfrak{a})^{n}] = n\,!$$

Mais revenons à notre objet principal: la dépendance mutuelle qui lie les dérivées *par* δ aux différentielles. Cette comparaison peut encore s'effectuer au-moyen des considérations suivantes:

Ayant en vertu du théor. de TAYLOR et de celui du §. 1. (II):

$$S\left[\frac{h^a}{a!}\, f^a x\right] = S\left[\frac{h^{a|\delta}}{a!}\, {}^{\delta}f^a x\right]$$

on obtient, en ôtant des deux membres de cette équation les premiers termes qui sont égaux, puis en divisant par h:

$$\text{(a)} \qquad S\left[h^a . \frac{f^{a+1}x}{(a+1)!}\right] = S\left[(h+\delta)^{a|\delta}\, \frac{{}^{\delta}f^{a+1}x}{(a+1)!}\right]$$

donc:

1° en faisant $h = o$:

$$f'x = S\left[\delta^{a,\delta} . \frac{{}^{\delta}f^{a+1}x}{(a+1)!}\right]$$

2° en faisant $h = -\delta$:

$${}^{\delta}f'x = S\left[(-\delta)^a . \frac{f^{a+1}x}{(a+1)}\right].$$

Retranchant d'abord la première, et puis la seconde de ces deux équations de (a), on parvient à celles-ci:

$$S\left[h^{a+1} . \frac{f^{a+2}x}{(a+2)!}\right] = S\left[\left((h+\delta)^{a+1|\delta} - \delta^{a+1|\delta}\right) \frac{{}^{\delta}f^{a+2}x}{(a+2)!}\right]$$

et $$S\left[(h+\delta)^{a+1|\delta}\, \frac{{}^{\delta}f^{a+2}x}{(a+2)!}\right] = S\left[\left(h^{a+1} - (-\delta)^{a+1}\right) \frac{f^{a+2}x}{(a+2)!}\right]$$

donc:

3° en divisant la première par h, puis faisant $h = o$:

$$\frac{f''x}{2!} = S\left[\frac{d.(\delta^{a+1|\delta})}{d.\delta}\, \frac{{}^{\delta}f^{a+2}x}{(a+2)!}\right]$$

où $\frac{d.(\delta^{a+1|\delta})}{d.\delta}$ désigne ce que devient $\frac{(h+\delta)^{a+1|\delta} - \delta^{a+1|\delta}}{h}$, lorsqu'on y fait $h = o$;

4° en divisant la seconde par $h+\delta$, puis faisant $h = -2\delta$:

$$\frac{{}^{\delta}f''x}{2!} = S\left[(-1)^a (2^{a+1}-1)\, \delta^a . \frac{f^{a+2}x}{(a+2)!}\right]$$

et ainsi de suite.

§. 4. Passons maintenant à l'application de nos règles générales tant à la recherche des dérivées *par* δ qu'au développement même de quelques fonctions données.

D'abord, pour ce qui concerne des sommes ou des différences de fonctions, il est clair, qu'on aura, absolument comme dans le calcul différentiel :

$$\text{(A)} \qquad {}^{\delta}(\varphi x \pm \psi x + \text{const.})^{(n)} = {}^{\delta}\varphi^{(n)} x \pm {}^{\delta}\psi^{(n)} x.$$

§. 5. Soit $fx = \varphi x \cdot \psi x$; on formera :

$${}^{\delta}f'x = \frac{\varphi x \cdot \psi x - \varphi(x-\delta)\cdot\psi(x-\delta)}{\delta}$$

ce qui, à cause de $\varphi(x-\delta) = \varphi x - \delta \cdot {}^{\delta}\varphi' x$ et $\psi(x-\delta) = \psi x - \delta \cdot {}^{\delta}\psi' x$, conduira à :

$${}^{\delta}f'x = \varphi x \cdot {}^{\delta}\psi' x + {}^{\delta}\varphi' x \cdot \psi x - \delta \cdot {}^{\delta}\varphi' x \cdot {}^{\delta}\psi' x.$$

On trouvera de la même manière :

$${}^{\delta}f''x = \varphi x \cdot {}^{\delta}\psi'' x + 2\,{}^{\delta}\varphi' x \cdot {}^{\delta}\psi' x + {}^{\delta}\varphi'' x \cdot \psi x - 2\delta\,({}^{\delta}\varphi' x \cdot {}^{\delta}\psi'' x + {}^{\delta}\varphi'' x \cdot {}^{\delta}\psi' x) + \delta^2 \cdot {}^{\delta}\varphi'' x \cdot {}^{\delta}\psi'' x$$

$${}^{\delta}f'''x = \varphi x \cdot {}^{\delta}\psi''' x + 3\,{}^{\delta}\varphi' x \cdot {}^{\delta}\psi'' x + 3\,{}^{\delta}\varphi'' x \cdot {}^{\delta}\psi' x + {}^{\delta}\varphi''' x \cdot \psi x - 3\delta({}^{\delta}\varphi' x \cdot {}^{\delta}\psi''' x + 2\,{}^{\delta}\varphi'' x \cdot {}^{\delta}\psi'' x + {}^{\delta}\varphi''' x \cdot {}^{\delta}\psi' x) + 3\delta^2({}^{\delta}\varphi'' x \cdot {}^{\delta}\psi''' x + {}^{\delta}\varphi''' x \cdot {}^{\delta}\psi'' x) - \delta^3 \cdot {}^{\delta}\varphi''' x \cdot {}^{\delta}\psi''' x$$

etc. etc. etc.

En examinant ces formules de plus près, on s'apperçoit qu'elles peuvent être mises sous les formes suivantes :

$$\frac{{}^{\delta}f'x}{1!} = \varphi x \cdot 1_0 \frac{{}^{\delta}\psi' x}{1!} + 1_0 \frac{{}^{\delta}\varphi' x}{1!} \cdot \psi x + (-\delta)^{1|-\delta} \cdot 1_1 \frac{{}^{\delta}\varphi' x}{1!} \cdot 1_1 \frac{{}^{\delta}\psi' x}{1!}$$

$$\frac{{}^{\delta}f''x}{2!} = \varphi x \cdot 2_0 \frac{{}^{\delta}\psi' x}{2!} + 1_0 \frac{{}^{\delta}\varphi' x}{1!} \cdot 1_0 \frac{{}^{\delta}\psi' x}{1!} + 2_0 \frac{{}^{\delta}\varphi'' x}{2!} \cdot \psi x + (-\delta)^{1|-\delta} \times \left(1_1 \frac{{}^{\delta}\varphi' x}{1!} \cdot 2_1 \frac{{}^{\delta}\psi'' x}{2!} + 2_1 \frac{{}^{\delta}\varphi'' x}{2!} \cdot 1_1 \frac{{}^{\delta}\psi' x}{1!}\right) + (-\delta)^{2|-\delta} \cdot 2_2 \frac{{}^{\delta}\varphi'' x}{2!} \cdot 2_2 \frac{{}^{\delta}\psi'' x}{2!}$$

$$\frac{{}^{\delta}f'''x}{3!} = \varphi x \cdot 3_0 \frac{{}^{\delta}\psi''' x}{3!} + 1_0 \frac{{}^{\delta}\varphi' x}{1!} \cdot 2_0 \frac{{}^{\delta}\psi'' x}{2!} + 2_0 \frac{{}^{\delta}\varphi'' x}{2!} \cdot 1_0 \frac{{}^{\delta}\psi' x}{1!} + 3_0 \frac{{}^{\delta}\varphi''' x}{3!} \cdot \psi x$$
$$+ (-\delta)^{1|-\delta}\left(1_1 \frac{{}^{\delta}\varphi' x}{1!} \cdot 3_1 \frac{{}^{\delta}\psi''' x}{3!} + 2_1 \frac{{}^{\delta}\varphi'' x}{2!} \cdot 2_1 \frac{{}^{\delta}\psi'' x}{2!} + 3_1 \frac{{}^{\delta}\varphi''' x}{3!} \cdot 1_1 \frac{{}^{\delta}\psi' x}{1!}\right)$$
$$+ (-\delta)^{2|-\delta}\left(2_2 \frac{{}^{\delta}\varphi'' x}{2!} \cdot 3_2 \frac{{}^{\delta}\psi''' x}{3!} + 3_2 \frac{{}^{\delta}\varphi''' x}{3!} \cdot 2_2 \frac{{}^{\delta}\psi'' x}{2!}\right)$$
$$+ (-\delta)^{3|-\delta} \cdot 3_3 \frac{{}^{\delta}\varphi''' x}{3!} \cdot 3_3 \frac{{}^{\delta}\psi''' x}{3!}$$

etc. etc. etc.

de sorte qu'on a généralement:

$$\text{(B)} \qquad \frac{\delta(\varphi x\cdot\psi x)^{(n)}}{n!} = S\left[(-\delta)^{\mathfrak{c}|-\delta}\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})_{\mathfrak{c}}\,\frac{\delta_\varphi{}^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}x}{(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})!}\cdot(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})_{\mathfrak{c}}\,\frac{\delta_\psi{}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}x}{(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})!}\right]$$
$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=n$$
$$= S\left[(-\delta)^{\mathfrak{c}|-\delta}\cdot(n-\mathfrak{b})_{\mathfrak{a}}\,\frac{\delta_\varphi{}^{n-\mathfrak{b}}x}{(n-\mathfrak{b})!}\cdot(n-\mathfrak{a})_{\mathfrak{b}}\,\frac{\delta_\psi{}^{n-\mathfrak{a}}x}{(n-\mathfrak{a})!}\right]$$

donc aussi, par le théorème (§. 1. III.):

$$\text{(C)} \qquad \varphi x\cdot\psi x = S\left[(-\delta)^{\mathfrak{c}|-\delta}\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})_{\mathfrak{c}}\,\frac{\delta_\varphi{}^{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}0}{(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})!}\cdot(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})_{\mathfrak{c}}\,\frac{\delta_\psi{}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}0}{(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})!}\cdot x^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}|\delta}\right].$$

Exemples.

1) $(a+a'x^{1|\delta}+a''x^{2|\delta}+a'''x^{3|\delta}+\cdots)\times(b+b'x^{1|\delta}+b''x^{2|\delta}+b'''x^{3|\delta}+\cdots) = ab+(ab'+a'b-a'b'\delta)\,x^{1|\delta}+[ab''+a'b'+a''b-(2a'b''+2a''b')\,\delta+2a''b''\delta^2]\,x^{2|\delta}+[ab'''+a'b''+a''b'+a'''b-(3a'b'''+4a''b''+3a'''b')\,\delta+2(3a''b'''+3a'''b'')\,\delta^2-6a'''b'''\delta^3]\,x^{3|\delta}+[ab^{IV}+a'b'''+a''b''+a'''b'+a^{IV}b-(4a'b^{IV}+6a''b'''+6a'''b''+4a^{IV}b')\,\delta+2(6a''b^{IV}+9a'''b'''+6a^{IV}b'')\,\delta^2-6\,(4a'''b^{IV}+4a^{IV}b''')\,\delta^3+24a^{IV}b^{IV}\delta^4]\,x^{4|\delta}+\cdots$

2) $(1+x^{1|\delta}+x^{2|\delta}+x^{3|\delta}+x^{4|\delta}+\cdots+x^{n|\delta})\times(1-x^{1|\delta}) = 1+\delta x^{1|\delta}+2\delta x^{2|\delta}+3\delta x^{3|\delta}+4\delta x^{4|\delta}+\cdots-x^{n+1|\delta}$

3) $[1-x^{1|\delta}+x^{2|\delta}-x^{3|\delta}+x^{4|\delta}-\cdots\cdots+(-1)^n x^{n|\delta}]\times(1+x^{1|\delta}) = 1+\delta x^{1|\delta}-2\delta x^{2|\delta}+3\delta x^{3|\delta}-4\delta x^{4|\delta}+\cdots+(-1)^{n+1}x^{n+1|\delta}$

4) $$x^{m|\delta}\cdot x^{n|\delta} = S[(-\delta)^{\mathfrak{c}|-\delta}\cdot m_{\mathfrak{c}}\,n_{\mathfrak{c}}\cdot x^{m+n-\mathfrak{c}|\delta}] =$$
$$S\,[(-1)^{\mathfrak{c}}\cdot m_{\mathfrak{c}}\,n_{\mathfrak{c}}\,x^{m+n-\mathfrak{c}|\delta}\,\delta^{\mathfrak{c}|\delta}] =$$
$$x^{m+n|\delta}-m_1n_1x^{m+n-1|\delta}\delta^{1|\delta}+m_2n_2x^{m+n-2|\delta}\delta^{2|\delta}-m_3n_3x^{m+n-3|\delta}\delta^{3|\delta}+\cdots$$

§. 6. Si $fx=\varphi x\cdot\psi x\cdot\omega x$, on trouvera moyennant les formules précédentes:

$$\text{(D)} \qquad \frac{\delta(\varphi x\cdot\psi x\cdot\omega x)^{(n)}}{n!} =$$
$$S\left[(-\delta)^{\mathfrak{e}+\mathfrak{f}|-\delta}\,(n-\mathfrak{a})_{\mathfrak{e}}\,(n-\mathfrak{b})_{\mathfrak{a}}\,(n-\mathfrak{c})_{\mathfrak{b}}\,(n-\mathfrak{d})_{\mathfrak{c}}\cdot\frac{\delta_\varphi{}^{n-\mathfrak{a}}x}{(n-\mathfrak{a})!}\cdot\frac{\delta_\psi{}^{n-\mathfrak{b}}x}{(n-\mathfrak{b})!}\cdot\frac{\delta_\omega{}^{n-\mathfrak{c}}x}{(n-\mathfrak{c})!}\right]$$
$$\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\mathfrak{e}=n,\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{d}+\mathfrak{f}=n \text{ ou } \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{f}=\mathfrak{c}+\mathfrak{e}$$

ou bien : $=$

$$S\left[(-\delta)^{\mathfrak{c}+\mathfrak{f}|-\delta}\,(n-\mathfrak{a})_{\mathfrak{c}}\,(n-\mathfrak{c})_{\mathfrak{a}}\,(n-\mathfrak{b})_{\mathfrak{b}}\,(n-\mathfrak{d})_{\mathfrak{e}}\;\frac{\delta_{\varphi}{}^{n-\mathfrak{a}}x}{(n-\mathfrak{a})!}\cdot\frac{\delta_{\psi}{}^{n-\mathfrak{b}}x}{(n-\mathfrak{b})!}\cdot\frac{\delta_{\omega}{}^{n-\mathfrak{c}}x}{(n-\mathfrak{c})!}\right]$$

$$\mathfrak{b}+\mathfrak{d}+\mathfrak{e}=n,\quad \mathfrak{a}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\mathfrak{f}=n$$

ou bien encore: $=$

$$S\left[(-\delta)^{\mathfrak{c}+\mathfrak{f}|-\delta}\,(n-\mathfrak{a})_{\mathfrak{b}}\,(n-\mathfrak{d})_{\mathfrak{a}}\,(n-\mathfrak{b})_{\mathfrak{c}}\,(n-\mathfrak{c})_{\mathfrak{b}}\cdot\frac{\delta_{\varphi}{}^{n-\mathfrak{a}}x}{(n-\mathfrak{a})!}\cdot\frac{\delta_{\psi}{}^{n-\mathfrak{b}}x}{(n-\mathfrak{b})!}\cdot\frac{\delta_{\omega}{}^{n-\mathfrak{c}}x}{(n-\mathfrak{c})!}\right]$$

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{d}+\mathfrak{e}=n,\quad \mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\mathfrak{f}=n$$

donc, en prenant la première de ces trois formules:

(E) $$\varphi x\cdot\psi x\cdot\omega x=$$

$$S\left[(-\delta)^{\mathfrak{c}+\mathfrak{f}|-\delta}\,(\mathfrak{b}+\mathfrak{d}+\mathfrak{f})_{\mathfrak{b}}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{d}+\mathfrak{f})_{\mathfrak{a}}\,(\mathfrak{d}+\mathfrak{e})_{\mathfrak{d}}\,(\mathfrak{c}+\mathfrak{e})_{\mathfrak{c}}\cdot\frac{\delta_{\varphi}{}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}+\mathfrak{f}}0}{(\mathfrak{b}+\mathfrak{d}+\mathfrak{f})!}\cdot\frac{\delta_{\psi}{}^{\mathfrak{a}+\mathfrak{d}+\mathfrak{f}}0}{(\mathfrak{a}+\mathfrak{d}+\mathfrak{f})!}\cdot\right.$$
$$\left.\times\frac{\delta_{\omega}{}^{\mathfrak{d}+\mathfrak{e}}0}{(\mathfrak{d}+\mathfrak{e})!}\cdot x^{\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\mathfrak{e}|\delta}\right]$$

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{f}=\mathfrak{c}+\mathfrak{e}$$

où, en vertu des deux autres formules, on peut changer $\mathfrak{b}$ en $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}$ en $\mathfrak{b}$, ou bien $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}$ en $\mathfrak{a}$.

§ 7. Voici encore quelques résultats qu'on pourra facilement vérifier par les principes exposés ci-dessus:

(F) $\frac{1}{1+x}=S\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{x^{\mathfrak{a}|\delta}}{1^{\mathfrak{a}+1|-\delta}}\right]$, parceque $\dfrac{{}^{\delta}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)}}{n!}=(-1)^n\cdot\frac{1}{(1+x)^{n+1|-\delta}}$.

(G) $$a^{x|d}=S\left[(-1)^{\mathfrak{b}}\cdot\frac{\mathfrak{a}_{\mathfrak{b}}\cdot a^{\mathfrak{b}\delta|d}}{\mathfrak{a}!\;\delta^{\mathfrak{a}}}\cdot x^{\mathfrak{a}|\delta}\right].$$

(H) $${}^{\delta}(\sin.\,x)^{(2n)}=(-1)^n\left(\frac{2\sin.\,\frac{1}{2}\delta}{\delta}\right)^{2n}\sin.\,(n\delta-x)$$

$$\text{et}\quad {}^{\delta}(\sin.\,x)^{(2n+1)}=(-1)^n\left(\frac{2\sin.\,\frac{1}{2}\delta}{\delta}\right)^{2n+1}\cos.\left(\frac{2n+1}{2}\delta-x\right)$$

donc: $\sin.\,x=$

$$S\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1}\left(\frac{2\sin.\,\frac{1}{2}\delta}{\delta}\right)^{2\mathfrak{a}}\sin.(\mathfrak{a}\delta)\cdot\frac{x^{2\mathfrak{a}|\delta}}{(2\mathfrak{a})!}+(-1)^{\mathfrak{a}}\left(\frac{2\sin.\,\frac{1}{2}\delta}{\delta}\right)^{2\mathfrak{a}+1}\cos.\left(\frac{2\mathfrak{a}+1}{2}\delta\right)\frac{x^{2\mathfrak{a}+1|\delta}}{(2\mathfrak{a}+1)!}\right]$$

$$\text{(I)}\qquad {}^{\delta}(\cos. x)^{(2n)} = (-1)^n \left(\frac{2\sin.\frac{1}{2}\delta}{\delta}\right)^{2n} \cos.(n\delta - x)$$

$$\text{et}\ {}^{\delta}(\cos. x)^{(2n+1)} = (-1)^n \left(\frac{2\sin.\frac{1}{2}\delta}{\delta}\right)^{2n+1} \sin.\left(\frac{2n+1}{2}\delta - x\right)$$

donc: $\cos. x =$

$$S\left[(-1)^a\left(\frac{2\sin.\frac{1}{2}\delta}{\delta}\right)^{2a}\cos.(a\delta)\cdot\frac{x^{2a|\delta}}{(2a)!} + (-1)^a\left(\frac{2\sin.\frac{1}{2}\delta}{\delta}\right)^{2a+1}\sin.\left(\frac{2a+1}{2}\delta\right)\frac{x^{2a+1|\delta}}{(2a+1)!}\right]$$

formule, qui, comme la précédente, donne pour chaque a deux termes consécutifs à la fois.

ADDITION.

Pour compléter les préceptes généraux que nous avons, dans ce qui précède, donné pour le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les facultés numériques des variables, il nous paraît nécessaire d'ajouter aux propositions fondamentales du §. 1. encore celle qui concerne les fonctions à *plusieurs variables indépendantes*. Mais ceci nous oblige d'établir préalablement une notation tant soit peu différente de celle dont nous nous sommes servi jusqu'ici.

Nous désignerons généralement par

$${}^{\delta}[f(x, y, z\cdots)]^{[x^m y^n z^p\cdots]} \text{ ou } {}^{\delta}f^{[x^m y^n z^p\cdots]}(x, y, z\cdots)$$

le résultat qu'on obtient en formant d'abord la dérivée *par* δ de l'ordre m d'une fonction donnée $f(x, y, z\cdots)$, en traitant la seule quantité x comme variable; puis en agissant sur la dérivée, qui en provient, de la même manière, pour en former la dérivée *par* δ de l'ordre n, mais en traitant de variable la seule quantité y; et ainsi de suite. C'est ainsi que nous écrirons par exemple

$${}^{\delta}f^{[x]}(x, y) \quad \text{au-lieu de} \quad \frac{f(x,y) - f(x-\delta, y)}{\delta}$$

$${}^{\delta}f^{[y]}(x, y) \quad ,,\ ,, \quad \frac{f(x,y) - f(x, y-\delta)}{\delta}$$

$${}^{\delta}f^{[x^2]}(x, y) \quad ,,\ ,, \quad \frac{{}^{\delta}f^{[x]}(x, y) - {}^{\delta}f^{[x]}(x-\delta, y)}{\delta}$$

*

$${}^{\delta}f^{[xy]}(x,y) \quad ,, \quad ,, \quad \frac{{}^{\delta}f^{[x]}(x,y) - {}^{\delta}f^{[x]}(x,y-\delta)}{\delta}$$

$${}^{\delta}f^{[yx]}(x,y) \quad ,, \quad ,, \quad \frac{{}^{\delta}f^{[y]}(x,y) - {}^{\delta}f^{[y]}(x-\delta,y)}{\delta}$$

etc. etc.

Cela posé, nous établirons la proposition suivante:

$$\text{(VII)}\quad f(x,y) = f(0,0) + {}^{\delta}f^{[x]}(0,0)\,x^{1|\delta} + {}^{\delta}f^{[y]}(0,0)\,y^{1|\delta} + \frac{{}^{\delta}f^{[x^2]}(0,0)}{2!}x^{2|\delta} +$$
$$+ \frac{{}^{\delta}f^{[xy]}(0,0)}{1!\,1!}x^{1|\delta}y^{1|\delta} + \frac{{}^{\delta}f^{[y^2]}(0,0)}{2!}y^{2|\delta} + \frac{{}^{\delta}f^{[x^3]}(0,0)}{3!}x^{3|\delta} + \frac{{}^{\delta}f^{[x^2y]}(0,0)}{2!\,1!}x^{2|\delta}y^{1|}$$
$$+ \frac{{}^{\delta}f^{[xy^2]}(0,0)}{1!\,2!}x^{1|\delta}y^{2|\delta} + \frac{{}^{\delta}f^{[y^3]}(0,0)}{3!}y^{3|\delta} + \cdots\cdots\cdots$$
$$= S\left[\frac{{}^{\delta}f^{[x^{\mathfrak{a}}y^{\mathfrak{b}}]}(0,0)}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!}x^{\mathfrak{a}|\delta}y^{\mathfrak{b}|\delta}\right].$$

En effet, si l'on suppose

$$\begin{aligned} f(x,y) = A &+ A'x^{1|\delta} + {}_{,}A\,y^{1|\delta} \\ &+ A''x^{2|\delta} + {}_{,}A'x^{1|\delta}y^{1|\delta} + {}_{,,}A\,y^{2|\delta} \\ &+ A'''x^{3|\delta} + {}_{,}A''x^{2|\delta}y^{1|\delta} + {}_{,,}A'x^{1|\delta}y^{2|\delta} + {}_{,,,}A\,y^{3|\delta} \\ &+ A^{IV}x^{4|\delta} \text{ etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

on aura, en substituant successivement à x les valeurs o, $-\delta$, -2δ, -3δ, etc., pendant qu'on fait parcourir y cette même suite de valeurs particulières, les groupes suivans d'équations:

$$\begin{aligned} f(o,o) &= A \\ f(-\delta,o) &= A - \delta A' \\ f(-2\delta,o) &= A - 2\delta A' + 2\cdot 1\,\delta^2 A'' \\ f(-3\delta,o) &= A - 3\delta A' + 3\cdot 2\,\delta^2 A'' - 3\cdot 2\cdot 1\,\delta^3 A''' \end{aligned}$$

etc.

$$\begin{aligned} f(o,-\delta) &= A - \delta\,{}_{,}A \\ f(-\delta,-\delta) &= A - \delta A' - \delta\,{}_{,}A + \delta^2\,{}_{,}A' \\ f(-2\delta,-\delta) &= A - 2\delta A' - \delta\,{}_{,}A + 2\cdot 1\,\delta^2 A'' + 2\delta^2\,{}_{,}A' - 2\cdot 1\,\delta^3\,{}_{,}A'' \end{aligned}$$

etc.

$$f(o, -2\delta) = A - 2\delta \cdot {}_{,}A + 2 \cdot 1\,\delta^2 \cdot {}_{,,}A$$

etc.

$$f(o, -3\delta) = A - 3\delta\, {}_{,}A + 3 \cdot 2\,\delta^2\, {}_{,,}A - 3 \cdot 2 \cdot 1\,\delta^3\, {}_{,,,}A$$

etc.

dont la solution conduit au résultat énoncé ci-dessus.

NB. Notre dissertation était déjà achevée, lorsque nous parvint l'ouvrage de M. Crelle: „*Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten, nach einer neuen Entwickelungs-Methode, etc. Berlin*, 1823.“ L'estimable auteur de ce livre y part de la même idée fondamentale du développement suivant les facultés des variables, que nous venons d'émettre dans notre dissertation: cependant la comparaison de son travail et du nôtre ne manquera pas de faire reconnaître, qu'ils n'ont rien de commun outre l'idée mentionnée, dont la priorité ne saurait être contestée à M. Crelle.

LONGITUDE DU PORT

HONOROURO DANS L'ÎLE DE WOUHAHOU,

DÉTERMINÉE PAR L'OBSERVATION DES OCCULTATIONS DES ÉTOILES β DU TAUREAU ET χ DE LA VIERGE;

PAR

M. TARKHANOFF.

(Lu le 4 Mai 1825.)

J'AI l'honneur de présenter à l'Académie Impériale le calcul de deux occultations d'étoiles par la lune, observées par moi dans l'île de Wouhahou, pendant le séjour que j'y ai fait avec une expédition maritime envoyée par ordre de Sa Majesté Impériale dans le Golfe de Behring, et dans laquelle je me trouvais en qualité d'Astronome. L'expédition relâcha deux fois dans cette île, la première, dans le mois d'Avril, et la seconde dans le mois de Décembre 1821. Pendant ces relâches j'observai quatre occultations d'étoiles par la lune, savoir: l'occultation de β du Taureau le 7 Avril n. st., l'occultation de χ des Gémeaux le 11 Décembre; l'occultation de χ de la Vierge le 17 Décembre; et celle sous le N°. 136 du Capricorne le 28 Décembre. Ces observations sont les suivantes.

1) Immersion de β ♉ au bord obscur de la lune à $7^h\ 20'\ 11''$, 80 tems moyen solaire. Émersion de cette étoile au bord très peu éclairé de la lune à $8^h\ 8'\ 4''$, 05, t. m.; observations très exactes.

2) Émersion de χ ♊ au bord obscur de la lune à $14^h\ 41'\ 12''$, 83 t. m. Ce phénomène a été bien remarqué. L'immersion de cette étoile au bord éclairé de la

lune n'a pu être observée à cause de la grande clarté de la lune, qui était alors près du Zénith.

Le tems de ces observations à été bien déterminé par des hauteurs correspondantes du soleil observées le jour précédent et le jour suivant.

3) Immersion de χ ♍ au bord éclairé de la lune à $15^h\ 10'\ 29'',60$ t. m.; je crois cette observation assez exacte, quoique le ciel ne fût pas très serein. Emersion de cette étoile du bord obscur de la lune à $16^h\ 28'\ 25'',93$ t. m.; observation juste.

Le tems moyen solaire de ces observations a été tiré des hauteurs correspondantes du soleil observées le 17 et le 19 Décembre, les nuages n'ayant pas permis de les observer le 18.

4) Immersion de N°. 136 ♑ au bord obscur de la lune à $7^h\ 56'\ 11.28$ t. m.: observation très exacte. L'émersion de cette étoile du bord éclairé de la lune n'a pu être observée, à cause de la petitesse de l'étoile, et parce que la lune se trouvait trop près de l'horizon.

Le tems moyen de cette observation a été déterminé par les hauteurs correspondantes du soleil observées le 28 Décembre et les jours précédens. Le 29 il fut impossible de faire aucune observation, vu que l'expédition était prête à mettre à la voile, et n'attendait que le vent favorable.

N'ayant pas trouvé dans les journaux astronomiques d'observations correspondantes des occultations mentionnées, ni d'autres observations par lesquelles on pût corriger les erreurs des tables de la lune, je me suis borné au calcul des occultations de β ♉ et χ ♍, dont j'ai observé l'immersion et l'émersion.

Les lieux de la lune pour ces deux occultations ont été calculés d'après les tables de M. Burckhardt, et les parallaxes dans l'hypothèse d'un aplatissement de $\frac{1}{308,65}$.

La position apparente des étoiles a été à l'époque des observations

	Longitude	Latitude	
β du Taureau	80° 4′ 37″, 74	5° 22′ 14″, 46	Bor. Austr.
χ de la Vierge	189° 40′ 19″. 77	3 . 27 . 28. 29	— —

Le lieu de ces observations a été dans le port de Honorouro, près de la forteresse Kahoumana, dont la latitude déterminée par des hauteurs circumméridiennes du soleil observées avec un cercle de réflexion de Dollond est = 21° 18′ 27″, 19 N.

Les tableaux suivans présentent les résultats du calcul. Le mouvement horaire vrai de la lune en longitude, est calculé pour le moment du milieu entre l'instant de l'observation et celui de la conjonction vraie.

Calcul de l'occultation de β du Taureau

du 7 Avril 1821 n. st.

	Immersion	Émersion	
Tems moyen solaire de l'observat. . .	7^h 20′ 11″, 80	8^h 8′ 4″, 05	
Long. supposée de Wouhahou à l'est de Paris	13^h 19′ 19″, 0		
Longitude vraie de la lune	80° 31′ 36″, 13	80° 59 11″, 88	
Latitude vraie de la lune	5° 9 58″, 62	5° 9 38″, 91	B.
Parallaxe équat. de la lune	58′ 23″, 71	58 21, 76	
Demi-diamètre de la lune	15 54, 76	15 54, 23	
Latitude corrigée du lieu d'observat. .	21° 10′ 53, 98	N.	
Parallaxe horizont. de la lune . . .	58′ 22″, 21	58′ 20′, 26	
Ascension droite du Zénith	125° 13′ 33″, 08	137 13′ 34″, 80	
Longitude du Zénith	122 33′ 2″, 97	133 21′ 43″, 86	
Latitude du Zénith	1° 36′ 45″, 21	4° 32′ 53″, 5	
Parallaxe de longitude de la lune	39′ 43″, 11	46′ 43′, 60	
Latitude apparente de la lune	5° 12′ 15″, 14	5° 8 11″, 54	
Demi-diamètre app. de la lune	16 6, 89	16 4″, 16	
Différence des latit. de la lune et de l'étoile	9′ 59″, 32	14 2″, 92	
Mouvement horaire vrai de la lune en longitude	34′ 38″, 07	34′ 36″, 20	

Conjonction vraie en tems moyen solaire à Wouhahou:

Par l'immersion $= 6^h\,33'\,18'',77 + 2'',201\,d\alpha - 1'',367\,d\beta - 0,0051\,d\pi$.

Par l'émersion $= 6^h\,33'\,35'',08 - 3'',581\,d\alpha + 3'',137\,d\beta - 0,3579\,d\pi$.

Si l'on fait usage de la correction du demi-diamètre de la lune trouvée par Mr. l'Académicien Wisniewsky $d\alpha = 0'',45 - 0,10\,d\pi$ (Mém. de l'Acad. T. VIII p. 125) on aura la conjonction vraie

Par l'immersion $6^h\,33'\,19'',77 - 1'',367\,d\beta - 0,2252\,d\pi$.

Par l'émersion $6 \cdot 33 \cdot 33,47 + 3,137\,d\beta + 0,0002\,d\pi$.

La vraie conjonction à Paris, d'après les tables de la lune, a été le 6 Avril à $17^h\,14'\,8'',99$ tems moyen solaire, par conséquent la longitude du Port de Honorouro

Par l'immersion $= 13^h\,19'\,10'',78 - 1'',367\,d\beta - 0,225\,d\pi$.

Par l'émersion $= 13^h\,19\,24'',47 + 3'',137\,d\beta + 0,0002\,d\pi$.

Calcul de l'occultation de χ de la Vierge

du 17 Décembre 1821 n. st.

	Immersion	Émersion	
Tems moyen solaire de l'observation .	$15^h\,10'\,29'',60$	$16^h\,28'\,25'',93$	
Longitude supposée de l'isle de Wouhahou	$13^h\,19\,19'',0$		
Longitude vraie (de la lune)	188° 38′ 41″, 10	189° 17′ 23″, 15	
Latitude vraie (de la lune)	3 20 28, 13	3 23 2″, 53	S.
Parallaxe équat. (de la lune)	54′ 26, 04	54 24″, 96	
Demi-diamètre (de la lune)	14 49″, 99	14 49, 70	
Latitude corrigée du lieu d'observat. .	21° 10 53, 98		
Parallaxe horizontale de la lune . .	54 24, 66	54 23″, 58	
Ascension droite (du Zénith)	133° 28′ 38″, 58	153° 1 13″, 25	
Longitude (du Zénith)	130° 0′ 8″, 61	147° 22 32″, 74	
Latitude (du Zénith)	3° 33 21, 73	9 22 52, 70	
Parallaxe de longitude (de la lune)	46 50, 03	36 19, 95	
Latitude apparente (de la lune)	—3 25′ 30″, 40	—3 34 22″, 02	
Demi-diamètre appar. (de la lune)	14 57, 17	14 59, 94	
Différence des latitudes de la lune et de l'étoile	1 57, 89	6′ 53″, 73	
Mouvement horaire vrai de la lune en longitude	29′ 49″, 05	29 47″, 95	

Conjonction vraie en tems moyen solaire à Wouhahou

Par l'immersion $= 17^h\ 14'\ 38'', 77 + 2'', 027\ d\alpha - 0'',267\ d\beta + 1'',9991\ d\pi.$

Par l'émersion $= 17^h\ 14'\ 47, 44 - 2'',2644 d\alpha + 1'',043\ d\beta - 0'',3174\ d\pi.$

En faisant usage de la même correction du demi-diamètre $d\alpha = 0'', 45 - 0'', 10 d\pi$, nous aurons la conjonction vraie

Par l'immersion $17^h\ 14'\ 39'', 628 - 0'', 2669\ d\beta + 1'',796\ d\pi.$

Par l'émersion . $17^h\ 14\ 46, 248 + 1, 0433\ d\beta - 0,0910\ d\pi.$

La vraie conjonction à Paris, d'après les tables de la lune, a été le 17 Décembre à $3^h\ 55'\ 21'', 57.$ tems moyen.

Par conséquent la longitude du port de Honorouro

Par l'immersion $13^h\ 19'\ 18'', 06 - 0'', 267\ d\beta + 1'', 796\ d\pi.$

Par l'émersion $13 \cdot 19\ 24, 68 + 1, 0433\ d\beta - 0, 0910 d\pi.$

CONSIDÉRATIONS
SUR LA
TEMPÉRATURE DU GLOBE TERRESTRE,

PAR

M. PARROT.

(Lu le 5 Mai 1830.)

S'IL est utile de faire des découvertes dans les sciences naturelles, il ne l'est pas moins de réfuter le plus tôt possible des erreurs qui naissent dans ce domaine des connaissances humaines, et qui s'y soutiennent par l'autorité ou l'assentiment de savans respectables. L'histoire des sciences nous offre sur nombre de ses pages des erreurs importantes qui ont été ainsi accréditées, qui ont produit de nouvelles erreurs et retardé de vraies découvertes. Le sujet que je vais traiter appartient à cette classe de phénomènes intellectuels. A côté de la masse de connaissances physiques et géognostiques que ce siècle a accumulées depuis 30 ans, on voit le système de Leibnitz et de Buffon sur la température de notre globe, le système du feu central, renaître, à la lettre, de sa cendre, gagner de nouveaux partisans et s'affermir en apparence par un appareil de calculs profonds qui en imposent d'autant plus aisément à la pluralité des savans, qu'on les fonde sur un grand nombre d'expériences qui n'ont d'autre défaut que d'être mal comprises.

Je me suis déjà prononcé en gros sur ce sujet dans le Bulletin universel de M. Férussac. Mais comme cependant l'on voit des hommes distingués dans les sciences physiques adhérer encore à ce système déjà réfuté une fois il y a

plus de 40 ans *), je crois devoir offrir une analyse exacte des faits sur lesquels on tente de le reconstruire. Ces faits sont des expériences faites sur la température de la terre à diverses profondeurs et sur différents points du continent. J'examinerai donc ces faits pour leur assigner exactement la valeur qu'ils peuvent avoir dans le problème de la température du globe terrestre. Ensuite je produirai les expériences faites à de grandes profondeurs et sur divers points de la Terre dans l'océan et dans les lacs pour leur confronter les expériences terrestres. Puis je résoudrai la contradiction apparente entre les phénomènes marins et terrestres. Enfin je considèrerai l'hypothèse du feu central comme système géologique, pour examiner si elle n'est pas en contradiction avec les faits géognostiques les mieux connus, et si elle est capable de jeter du jour sur la formation de l'écorce de notre globe. Ce qui fera la matière de 4 chapitres.

CHAPITRE I.

Examen des faits terrestres.

Ces faits sont des observations sur la température qui se trouve dans les mines à diverses profondeurs. Celles que M. Fourier a choisies pour baser ses calculs sont contenues dans la table suivante:

Eau des sources dans les mines	Profondeurs	Temp. observées	Moyenne temp. extér.	Différences	Mètres pour 1° C.
	mètres	° C.			
1) Jung-hohe Birke en Saxe	78	9,4	8,0	1,4	55,7
2) Bescheert-Glück en Saxe	217	12,5	8,0	4,5	48,2
3) Ibidem en Saxe	256	13,8	8,0	5,8	44,14
4) Pullauen en Bretagne	224	14,4	8,0	6,4	35,0
5) Ibidem en Bretagne	39	11,9	11,5	0,4	97,5

*) Ceux qui voudraient conclure de ces mots à une injustice de ma part à l'égard de Buffon sont priés de lire ce que j'ai dit nommément de son système dans mes Entretiens sur la Physique T. VI p. 681 et 684. Même aucun Français n'a jamais parlé plus honorablement de ce grand Savant.

Eau des sources dans les mines		Profondeurs	Temp. observées	Moyenne temp. extér.	Différences	Mètres pour 1° C.
		mètres	° C.			
6) Ibidem	en Bretagne ..	75 ...	11,9 ..	11,5 ..	0,4 ..	187,5
7) Huelgoët	en Bretagne ..	140 ...	14,6 ..	11,0 ..	3,1 ..	45,5
8) Ibidem	en Bretagne ..	60 ...	12,2 ..	11,0 ..	1,2 ..	50,0
9) Ibidem	en Bretagne ..	80 ...	15,0 ..	11,0 ..	4,0 ..	20,0
10) Ibidem	en Bretagne ..	120 ...	15,0 ..	11,0 ..	4,0 ..	30,0
11) Ibidem	en Bretagne ..	230 ...	19,7 ..	11,0 ..	8,7 ..	26,4
12) Dolcoath	en Cornouailles	439 ...	27,8 ..	10.0 ..	17,8 ..	24,6
13) Guanaxuato ...	au Mexique ..	522 ...	36,8 ..	16,0 ..	20,8 ..	25,0
					Somme	698,4
					Moyenne arithmétique	53,7

Eau des puisards dans les mines.						
14) South-Huel Towan	en Cornouailles	82,3 ..	15,6 ..	10,0 ..	5,6 ..	14,7
15) Huel-Unity-Wood	en Cornouailles	157,4 ..	17,8 ..	10,0 ..	7,8 ..	20,2
16) Poldice	en Cornouailles	263,5 ..	25,6 ..	10,0 ..	15,6 ..	16,8
17) Ibidem	en Cornouailles	263,5 ..	26,7 ..	10,0 ..	16,7 ..	15,8
18) Gwennap	en Cornouailles	274,5 ..	24,4 ..	10,0 ..	14,4 ..	19,0
19) Ibidem	en Cornouailles	274,5 ..	26,7 ..	10,0 ..	16,7 ..	16,0
20) East-Liscomb ...	en Dévonshire	150,0 ..	17,8 ..	10,0 ..	7,8 ..	19,2
21) Beeralston	en Dévonshire	219,6 ..	19,2 ..	10,0 ..	9,2 ..	23,9
22) Huel-Friedship ..	en Dévonshire	311,1 ..	18,0 ..	10,0 ..	8,0 ..	38,9
23) Bex	en Suisse ...	220.0 ..	17,4 ..	9,0 ..	8,4 ..	26,2
24) Poullaonen	en Bretagne .	142,0 ..	14,2 ..	11,5 ..	2,7 ..	52,2
25) Ibidem	en Bretagne .	150,0 ..	13,5 ..	11,5 ..	2,0 ..	75,0
					Somme	338,3
					Moyenne arithmétique	28,2

Eau des inondations dans les mines		Profondeurs	Temp. observées	Moyenne temp. extér.	Différences	Mètres pour 1° C.
		mètres	° C.			
26) North-Huel-Virgin	en Cornouailles	71,4	15,6	10,0	5,6	12,7
27) Naugiles	en Cornouailles	161,0	14,4	10,0	4,4	36,6
28) Gwenapp	en Cornouailles	183,0	15,6	10,0	5.6	32,6
29) Ting-Tang	en Cornouailles	196,0	17,5	10,0	7,5	26,1
30) Huel-Maid	en Cornouailles	230,6	15,6	10,0	5,6	41,2
31) Tincroft	en Cornouailles	230,6	17,2	10,0	7,2	32,0
32) United Mines	en Cornouailles	329,4	26,7	10,0	16,7	19,7
33) Jung-hohe Birke	en Saxe	318,2	17,2	8,0	9.2	34,5
34) Huel-Goët	en Bretagne	238,0	18.8	11,0	7,8	30,5
					Somme —	265,9
					Moyenne arithmétique	29,5

Roc dans les mines.						
35) Bescheert-Glück	en Saxe	180,0	11,25	8,0	3,25	55,3
36) Ibidem	Saxe	260,0	15,00	8,0	7,00	37,1
37) Alte Hoffnung Gottes	Saxe	71,9	8,75	8,0	0,75	95,8
38) Ibidem	Saxe	168,2	12,81	8,0	4,81	34,9
39) Ibidem	Saxe	268,2	15.00	8,0	7,00	38,3
40) Ibidem	Saxe	379,54	18,70	8,0	10,70	35,5
41) United-Mines	Cornouaill.	348,0	30,80	10,0	20,80	16,7
42) Ibidem	Cornouaill.	366,0	31,10	10,0	21,10	17;3
43) Dolcouth	Cornouaill.	421,0	24,20	10,0	14,20	29,6
44) Carmaux	France	181,9	17,10	13,0	4,10	44,3
45) Ibidem	France	192,0	19,50	13,0	6,50	29,5
46) Littry France	France	99,0	16,27	11,0	6,27	15,8
47) Décise	France	107,0	17,28	11,6	6,18	17,3
48) Ibidem	France	171,0	22,10	11,6	10,50	16,3
					Somme	483,7
					Moyenne arithmétique	34,55

En divisant la somme de tous les nombres de la dernière colonne par 48, l'on obtient pour moyenne arithmétique générale 37,2 mètres pour 1° C. M. Fourier a fixé la vraie moyenne à 30 mètres et c'est cette moyenne que je prendrai pour base des comparaisons.

A l'aspect de cette table l'on voit d'abord les résultats s'écarter de cette moyenne. Voyons donc à quel degré les observations individuelles s'en écartent pour juger quel degré de confiance on peut accorder aux calculs fondés sur ces 48 observations. Admettons pour cet effet plusieurs degrés de confiance exprimés numériquement. Le premier sera celui où les observations ne s'écartent que de 1 mètre en-deçà et en-delà de la moyenne, et où par conséquent les écarts seront $\frac{1}{15}$. Le second degré sera celui où les observations s'écartent de 2 mètr. en-deça et en-delà, dont par conséquent les écarts seront $\frac{2}{15}$. Le troisième s'étendra à 4 mètr. en-deça et en-delà et les écarts seront $\frac{4}{15}$. Le quatrième degré de confiance enfin sera celui où les écarts vont à $\frac{6}{15}$ de la valeur de la moyenne. Nous trouvons:

Pour le 1er degré les N°. 10, 34, 43, 45.

Pour le 2e degré les N°. 10, 31, 34, 43, 45.

Pour le 3e degré les N°. 8, 10, 11, 23, 31, 34, 43, 45.

Pour le 4e degré les N°. 4, 8, 10, 11, 12, 23, 28, 29, 31, 34, 38, 43, 45.

Ainsi, sur les 48 expériences admises, il n'y en a que 4 qui fournissent à $\frac{1}{15}$ près la loi de la progression arithmétique pour l'augmentation de la température avec les profondeurs; 5 qui la fournissent à $\frac{2}{15}$ près; 8 qui la fournissent à $\frac{4}{15}$ près, et 13 à $\frac{6}{15}$. Toutes les autres s'en écartent davantage, quelques unes prodigieusement. Et c'est sur de pareilles données que l'on fonde des calculs qui, comme résultats des sciences exactes, doivent nous imposer, décider de la température du globe terrestre, nous donner une loi mathématique et fonder un système de Géologie! L'histoire de la Physique n'offre rien de semblable. Pour nous en tenir à un exemple qui tienne également à la connaissance de la Terre en grand, citons Cawendish qui a déduit de son beau travail sur la pesanteur spécifique de notre globe le résultat moyen 5,32. Une seule de ses 23 expériences s'en écarte de 0,38, c'est-à-dire de moins

de $\frac{1}{14}$; ce qui revient presque à notre premier degré de confiance. Si l'on élimine cette seule expérience, le plus grand écart n'est plus que de $\frac{1}{26}$ de la moyenne. Et cependant on lui a reproché, ou plutôt à sa méthode, un défaut d'harmonie dans les résultats particuliers, et l'on préfère, en partie par cette raison, le résultat moyen 4,5 livré par Maskelyne, quoique sa méthode ne soit pas non plus au-dessus de toute objection.

Ainsi le Physicien rejette une observation lorsqu'une seule expérience sur 23 offre une disparate de $\frac{1}{14}$, et l'on veut que nous ne doutions pas, lorsque sur 48 observations 4 seulement confirment à $\frac{1}{15}$ près la moyenne et 45 lui sont contraires; lorsque, pour le degré de confiance $\frac{2}{15}$, 5 expériences confirment la moyenne et 45 la démentent, etc. Encore pourrait-on excuser cette exigeance, comparée à la rigueur qu'on exerce pour les expériences de Cawendish, si la connaissance de la pesanteur spécifique de notre globe à un haut degré d'exactitude avait une importance majeure, et si celle de la température n'était que de très peu de poids, parce qu'on règle souvent la rigueur des degrés de confiance en partie sur l'importance de l'objet. Mais c'est ici le contraire: il est presque indifférent que la pesanteur spécifique de notre Terre soit 5,32 ou 4,5; il suffit que l'on sache qu'elle est à peu près 5 fois aussi grande que celle de l'eau, et presque le double de la moyenne de celles des grandes masses qui forment l'écorce du globe. Par contre l'on veut construire sur des données comme celles que nous venons d'examiner l'édifice entier de la Géologie et prédire dans combien d'années la terre aura perdu une certaine partie de sa chaleur propre à sa surface. La postérité croira-t-elle à de pareilles choses?

Pour sauver l'hypothèse, on voudra peut-être éliminer des séries des observations celles qui s'écartent le plus des autres, comme erronées. Cela se fait quelquefois en Physique, mais seulement dans les cas où l'on a de fortes raisons de soupçonner l'exactitude de l'observation ou la justesse des instrumens. Mais ce n'est sûrement pas ici le cas. Prenons par ex. le N°. 6 qui fournit le plus grand écart de la moyenne en livrant 187,5''' pour 1° C. Pour amener ce résultat au résultat moyen 30''', il faudrait que l'observateur eût pris 187,5''' pour 12''', ou bien une température

de 11,5° pour une de 14°. Or mon domestique, qui s'amuse à observer le thermomètre pour régler le chauffage de mes chambres *), ne se trompe jamais d'un quart de degré et toute observation de Physique ne doit pas s'écarter de $\frac{1}{10}$ degré, qui dans ce cas ne fait que $\frac{1}{25}$ de la différence des températures 11,5 et 14, et ne modifierait que de très peu l'écart cité. Ainsi toutes les observations de la table doivent être considérées comme valables, et il n'y a aucune raison d'en éliminer quelques unes. Nous avons donc le droit et le devoir d'admettre au concours toutes les observations citées et toutes les autres déjà faites et encore à faire, pourvu qu'elles ne soient pas controuvées, c'est-à-dire imaginées à dessein pour tromper.

Nous devons donc regarder comme prouvé, comme nous le voyons par le tableau des observations, que, dans la supposition que 30^m soit le représentant de l'augmentation de profondeur qui répond à une augmentation de température de 1° C., pour le premier degré de confiance 44 observations militent contre 4, pour le second degré 43 contre 5, etc. Il faut être bien décidé à dire quelque chose de neuf et bien sûr d'en imposer par l'appareil de l'analyse pour s'aveugler sur les irrégularités de pareilles données.

L'on ne peut non plus objecter (et c'est une justice que nous devons aux partisans du système que nous combattons) que le choix des sujets sur lesquels on a fait les observations soit mauvais. Car ces observations se partagent en quatre séries, dont l'une contient les températures des sources dans les mines, la seconde celle de l'eau des puisards, la troisième celle du roc, la quatrième celle de l'eau des inondations. De tous les sujets d'observations l'on n'a éliminé que l'air, et cela à juste titre, parce qu'il est sujet aux influences des courans, de la chaleur humaine des ouvriers et de la chaleur des lampes. Donc les écarts prodigieux d'une loi mathé-

*) Cela me rappelle que l'inventeur d'un nouveau poële, présenté il y a quelque tems à l'Académie des sciences de Paris, a dit naïvement que dans le Nord on ne s'entend pas à la construction des poëles. Je sais que l'on pourrait apporter encore quelques perfectionnemens à la construction ordinaire des poëles russes. Mais je prends la liberté d'observer à cet auteur que la température de nos chambres se tient pendant 24 heures entre 13 et 15 degrés R., pour peu qu'on ait attention de régler le chauffage sur la température extérieure, et cela, que nous ayons 0 ou 30 degrés au-dessous de 0.

*

matique, qui ont été observés, ont leur cause dans la nature foncière de la chose, et il s'ensuit par conséquent que la loi mathématique supposée n'existe pas, ni pour l'enveloppe extérieure des continens, ni même pour le petit circuit d'une mine.

Le lecteur impartial ne rejettera pas non plus de la liste des observations valables les N°. 9 et 10 observés dans la même mine, où, sous la même température extérieure, la même température de 15° a été observée à 80 et à 120 mètres de profondeur, ce qui offre le cas où une différence de 40 mètr. correspond à 0 de différence thermométrique, tandis qu'elle devrait correspondre à 1⅓ degré. Si l'on objecte que ces deux observations ont été faites à la vérité dans la même mine, mais pas dans le même puits ou dans la même galerie, je réponds que cette défaite anéantit tout le système dans lequel on tire, des observations alléguées, une loi pour tout le globe. Car si cette loi se trouve si différente dans deux points qui ne sont distants que de quelques cents mètres l'un de l'autre, comment peut-on se permettre de l'étendre à tous les points de la surface du globe? Les observations 5 et 6 offrent un résultat tout-à-fait semblable.

Les N°. 18 et 19 présentent le cas singulier où, à la même profondeur et sous la même température extérieure, les températures intérieures (24,4 et 26,7) diffèrent de 2, 3°; ce qui prouve bien qu'elles ont été faites dans deux puits de la même mine. D'après la moyenne de 30^m la différence de profondeur aurait dû être de 69^m, au lieu qu'elle est nulle. Voilà donc un cas réel qui renverse l'édifice qu'on veut élever. De pareilles anomalies se répètent à peu de différences près. La plus forte se trouve aux N°. 44 et 45, où une différence de 10^m correspond à une différence de température de 2, 4°. Ici la moyenne serait 4⅙ mètre par degré. Quelle différence entre ces résultats à la moyenne 30^m et à l'extrême $187,5^m$ pour 1° du N°. 6! Les écarts de la moyenne sont dans les proportions de 1 : 7½ et de 40 : 1.

Mais il y a plus: en cherchant une moyenne universelle déduite de toutes les observations l'on suppose tacitement que les profondeurs observées sont comme infiniment petites, comparées à cette profondeur où règne la chaleur de l'incandescence. Je n'objecte rien là contre. Mais si la chaleur de l'écorce de la Terre provient de

l'ardeur intérieure de roches ou de métaux fondus, selon une loi quelconque de dispersion vers la surface, il s'en suivrait rigoureusement qu'au moins aucune observation ne devrait nous fournir des températures pour de grandes profondeurs moindres que pour de plus petites profondeurs. Cela est encore vrai, quelque changement que les suites de roches puissent, par leur nature plus ou moins conductrice, apporter à la loi mathématique de la propagation de la chaleur. Mais les observations de nos tables fourmillent de pareilles anomalies. Les N°. 3 et 4 nous offrent pour moyennes 44,1^m à une profondeur de 256^m, et 35^m à une profondeur de 224^m. Les N°. 5 et 6 nous livrent 97,5 à la profondeur de 39^m, et 187,5 à la profondeur de 75^m, etc.

Pour rendre cette contradiction entre la loi mathématique et l'observation plus évidente, prenons l'exemple d'une mine où l'on a observé à diverses profondeurs, et où l'on peut supposer le plus d'égalité dans les circonstances ultérieures. Nous trouvons d'abord les N°. 8, 9, 10, 11, dont les profondeurs vont en augmentant. Les résultats sont 50,0 — 20,0 — 30,0 — 26,4 mètres correspondans à 1° C. Le second résultat offre une grande augmentation de température, le troisième une diminution, le quatrième une augmentation, de sorte que la différence totale entre la 1me et la 4me observation est de 23,6 mètres sur une différence de profondeur de 170^m. Si nous ne considérons que les extrêmes, la chose paraît dans la règle à cela près que l'accroissement de chaleur est beaucoup plus grand qu'il ne devrait être. Mais si nous considérons la diminution ou l'accroissement négatif qui se trouve entre le N°. 9 et le N°. 10, alors il y a une contradiction évidente. Les N°. 38 et 39 offrent sur 100^m une diminution de 3, 6^m, et les N°. 41 et 42 une de 0, 6^m sur 18^m de profondeur.

Consultons encore à cet égard la table suivante dressée par M. Fantonelli sur ses observations à la mine d'or de Pestarena, au pied du mont Moro, non loin du Monte-Rosa. Elle est percée dans le gneus. Elle est composée de deux suites d'observations faites aux mois de mars et d'août. Pour la première suite la température de l'air extérieur était + 3, 8° C. et pour la seconde + 20, 0° C.

Profondeurs		Températures du roc		Températures du roc
50^m	N°. 1	5,1° C.	N°. 8	12,5° C.
100	N°. 2	7,5	N°. 9	12,0
150	N°. 3	10,0	N°. 10	12,0
250	N°. 4	11,3	N°. 11	12,2
350	N°. 5	13,1	N°. 12	13,1
450	N°. 6	15,0	N°. 13	15,0
702	N°. 7	16,3	N°. 14	16,3

Nous voyons aux N°. 8, 9 et 10 la température 12,5° tomber de 0,5° et ne revenir qu'au N°. 11, c'est-à-dire à 200^m plus bas qu'à la température 12,2, de sorte qu'à la profondeur 250^m il y a encore une perte de 0,3° qui ne disparaît qu'à 16,6^m plus bas.

Mais essayons d'appliquer nous-mêmes le calcul des probabilités aux cinq suites d'observations que nous avons alléguées, pour mettre plus de vérité mathématique dans notre analyse, et pour voir plus en détail ce que nous pouvons espérer de ces observations et de toutes les autres déjà faites ou que l'on pourra faire à la suite. Car le lecteur non prévenu doit sentir qu'il importe infiniment d'apprécier les fondemens sur lesquels on veut baser une théorie.

Le problème consiste d'abord à trouver les vraies moyennes pour les accroissemens de température vers l'intérieur. Nommons donc x l'accroissement de température pour 1 mètre; l'équation générale $mx—c=o$ nous fournira les équations suivantes, dérivées des 4 suites du tableau des observations.

Dans les sources	Dans les puisards	Dans les inondations	Dans le roc
$78x - 1,4$	$52,3x - 5,6$	$71,4x - 5,6$	$180\ x - 3,25$
$217x - 4,5$	$157,4x - 7,8$	$161\ x - 4,4$	$260\ x - 7,0$
$256x - 5,8$	$265,5x - 15,6$	$183\ x - 5,6$	$71,9x - 0,75$
$224x - 6,4$	$263,5x - 16,7$	$196\ x - 7,5$	$168,2x - 4,81$
$39x - 0,4$	$274,5x - 14,4$	$230,6x - 5,6$	$268,2x - 7,0$
$75x - 0,4$	$274,5x - 16,7$	$230,6x - 7,2$	$379,5x - 10,7$
$140x - 3,1$	$150\ x - 7,8$	$329,4x - 16,7$	$348\ x - 20,8$
$60x - 1,2$	$219,6x - 9,2$	$318,2x - 9,2$	$366\ x - 21,1$
$80x - 4,0$	$311,1x - 8,0$	$238\ x - 7,8$	$421\ x - 14,2$
$120x - 4,0$	$220\ x - 8,4$		$181,9x - 4,1$
$230x - 8,7$	$142\ x - 2,7$		$192\ x - 6,5$
$439x - 17,8$	$150\ x - 2,0$		$99\ x - 5,27$
$522x - 20,8$			$107\ x - 6,18$
			$171\ x - 10,5$
$= o$	$= o$	$= o$	$= o$

Or, nous avons prouvé plus haut que toutes les observations doivent être considérées comme suffisamment rigoureuses et par conséquent d'égal poids. Nous pouvons donc employer sans scrupule la méthode usitée, multiplier chaque équation par le coéfficient de son x, additionner les équations résultantes pour chaque série d'observations, et chercher au moyen de ces quatre nouvelles équations les valeurs de x, qui auront le plus haut degré de vraisemblance. Les équations sommaires seront :
$738136\ x - 26029 = o$ $\quad 580283\ x - 26947 = o$ $\quad 475675\ x - 16736 = o$
$912196\ x - 35114 = o$, d'où nous tirons les valeurs :

$$x = 0.03526 \qquad x = 0.04644 \qquad x = 0.03518 \qquad x = 0,03849$$

et les valeurs de $\frac{x}{1}$, ou le nombre de mètres qui correspond à 1° C. d'augmentation de température

$$\frac{1}{x} = 28,35^m \qquad \frac{1}{x} = 21,53^m \qquad \frac{1}{x} = 28,42^m \qquad \frac{1}{x} = 25,98.$$

Nous trouverons les erreurs probables de ces valeurs d'x, en substituant dans les

équations primitives dont elles ont été tirées les quatre valeurs trouvées. Ces équations ne se trouveront pas justes et nous aurons pour erreurs dans la première série, celle des sources,

+ 1,3	+ 0,9
+ 3,2	— 1,2
+ 3,2	+ 0,2
+ 1,5	— 0,6
+ 1,0	— 2,3
+ 2,2	— 2,4
+ 1,8	

Nous élevons chacune de ces fautes à son carré, dont la somme sera 47,12, que nous divisons par 12 (la somme des observations moins une) et le quotient 3,927 sera la faute moyenne des 13 équations. A présent nous multiplions ce qnotient par le coéfficient d'x dans l'équation résultante qui a fourni cet x, extrayons de ce produit sa racine carrée que nous multiplions enfin par le nombre constant de La Place (0,6745), et nous obtenons pour l'erreur probable d'x la fraction 0,001556

Pour la seconde série 0,003129

Pour la troisième série 0,002428

Pour la quatrième série 0,002723

Si nous cherchons par la méthode précédente la valeur probable d'x que fournissent les 48 observations réunies, l'équation finale sera:

$$2706290\, x - 104826 = o$$

Ainsi $x = 0{,}0387\text{3}$ avec l'erreur vraisemblable 0,001301, et $\frac{1}{x} = 25{,}82^{m}$.

Traitons à présent par la même méthode les 14 observations de M. Fantonelli. Les 7 premières ont été faites sous une température de 3,8° C. et les 7 autres sous une température de 20° C. Si l'on considère, comme nous le verrons ci-après, que de règle les différences entre les températures extérieures et intérieures n'ont, sous une latitude moyenne, d'effet sensible qu'à une petite profondeur qui n'égale pas la profondeur de la première station (50 mètres) de ces expériences, et que dans toutes

ces considérations nous avons proprement à faire aux différences de températures d'une station à l'autre, il s'en suivra que nous pouvons négliger la température extérieure sans commettre une erreur considérable. Dans ce cas-ci nous y sommes même forcés pour ne pas sortir du système que nous combattons. Car, si nous voulions soustraire les températures extérieures, nous n'aurions dans la seconde suite pour les températures intérieures que des températures négatives (au-dessous de zéro) ce qui est, comme nous le verrons à la suite, impossible dans ce système. Néanmoins, comme en comparant les températures intérieures des deux suites, il paraît que les températures extérieures ont influence jusqu'au-delà de 250 mètres, nous voulons remplacer les températures moyennes extérieures par les moyennes arithmétiques intérieures. Or, pour la première série, nous avons 11,2°, pour la seconde 13,3° pour la profondeur 293^m commune à toutes deux. Ce qui nous donne les équations $293\,x - 11{,}2 = o$ et $293\,x - 13{,}3 = o$. En soustrayant les équations que fournissent les observations elles-mêmes, nous obtenons les équations suivantes:

$$\begin{array}{rr}
243\,x - 6{,}1 = o & 243\,x - 0{,}8 = o \\
193\,x - 3{,}7 = o & 193\,x - 1{,}3 = o \\
143\,x - 1{,}2 = o & 143\,x - 1{,}3 = o \\
43\,x + 0{,}9 = o & 43\,x - 1{,}1 = o \\
57\,x - 1{,}9 = o & 57\,x - 0{,}2 = o \\
157\,x - 3{,}8 = o & 157\,x - 1{,}7 = o \\
409\,x - 5{,}1 = o & 409\,x - 3{,}0 = o
\end{array}$$

En traitant ces équations comme les précédentes, nous obtenons les valeurs suivantes: Pour la 1e suite $x = 0{,}0161$ et $\frac{1}{x} = 61{,}3^m.$

Pour la 2e suite $x = 0{,}0069$ et $\frac{1}{x} = 145{,}0^m.$

Ces deux résultats diffèrent considérablement l'un de l'autre et plus encore des quatre que nous avons trouvés au moyen des autres observations.

Ces analyses rigoureuses nous prouvent que, lorsqu'on réunit plus ou moins d'observations pour former une moyenne, l'on obtient des valeurs d'x, et partant des

nombres de mètres correspondans à 1° C. extrêmement différens l'un de l'autre. Les quatre séries des 48 observations nous ont déjà fourni pour extrêmes 28,42^m et 21,53^m, qui sont dans le rapport à peu près de 4 à 3, les deux dernières offrent deux valeurs dont la seconde est 2,4 de la première, et leur moyenne 103,25 est le quadruple de la moyenne tirée des 48 observations.

Nous pourrions faire au moyen de ces résultats des comparaisons avec les résultats des observations simples, comme nous l'avons fait au commencement de ce chapitre, en employant les moyennes arithmétiques pour calculer les degrés de vraisemblance. Mais qui ne voit au premier coup-d'oeil que les résultats seraient encore plus défavorables au système que nous examinons? D'où nous concluons de tout droit qu'*on ne trouvera jamais une moyenne* $\frac{\mathfrak{A}}{x}$ *qui puisse servir d'étalon pour mesurer la température du globe terrestre.*

Employons plutôt l'analyse à un autre but important pour ceux qui, par quelque raison que ce soit, veulent continuer de pareilles observations. Les 48 observations citées se partagent en 4 suites selon la nature des sujets auxquels on a appliqué immédiatement le thermomètre, c'est-à-dire les sources, les eaux des puisards, les inondations et le roc. Comme les moyennes de chacune de ces séries diffèrent considérablement entr'elles, voyons laquelle des quatre suites fournit la moyenne la plus sûre. Nous résolvons facilement ce problème par le cadre suivant, où l'on a pris pour base les vraies moyennes calculées par la règle de La Place.

Les sources			*L'eau des puisards*		
Mètres pour 1°	Différences.	Carrés des différences.	Mètres pour 1°	Différences	Carrés des différences.
55,70	27,3	745,29	14,7	— 6,83	46,64
48,20	19,8	392,04	20,2	— 1,33	1,77
44,14	15,8	149,64	16,8	— 4,73	22,37
35,00	6,65	44,22	15,8	— 5,73	32,83
97,50	69,1	4774,81	19,0	— 2,53	6,40

Mètres pour 1°	Différences	Carrés des différences.
187,5	159,2	25344,64
45,5	17,1	292,41
50,0	21,7	470,89
20,0	— 8,35	69,72
30,0	1,65	2,72
26,4	— 1,95	3,80
24,6	— 3,75	14,06
25,0	— 3,35	11,32
	Somme des carrés	32415,46

Mètres pour 1°	Différences	Carrés des différences.
16,0	— 5,53	30,58
19,2	— 2,33	5,43
23,9	— 2,37	5,61
38,9	17,37	301,29
26,2	4,67	21,80
52,2	30,67	940,36
75,0	53,47	2858,25
	Somme des carrés	4273,33

Les inondations

12,7	15,72	246,49
36,6	8,18	66,91
32,6	4,18	17,47
26,1	2,32	5,38
41,2	12,78	163,84
32,0	3,58	12,81
19,7	8,72	76,04
34,5	6,08	36,96
30,5	2,08	4,32
	Somme des carrés	630,22

Le roc

55,3	29,32	858,49
37,1	11,12	123,21
95,8	69,82	4872,04
34,9	8,92	79,56
38,3	12,32	151,29
35,5	9,52	90,63
16,7	9,28	86,12
17.3	8,68	75,34
29,6	3,62	13,10
44,3	18,32	334,89
29,5	3,52	12,39
15,8	10.18	103,01
17,3	8,68	75,34
16,3	9,68	93,70
	Somme des carrés	6969,11

*

Mais ces sommes des carrés des différences ne peuvent pas être regardées comme les sommes comparables, le nombre des observations n'étant pas égal dans les quatre suites. Pour remplacer les observations qui manquent, et cela dans le sens de chacune de ces suites, il faut ajouter autant de moyennes arithmétiques qu'il manque d'observations à chaque suite; ce qui nous fournit, pour vraies sommes comparables des carrés, les nombres

34908,95 — 4985,55 — 980,34 — 6969,11,

et en extrayant les racines carrées, nous avons pour les rapports inverses des degrés de confiance les nombres 187 — 70 — 31 — 84

D'où il suit que les eaux des inondations fournissent les moyennes les plus probables, et celles des sources les moyennes les moins probables. Ce résultat paraîtra frappant, parce que l'on est accoutumé à regarder la température des sources, pour chaque climat où elles viennent au jour, comme à peu près constante. Mais cela s'expliquera en comparant l'origine des sources avec celle des inondations dans les mines. Les sources proviennent immédiatement des eaux de l'atmosphère qui traversent les roches, les sables et autres terrains, soit par les crevasses qu'elles rencontrent, soit par voie de filtration pour arriver au point de la mine où elles s'écoulent et deviennent l'objet des observations. Or, les crevasses sont plus ou moins larges; la masse d'eau plus ou moins grande à proportion des surfaces qu'elle touche pendant son cours; ce cours lui-même est plus ou moins long par la position des crevasses; les terrains qui sont filtrables le sont plus ou moins. Toutes ces circonstances doivent faire varier la température que l'eau atmosphérique emprunte des terrains qu'elle parcourt. Au contraire les eaux des inondations proviennent très probablement de cavernes pleines d'eau qui se trouvent dans le voisinage à une petite hauteur au-dessus du point de la mine où elles s'écoulent. Avant le travail du mineur ces eaux étaient stagnantes et avaient tout le tems de prendre la température des terrains adjacens; et lorsque le mineur arrive à une crevasse qui communique avec ce dépôt, l'eau s'écoule dans la mine avec sa propre température, c'est-à-dire avec celle du terrain adjacent un peu plus élevé.

Ces analyses des données du problème, la populaire et la rigoureuse, s'accordent donc à nous dire que les résultats rejettent la possibilité de trouver une moyenne quelconque que l'on puisse regarder comme la température vraie de la terre, ni à une profondeur, ni à une position géographique données, et moins encore une loi de l'augmentation de la température de la terre à diverses profondeurs, et beaucoup moins encore la posibilité de calculer le refroidissement successif de tout notre globe, refroidissement que l'on regardera au moins comme très incertain quand on aura lu ce mémoire. L'on trouvera les résultats, qu'on nous a annoncés avec l'appareil imposant du calcul, d'autant plus hasardés, que les profondeurs auxquelles on a pénétré, le thermomètre à la main, ne vont qu'à 702 mètres, et que l'on veut étendre les résultats de ces observations jusqu'à 25 ou 30 lieues de profondeur, c'est-à-dire à une profondeur 260 ou 312 fois plus grande.

Cherchons à présent à nous orienter sur les relations de la chaleur extérieure à la chaleur intérieure jusque aux profondeurs où l'on est parvenu dans les expériences. Il est certain que la température extérieure influe sur l'intérieure. Mais jusqu'à quelle profondeur cette influence est-elle sensible pour nos thermomètres? Et nous permet-elle d'admettre des moyennes?

On peut conclure avec sûreté des observations des Physiciens français faites aux caves de l'observatoire de Paris, qu'à 86 pieds de profondeur la température est constante, et que là l'influence de la température extérieure cesse, et que les augmentations de température en été sont compensées par les diminutions en hiver. Sous l'équateur cette profondeur de $28,6^m$ sera plus grande, et à de hautes latitudes plus petite; et l'on peut s'imaginer sous chaque méridien une courbe qui passe par ces points de profondeurs variables, courbe que l'on pourrait soumettre au calcul, si l'on en avait quelques élémens pris à de grandes distances l'une de l'autre.

Au reste, si l'on voulait que ces 86 pieds servissent, conjointement avec les autres élémens, d'étalon pour calculer les profondeurs analogues sous toutes les latitudes, il faudrait que ces points fussent soustraits à toutes les influences d'opérations chimiques partielles dans l'intérieur de la terre, que l'on peut et doit soupçonner

dans toutes les mines. Or c'est le cas de l'observatoire de Paris, le terrain n'offrant à des distances considérables à la ronde aucune substance non oxidée dont on pût soupçonner qu'elle s'oxidât actuellement et causât par les variations de l'intensité du procès des écarts de température. Cette opinion est confirmée par l'égalité de température observée depuis un siècle dans ces caves. Ainsi l'on peut considérer la température constante des caves de l'observatoire de Paris comme celle qui doit avoir lieu a une profondeur de 86 pieds pour tous les points du continent qui se trouvent sur le même parallèle, sauf les écarts provenants des causes locales auxquelles les autres points de même latitude peuvent être sujets. Malheureusement nous n'avons aucun autre point de la terre où l'on ait fait des observations de ce genre aussi suivies; mais ce point est d'autant plus précieux.

Supposons que la terre eût été primitivement et dans son entier destituée de toute chaleur sensible, au zéro absolu, mais capable d'en développer par l'action des rayons solaires. Dès que le Soleil lui envoie ses rayons, la température excitée à la surface se communique à l'intérieur selon la loi de la marche des substances chimiques, et au bout d'une longue suite de siècles, la terre aura acquis une température sensible, inégalement distribuée de la circonférence au centre, où sera son minimum. Les expériences faites sur de petites profondeurs (comparées au rayon de la terre) nous offrant par contre une augmentation de la chaleur vers le centre, l'on en conclut que la chaleur observée dans les couches de terrains que nous pouvons atteindre, ne vient pas toute du soleil, mais que notre globe a une *chaleur propre.* De quelque manière que cette chaleur soit distribuée, qu'il existe une loi mathématique assignable, ou que la loi (car tout se fait dans la nature selon des lois) soit en quelque sorte effacée par l'influence de circonstances spéciales ou même variables, il est certain que, lorsque les rayons solaires auront produit dans certain point de l'intérieur une température stationnaire, cette température est égale à celle que produit la chaleur propre de la terre, et que, par conséquent, le thermomètre nous donne la mesure relative de cette chaleur propre à ces points. Nous devons donc en conclure que, aussi long-tems que ce degré du thermomètre n'a pas changé, la chaleur propre de la terre à ce point n'a pas changé non plus.

A partir de ce point intérieur, où le thermomètre est stationnaire, il faut donc admettre (toujours dans l'hypothèse d'une chaleur propre) que la température des couches supérieures est composée de la température propre et de celle que le soleil développe à la surface de la terre, et que si le thermomètre à l'intérieur reste stationnaire pendant une suite d'années, l'effet continu du soleil n'augmente pas les températures de cette croute extérieure, mais que les accroissemens qui devraient avoir lieu, sont compensés dans la région au-dessus de celle où l'observation a eu lieu pendant le cours d'une année et de toutes les années où le thermomètre reste stationnaire, par les diminutions que causent l'évaporation et la radiation.

Si donc il paraît démontré par là qu'au-delà du point où le thermomètre intérieur est stationnaire, la chaleur solaire ne se propage pas plus bas, doit-on soustraire la chaleur moyenne à la surface pour les points inférieurs comme pour les supérieurs. Il paraît au premier abord que non; car qu'est-ce que la température moyenne de la surface a à faire au-dessous du point où la température est constante? Mais dans l'hypothèse que la chaleur propre de la terre provient d'une température bien plus grande, placée à une grande profondeur, l'on a le cas où la surface de ce globe prodigieusement chaud, communiquant aux couches supérieures sa température en progression diminuante, offre là où le thermomètre est stationnaire une surface d'une certaine température, qui égale celle d'un milieu ambiant. En ce cas, la température de ce milieu arrête d'autant la température inférieure qui tend à se répandre vers l'extérieur, et cela motive la soustraction en question, au moins douteuse d'ailleurs à certains égards. Il s'ensuit au reste que la couche extérieure (de 38,6^m à Paris) ne devrait pas faire corps avec la série des profondeurs au-dessous, parce qu'elle est sous l'influence des rayons solaires, et par conséquent variable d'une saison à l'autre.

Passons à présent à une considération importante, celle de l'hétérogénéité des couches de roches dont l'écorce de notre globe est formée. Si cette écorce était une seule et même masse continue, la loi du passage de la chaleur que Newton nous a donnée, et que M. Fourier a travaillée avec plus de détails, pourrait servir de base aux calculs. Mais cette écorce est composée de couches hétérogènes, et nous ne connais-

sous leur nature que jusqu'à une certaine profondeur. Nous ignorons si à de plus grandes profondeurs il n'en existe pas d'autres, et si elles se rapportent, quant à la propriété conductrice pour la chaleur, à quelqu'une de celles que nous connaissons, et même nous ne connaissons pas encore la force conductrice de celles-ci, des terres, des sables plus ou moins humides. Il existe en outre, dans l'intérieur de cette écorce et au-dessous, d'immenses cavernes qui exercent sûrement une influence marquée sur la propagation de la chaleur, pour laquelle nous n'avons aucune mesure. Mais ce qui est encore plus important que la force conductrice de chaque espèce de couches, c'est le changement d'une couche à l'autre, l'hétérogénéité de ces substances que la chaleur doit traverser et qui à chaque passage offre une résistance très prononcée *), même dans les corps que nous mettons au nombre des meilleurs conducteurs. Nous ne connaissons que sur peu de points des continens le nombre de ces couches, mais nous savons qu'il varie très fort dans les contrées où nous les connaissons, et que, par conséquent, il doit exister de très grandes différences de ce genre d'une contrée à l'autre relativement à la propagation de la chaleur. Si donc l'on considère d'un côté que chacune de toutes ces circonstances locales doit modifier très fort la marche du calorique au travers des couches de l'écorce de la terre et produire de grandes anomalies dans la propagation de la chaleur, de l'intérieur à l'extérieur, et d'un autre côté que de pareilles anomalies se retrouvent dans toutes nos observations (quelque petite que soit la profondeur à laquelle on a pénétré), quel degré de confiance peut-on accorder à un système qui entreprend de nous décrire en nombres la marche du calorique au travers de l'écorce de notre terre, fixer la profondeur à laquelle la source de la chaleur doit se trouver, en déterminer les degrés et même

*) Je crois avoir été le premier qui ai fait des expériences directes sur cet objet il y a plus de 30 ans. J'ai prouvé cette difficulté de passage, non seulement pour la chaleur, mais aussi pour la lumière, l'électricité et le son. J'ai publié ce théorème pour l'électricité il y a plus de 28 ans. Quant au passage de la chaleur, l'on se fera une idée de cette retardation en considérant qu'une lame de plomb très mince (dont on fait les boites de tabac en poudre) arrête dans l'eau le passage de 4° à 6° R. pendant que l'eau s'échauffe jusqu'à l'ébullition, et que dès que l'une des deux portions d'eau a bouilli, l'autre n'est arrivée qu'a 75° et n'arrive en 8 minutes qu'a 77° et ensuite pas plus haut. La diminution du passage du mercure à l'eau est de 6,5° R. sous les mêmes circonstances.

prédire les époques de certains degrés de refroidissement à l'extérieur, et cela pour le globe entier? Nous ne connaissons pas encore une seule de ces centaines de données. Au contraire, les calculs sont appliqués au passage du calorique au travers d'une seule substance.

Telles sont les considérations qu'offrent à l'observateur attentif les expériences faites par les Physiciens. Examinons à présent une expérience que la Nature fait tous les jours, et qui est d'un grand poids pour la question que nous agitons. D'après les observations les plus récentes, l'on doit admettre que sur la côte septentrionale de la Sibérie, la ligne des glaces permanentes se trouve au niveau de l'océan à une latitude d'environ 70,5 degrés. La température moyenne ne peut y être au plus que 0,3° C., si l'on considère qu'au Cap-nord, à 71,5 degrés de latitude elle n'est que 0,1° R. Or le thermomètre des caves de l'observatoire de Paris donne 11,7° C., pour la température constante (et par conséquent pour la température propre de la Terre) à une profondeur de 28,6^m. Il s'ensuivrait donc que, si la même cause amenait la chaleur de l'intérieur vers la surface à Paris, et sur les bords de la mer Glaciale, une différence de profondeur de 28,6^m correspondrait à une différence de température de 11,4° C. ou une différence d'un degré de température à 2,6 mètres, ce qui surpasse plus de 12 fois la moyenne admise, et outrepasse tous les écarts observés. Ceci s'applique à toutes les contrées où la température moyenne est proche du zéro de nos thermomètres. Quelle nouvelle hypothèse imaginera-t-on pour expliquer ces disparates entre le phénomène de la nature et le système?

Ainsi les expériences des Physiciens et celles de la nature s'accordent toutes à nous dire que c'est en vain que nous prodiguons les profondeurs du calcul à la découverte d'une loi mathématique de l'augmentation de la chaleur de la circonférence de notre globe vers le centre, c'est-à-dire d'une loi qui n'existe pas. Les premières nous disent uniquement que, sur le continent et aux points observés, la température augmente presque toujours (nous en avons vu quelques exceptions dans les expériences citées) avec la profondeur, mais sans offrir une loi constante de ces accroissemens.

Si, à présent, nous demandons aux partisans du globe en fusion dont nous habitons les scories, d'où peuvent provenir ces écarts prodigieux dans les résultats des observations, que pourront-ils répondre? Rien, sinon que des circonstances locales modifient la loi numérique. Ainsi, dans les 48 expériences, la profondeur normale pour 1° C. sera d'après notre calcul 25,82, et les circonstances locales pourront la diminuer jusqu'à la moitié, et l'augmenter jusqu'au septuple. Mais qui ne voit pas que, si l'on attribue aux circonstances locales de si grands écarts, l'on peut également leur attribuer l'effet entier? Il n'y a donc nulle raison d'admettre une cause générale qui produise un phénomène constant si fortement modifié par des causes fortuites, à moins que l'on n'ait vérifié cette cause générale par d'autres phénomènes que ceux qui offrent ces énormes anomalies. Or, comme cette condition, prescrite par la saine Logique, n'a point été remplie par les partisans du système, le système s'écroule par les bases mêmes sur lesquelles on veut l'élever.

Chapitre II.

Examen des faits dans la mer et dans les lacs.

Il a été prouvé, dans le Chapitre Ier, que les observations faites sur la température de la terre à diverses profondeurs ne sont nullement capables de fonder l'hypothèse d'un feu central. Mais ces preuves ne sont que négatives. La Nature nous en offre de très positives dans l'observation de la température de la mer à diverses profondeurs. Les expériences d'Irwine, Forster, Péron, Horner et Lenz, faites sur tant de points de l'océan, attestent que cette température diminue avec la profondeur, tout au contraire de ce qu'ont fourni les expériences sur le continent *). Celles de M. Lenz

*) Je ne dissimulerai pas que deux expériences contraires sont venues à ma connaissance. L'une est de M. Irwine qui, a la latitude N. de 80° 31^m a trouvé, en Décembre la température à la surface de la mer = + 2,2° F. ou — 16,6° C. et à 60 T. de profondeur + 3,9° F. ou — 15,6° C. Ce qui fait une augmentation de température d'un degré sur 60 T. ou environ 120^m de profondeur. La seconde est de M. Scoresby au 80 degre de latitude N. et a 5° de longitude de Greenwich entre le Grönland et le Spitzberg. Il a trouvé que la température augmente de 7° Fahrenheit ou 3,9° C. sur une

sont sans contredit celles où l'on a atteint les plus grandes profondeurs, et en même tems celles dont les résultats sont les plus exacts. Comme je les ai déjà fait connaître par la voie du *Bulletin universel*, et que ce travail de M. Lenz a paru depuis peu dans les mémoires de l'Académie des Sciences de Pétersbourg, je m'abstiendrai de les recopier. Ces résultats sont principalement que:

1° La température diminue à mesure que les profondeurs augmentent.

2° Qu'elle diminue d'abord assez rapidement, puis très lentement. De la profondeur 0 jusqu'à 413 toises cette diminution passe 23° C. et de-là jusqu'à 915^t elle n'atteint pas 1° C.

Ces expériences ont été faites sur 7 points différens de l'océan, de la latitude N. 7° 20′ jusqu'à 45° 35′ latitude S. et sur une étendue en longitude de 15° 17′ jusqu'à 196° 1′.

Si nous comparons les expériences analogues dans de profonds lacs faites par Saussure père, et de La Bêche dans les lacs des Alpes, par Georgi, Pallas et Gmelin dans ceux de Sibérie, par Schaw et Makenzie, dans l'Amérique septentrionale, nous trouvons les mêmes résultats, mais sur une plus petite échelle; les températures du fond ont été constamment trouvées plus petites que celles de la surface. Les expériences de M. La Bêche dans le lac de Genève à diverses profondeurs prouvent en outre que, comme dans l'océan, les températures diminuent d'abord rapidement et ensuite lentement.

Si l'on réunit toutes ces expériences faites dans tant de lacs et dans des contrées si éloignés les unes des autres, et qu'on les compare aux expériences non moins nombreuses faites dans la mer à tant de latitudes et de longitudes, nous sommes bien en droit d'en conclure que nous avons découvert une loi naturelle qui est que *la température dans de grandes masses d'eau va en diminuant de haut en bas, d'abord rapi-*

profondeur de 758 brasses ou environ 1516^m. (Je ne connais pas au juste la brasse des marins anglais: mais elle est, si je ne me trompe, a peu près égale a 2^m). Si l'on considère que l'une de ces augmentations de chaleur ne va qu'à 1° C. pour 126^m et l'autre pour 388^m, l'on concevra que ces deux anomalies peuvent s'expliquer par l'âpreté de l'hiver du climat et de la saison, et n'infèrent pas contre tant d'autres expériences faites dans tous les autres climats et à tant de diverses longitudes.

dement, puis très lentement *). Or, ce théorème si bien établi n'est il pas en contradiction directe avec l'hypothèse d'un globe intérieur de matière à la chaleur incandescente comme source de la chaleur moyenne de la terre à sa surface? C'est ce que nous allons examiner.

Soit C le centre de la Terre, *ac* le niveau de l'océan, *bd* le niveau moyen des continens, *ef* le niveau moyen du fond de la mer, *gh* le niveau où se trouve la chaleur incandescente. Il est certain qu'aux surfaces contigües de la terre-ferme et de l'eau la température sera la même. Cherchons dans l'hypothèse du globe central incandescent quelle sera cette température. L'accroissement moyen de la chaleur a été admis dans cette hypothèse d'un degré C. pour chaque profondeur de 30^m. La Place a évalué la profondeur de l'océan à 6000^t au moins. Mon système géologique, appuyé sur ma théorie des volcans, offre la même donnée comme minimum. Nous voulons donc nous en tenir à 12000^m. pour la profondeur *ac*. Ainsi, dans l'intérieur de la terre-ferme, nous aurions à cette profondeur une température de 400° C. en admettant que la chaleur augmente de haut en bas d'un degré sur 30^m. de profondeur. Mais, comme nous venons de le prouver, l'observation nous donne à cette profondeur sous la mer une température d'environ 0°. Que deviennent les 400 degrés qui devraient s'y trouver?

Pour satisfaire à cette question dans l'hypothèse, il faut alléguer ici quelques principes de M. Fourier: La surface entière du globe perd de sa température propre, provenante du globe intérieur incandescent par la radiation dans l'espace infini qui l'entoure. Cette perte qui, lorsque le globe entier était encore en fusion, était très considérable, est aujourd'hui et depuis long-tems insensible. On peut donc regar-

---

*) Si la température dans l'intérieur de la mer provenait d'un milieu quelconque chaud placé à l'extérieur, et si la diminution vers le bas était uniquement le produit de la marche chimique du calorique de ce milieu extérieur, la progression de diminution serait bien plus rapide, et M. Lenz et les autres navigateurs eussent trouvé peut-être déjà à 100 toises de profondeur la température du zéro de nos thermomètres. Mais cette chaleur de l'océan et des lacs provient de l'action des rayons solaires qui penètrent l'eau et y produisent de la chaleur jusqu'a la dernière profondeur où arrivent ces rayons; ce qui ralentit le décroissement de température.

der la température actuelle à la surface du globe comme constante, et le calcul recule à 30000 ans *) l'époque ou cette température sera diminuée de moitié. — L'eau de l'océan est, de même que l'espace du monde, un milieu réfrigérent, et enlève la chaleur intérieure en vertu des mouvemens produits par la différence de pesanteur spécifique, plus rapidement que cet espace indéfini, ce qui fait qu'au fond de l'océan la température peut être si basse. Examinons ces principes, et la conséquence qu'on peut en tirer.

Nous passons sur la radiation, qui ne peut-être selon moi que la marche chimique du calorique dans un milieu matériel, et que j'adopte pour l'espace de notre système planétaire depuis que les nouvelles observations sur la comète d'Enke ont prouvé qu'il existe une substance matérielle, quoique impondérable, qui oppose une résistance mécanique au mouvement, substance que j'avais déjà admise hypothétiquement depuis long-tems pour la marche chimique (la radiation) du luminique des astres. Ainsi, nous admettons avec M. Fourier que le globe terrestre perd continuellement de la chaleur, et que cette perte peut égaler sensiblement l'augmentation causée par l'action du soleil et des autres astres, si l'on veut compter celle-ci pour quelque chose. Passons à l'examen du refroidissement des couches inférieures des mers.

Le refroidissement dans un fluide quelconque se compose de deux élémens, dont l'un est la marche chimique du calorique, l'autre la circulation qui s'établit par la différence de pesanteur spécifique produite par la différence de température des couches superposées. Les expériences du Comte Rumford avaient porté cet excellent expérimentateur à croire que tous les fluides sont des isolateurs parfaits pour la chaleur. Les miennes ont prouvé que l'air et l'eau transmettent la chaleur, mais avec une lenteur extrême, analogue à celle avec laquelle les substances chimiques se mêlent spontanément par leur affinité physique. Cet élément du refroidissement doit donc être considéré comme étant d'une très petite efficacité, même lorsque la température

*) Comme M. Fourier base ses calculs sur le refroidissement d'un globe homogène de fer, l'on peut assurer, d'après ce qui a été dit sur l'hétérogénéité des couches de la croûte du globe que nous connaissons, que cette époque recule au moins à 300000 ans.

du milieu chaud se renouvelle à chaque instant; et la loi numérique de la chaleur à différentes distances de la surface de ce milieu serait près de cette surface une progression très divergente, dont les différences deviennent nulles à quelque distance. Or, les expériences marines offrent une série absolument opposée à celle-là. Donc cet élément de la diminution de température n'explique pas le phénomène de la diminution observée dans le sens contraire.

Ce phénomène marin devrait donc, dans l'hypothèse, être attribué au second elément de refroidissement et M. Fourier l'admet comme tel, lui attribuant même les vastes et rapides courans qui, selon lui, sillonnent toute la masse des mers. Mais ces courans n'ont été observés qu'à la surface des hautes mers et non à de grandes profondeurs. Les expériences de M. Lenz ne nous indiquent aucun courant à la profondeur de quelques cents toises, jusqu'à 1000 T. Son pendule colossal n'affectait pas toujours, à la vérité, une direction perpendiculaire. Mais comme M. Lenz n'a eu que des calmes de quelques heures, la surface de la mer n'était pas encore arrivée à un repos parfait, et le vaisseau marchait plus ou moins vîte dans la direction des ondes. Ainsi la corde de son bathomètre ne pouvait que rarement se trouver dans la verticale; et comme cet angle se trouvait toujours dans le plan de la marche du vaisseau, et comme la moyenne de toutes ses observations (très variées par le roulis et le tangage) ne va qu'à 9 degrés, l'on n'a aucune raison d'admettre que ces angles avec la verticale aient été le produit de courans dans l'intérieur de la mer.

En théorie nous devons admettre qu'au fond de l'océan la surface supérieure de la terre-ferme et la surface inférieure de l'enveloppe d'eau dont elle est couverte ont la même température; que la température de la terre-ferme (dans l'hypothèse que nous examinons) va en augmentant vers l'intérieur depuis des siècles ou des milliers de siècles, et partant, qu'ici comme à la surface des continens à sec l'accroissement absolu de température peut être considéré comme $= o$. Mais si cela est vrai, il est impossible qu'il se forme au fond de l'océan des couches d'eau plus légères que les couches supérieures, et par conséquent des courans.

Si par contre les 400 degrés de température qui auraient lieu au fond de la mer, dans le cas que la surface du fond fût couverte de terre-ferme, s'émettent encore aujourd'hui sensiblement dans l'océan, alors cette chaleur, partant surtout de protubérances un peu plus ou moins élevées au-dessus du niveau moyen du fond de la mer, il se formera à la vérité des courans qui mêleront les températures inférieures et supérieures, comme M. Fourier l'a admis. Mais alors il est indubitable que les températures moyennes inférieures seront toujours un peu plus hautes que les supérieures, comme cela a lieu dans une bouilloire pleine d'eau qu'on commence à chauffer par dessous, et l'expérience devrait nous offrir le même effet au fond de la mer, au moins depuis la profondeur où la température s'approche de zéro. Bien plus, la théorie de M. Fourier tend à prouver que même les 400 degrés ci-dessus cités ne pourront émettre que de très faibles degrés de chaleur dans l'océan, parce que ces 400 degrés n'existent déjà plus, depuis des siècles, à la surface de la terre-ferme qui porte l'océan, mais qu'il faudrait percer à une plus grande profondeur au-delà pour les trouver. Or ces faibles degrés de température communiqués aux couches inférieures de l'océan, ne seront nullement capables de produire des courans sensibles, encore moins les courans rapides que M. Fourier paraît admettre. Ainsi la chaleur interne de la terre, supposée dans l'hypothèse, ne peut nullement causer la basse température du fond des mers.

Mais l'illustre Géomètre a recours aux régions polaires. Voyons si la solution de l'énigme nous viendra de-là, et d'abord quels sont les moyens et ce qui doit se faire. A la latitude de 70 à 71 degrés, la température moyenne est égale à zéro, et c'est de l'eau contenue de-là jusqu'aux pôles que nous devons attendre le refroidissement désiré. Nous ne pouvons supposer la température moyenne de cette eau à moins de — 5° C., d'autant plus que les pôles sont vraisemblablement couverts d'une calotte, sinon de terre-ferme, au moins de glaces d'une énorme épaisseur qui affaiblissent la radiation de la chaleur de l'eau qui se trouve au-dessous. Tel est donc le moyen, dont l'effet doit être de refroidir le fond de la mer jusqu'à la température du zéro du thermomètre. Quelle est la température que nous devons admettre

comme chaleur moyenne que l'océan entier devrait avoir, sa chaleur propre. que lui aurait donné le globe incandescent, si le refroidissement par les eaux polaires n'avait pas lieu. Nous avons trouvé cette température propre à la latitude de Paris = 11,7° C., et nous ne nous tromperons pas en trop si nous admettons que pour tout l'océan elle soit = 12 degrés. Ainsi, en supposant que toute l'eau froide qui vient des pôles vers l'équateur soit égale à tout le reste de la masse de l'océan, la température du fond devrait être à + 7° C. Mais cette portion d'eau polaire n'est peut-être pas $\frac{1}{1000}$ du reste de l'océan, d'autant plus que les sondes sur toute la longueur de la mer glaciale qui borde la Sibérie n'indiquent qu'une très petite profondeur. Cette eau doit, pour arriver sous l'équateur, faire un chemin de 1750 lieues avec une lenteur prodigieuse et perdre par conséquent en route de son froid. Le refroidissement pendant une année atteindrait donc à peine, $\frac{1}{2400}$ degré, et il faudrait 16800 ans pour absorber les 7 degrés en question. Mais pendant ce laps de tems, le globe incandescent eut réparé cette perte d'autant plus sûrement, que la limite d'où part la chaleur se trouve de 6000 toises plus proche de la surface incandescente, et que le passage de la chaleur se ferait d'autant plus promptement que l'eau arrivée des pôles serait plus froide. Ainsi, bien qu'on ne puisse nier que l'eau à la surface des régions polaires, plus froide que celle du fond de tout l'océan, ne s'enfonce et ne marche au fond de la mer vers l'équateur, il n'en est pas moins vrai que cette eau ne peut pas y causer un refroidissement sensible, encore moins réduire dans la suite des siècles la température propre originaire du fond de la mer à zéro, et ne résout par conséquent pas le problème de la basse température du fond de l'océan.

M. Fourier a encore recours à la température du maximum de l'eau, sans au reste que je puisse concevoir comment cette considération pourrait être favorable à l'hypothèse qu'il a adoptée. Soit cette température = + 3,75° C. comme milieu entre les expériences de MM. Hällström et Muncke, qui me paraissent les plus nouvelles et les plus exactes. Or, M. Lenz a déjà trouvé cette température à 450 T de profondeur; d'où il suivrait que le reste de la profondeur de l'océan (5550 T) aurait une moindre densité, et que, par conséquent, les couches supérieures plus

chaudes devraient s'écouler vers le fond et le réchauffer, non le refroidir. Mais il y a plus encore, ce maximum de densité n'existe pas dans l'eau de mer; ce que M. Fourier paraît avoir ignoré. La température à laquelle ce maximum a lieu est, comme je l'ai fait voir dans mon „*Grundriss der theoretischen Physik*" imprimé en 1811, proprement le vrai point de congélation, celui auquel l'eau commence à geler en cristaux infiniment déliés et invisibles; l'augmentation de ces cristaux produit l'augmentation successive de volume qui atteint son maximum à la congélation formelle qui est censée nous fournir le zéro de nos thermomètres. Or nous avons vu plus haut que la congélation précipite la majeure partie du sel contenu dans l'eau salée, par quoi la pesanteur spécifique diminue. Un calcul approximatif prouve aisément que ces deux effets opposés ne peuvent se compenser, et moins encore produire une augmentation de volume aux approches de la congélation parfaite, l'augmentation de densité par la congélation commençante étant inférieure à la diminution par l'éloignement du sel. Cette preuve théorique a été confirmée par les expériences très exactes de M. Erman fils, qui ont prouvé que l'eau salée augmente de densité jusqu'au moment de sa congélation complète.

D'autres partisans du feu central invoquent encore les eaux qui découlent des régions polaires par la fonte des glaces, et qui, étant plus pesantes que l'eau plus chaude, descendent vers le fond et passent aux régions tropiques. Après ce qui a été dit de l'eau de mer des régions polaires l'on ne sera pas disposé à accorder une grande force à cet argument. Nous allons démontrer qu'on ne lui en doit accorder aucune, quelque spécieux, en quelque sorte palpable, qu'il puisse paraître. D'abord nous ne voulons pas objecter que vouloir refroidir tout l'océan de cette manière, ce serait comme si l'on voulait refroidir le lac de Genève avec une toise cube d'eau à la température de la glace fondante *). Examinons la chose de plus près.

*) C'est ainsi que, il y a quelques années, l'on a voulu expliquer une baisse générale de la température moyenne de toute notre atmosphère par la fonte des glaces qui se sont détachées de la côte d'Islande.

Prenons pour base la température de 30° pour celle de l'eau de mer sous l'équateur et à sa surface. La différence de pesanteur spécifique entre cette eau et la même eau, là où la température est = 0, sera $\frac{1}{185}$, si l'on admet selon MM. Dulong et Petit une variation de densité égale à $\frac{1}{5550}$ pour 1° C., abstraction faite de la dilatation du verre. Par contre le degré supérieur de salure de l'eau tropique produit, selon M. Horner, une différence de $\frac{1}{227}$ en faveur de cette eau sur l'eau à la latitude de 60°; et l'on peut sans risquer une erreur sensible, faire monter cette différence à $\frac{1}{200}$ entre l'eau tropique et l'eau polaire. D'où il suit que ces deux différences se compensent à peu de chose près mutuellement, et que, pour la condition de l'équilibre, la mer doit être sous l'équateur un très peu plus basse que sous les pôles, et que si cette différence de niveau établit un courant sensible, il doit avoir lieu à la surface, des pôles à l'équateur, et dans l'intérieur en sens contraire. Voyons à présent l'effet du dégel aux glaces polaires.

Nous avons deux espèces de glaces polaires: celles qui se forment sur le continent, que ce continent soit de terre-ferme couverte de neiges et de glaces ou simplement de glace supportée par la mer, et celles qui se forment dans la mer même. Les premières ne sont évidemment que des glaciers comme ceux qui se forment dans les alpes de tous les climats. Elles ne contiennent absolument pas de sel; cela est confirmé surtout par les observations de MM. Egédé-Sabie et Wrangel. Les secondes sont de l'eau de mer gelée, et M. Wrangel nous apprend qu'entre le 70e et 71e degré de latitude nord cette congélation ne dépasse pas la profondeur de 9 à 10 pieds. Ainsi ces masses énormes de glaces flottantes, qui s'élèvent jusqu'à 400 et 500 pieds au-dessus de la mer et ont au moins 8 à 9 fois plus d'épaisseur sous mer, sont des glaciers de la première espèce formés sur une base d'eau de mer gelée qui ne peut avoir 20 pieds d'épaisseur. Et cette base elle-même contient si peu de sel qu'on a cru très long-tems qu'elle n'en contenait pas du tout *). Ainsi l'on

*) J'ai prouvé que l'eau salée retient en se gelant une partie de son sel. V. mon *Grundriss der theoretischen Physik* T. II, et les *Annalen der Physik* T. 57 p. 144. Il suit de mes expériences que les parties inférieures de la glace d'eau de mer doivent être un peu plus salées que les supérieures.

peut considérer les glaces polaires et l'eau qui en découle comme ne contenant qu'un minimum de sels, peut-être moins que l'eau de la plupart des fleuves. Comme en outre il ne se détache que de peu de côtes des plateaux glacés en comparaison de la masse des eaux qui se fondent tous les étés à la surface de ces grands plateaux, et qui ne contiennent point de sel, l'on peut sans erreur sensible considérer la masse entière des eaux qui découlent chaque été des régions polaires comme une eau sans sel, et nous voilà en état de prononcer sans incertitude sur la marche de ces eaux.

L'eau de mer de ces parages étant comme l'eau des glaciers à la température 0, ces deux eaux se comporteront l'une vers l'autre comme leur pesanteur spécifique l'exige, c'est-à-dire, que l'eau des glaciers glissera sur la surface de la mer vers l'équateur, sans s'enfoncer nulle part; car bien que pendant cette marche l'action chimique fasse passer du sel dans cette eau douce, et que les vents produisent un mélange mécanique avec les couches voisines inférieures, cependant la pesanteur spécifique du mélange chimique et mécanique sera toujours moindre que celle de l'eau inférieure. Bien plus, transportons en idée de l'eau pure de glaciers avec sa température 0 jusque sous l'équateur où l'eau de la mer est à sa plus haute température 30° C., l'eau pure ne s'enfoncera pas; car la différence spécifique d'une température à l'autre est $\frac{1}{185}$, et la différence entre l'eau de mer, sous l'équateur, et l'eau pure, toutes deux à la température 0 est $\frac{1}{34}$. Ainsi il n'est en aucun cas possible que l'eau des glaciers polaires arrive au fond de l'océan pour y rabaisser la température.

Nous concluons avec certitude de tout ce qui a été dit sur la température de la mer dans son intérieur, que le fond de l'océan est environ à la température 0 de nos thermomètres, et que cette température hausse avec les hauteurs au-dessus du fond. Nous concluons que ce phénomène est diamétralement le contraire de ce qui devrait avoir lieu s'il existait au-dessous du fond de l'océan une source de chaleur qui communiquât à l'océan sa température actuelle, et que l'océan nous offre à cet égard, quant à la cause comme quant aux effets, le contraire de ce que l'observation nous indique dans les continens.

Chapitre III.

Solution de la contradiction apparente entre les phénomènes terrestres et marins.

Nous avons trouvé dans les chapitres précédens une différence si complète entre les observations faites dans l'intérieur du continent et dans l'intérieur des mers, quant à la série des températures, qu'on peut la nommer une contradiction. Mais il n'y a point de vraie contradiction dans la nature, et quand nous croyons en trouver une, c'est notre ignorance qui la fait, en attribuant à une seule et même cause, deux phénomènes qui ont deux causes hétérogènes. Pour arriver à notre solution, commençons par le phénomène que nous offre l'océan.

La température de la mer diminue de la surface vers le fond d'abord assez rapidement, puis lentement et enfin pour la majeure partie de la profondeur avec une lenteur extrême; d'où nous avons conclu d'après les expériences de M. Lenz, qu'au fond de l'océan la température doit être aux environs du zéro de nos thermomètres. Nous avons de plus dû en conclure que les températures supérieures sont dues à l'action des rayons solaires, et que la température propre du globe à cette profondeur ne peut pas excéder celle qu'indique le zéro du thermomètre.

Mais de même qu'il a été démontré que l'hypothèse du globe ardent ne peut résoudre le problème marin, il est tout aussi certain que les températures observées dans les continens et qui vont en croissant vers le bas, ne peuvent nullement s'expliquer par l'action des rayons solaires. Il faut donc absolument trouver une autre cause propre aux continens seuls, capable de produire une température qui augmente avec la profondeur.

Cette autre cause se trouve consignée dans ma *Physique de la Terre*, imprimée en 1815. C'est l'action volcanique qui a eu lieu autre fois, lors de la formation de l'écorce du globe terrestre, et avec une bien plus grande énergie qu'elle ne développe aujourd'hui. Cette antique activité volcanique est attestée par les déchiremens et les bouleversemens des roches, par le nombre considérable de volcans que

nous regardons comme éteints et répandus sur presque toutes les latitudes et longitudes, par les produits volcaniques en grandes et petites masses que l'on rencontre si fréquemment là où nous ne retrouvons plus le volcan lui-même, au nombre des, quels nous ne nommerons que le basalte et ses variétés, qui est si répandu que le célèbre Werner avait été porté à croire que les basaltes furent les derniers produis de la précipitation générale qui forma les continens qu'ils avaient autre fois couverts entièrement, et qu'ils ne manquent que là où le délitement et les forces mécaniques des révolutions l'ont enlevé.

L'activité actuelle du procès volcanique est démontrée non seulement par les anciens volcans encore actifs, par les nouveaux volcans qui se forment de nos jours sur les continens, les îles et sous la mer à proximité des côtes, mais surtout par les tremblemens de terre dont il se manifeste si souvent de nouveaux foyers.

L'action volcanique a donc, lors de la formation de notre globe, produit une température très élevée, capable de fondre les roches sur lesquelles elle exerçait immédiatement son action, dans toute l'étendue des continens d'aujourd'hui. Une partie de cette température s'est répandue dans l'intérieur du globe en progression décroissante dans la direction du centre; sans que nous puissions savoir si le centre y participe déjà d'une quantite sensible. L'autre partie s'est répandue vers la circonférence également en progression décroissante et s'est dissipée plus ou moins dans l'immense espace. Les opérations volcaniques d'aujourd'hui sont un reste, une faible continuation de ce grand procès qui produit encore de la chaleur inégalement disséminée, et dont nous apercevrions l'inégalité bien davantage, s'il n'avait pas lieu à une grande profondeur.

Ajoutons à cela que les explosions volcaniques ont souvent vomi des pyrites qui ont formé des lits sur les couches de roches déjà existantes, puis recouvertes de nouvelles roches. Ces lits de pyrites, continuellement activés par l'eau atmosphérique qui se fait jour jusqu'à ces lits par les crevasses des roches, deviennent de nouvelles sources partielles de chaleur qui, se trouvant incomparablement plus près de la surface que les foyers des volcans, peuvent augmenter sensiblement en certains

lieux la température intérieure aux profondeurs que l'on a sondées avec le thermomètre. Ce sont ces eaux qui nous fournissent les eaux minérales, chaudes si l'eau n'a qu'un court trajet à faire jusqu'au jour, et si l'action de l'eau sur les pyrites est énergique et la quantité d'eau petite; froides si l'intensité du procès est faible, le trajet long et la quantité d'eau affluente considérable. Au reste je ne range pas dans cette classe le Geyser, le Ricum et les autres fontaines jaillissantes de l'Islande, que je regarde comme produits immédiats des volcans de cette île.

Nous devons compter encore au nombre des causes de la chaleur continentale le charbon de terre, les houilles de toute espèce, restes antiques d'une végétation gigantesque qui a eu lieu dans les derniers tems de la formation de l'écorce de la terre, substances inflammables qui ne sont nullement (même à une température moyenne) indifférentes à l'oxigène, soit de l'atmosphère, soit de l'eau qui pénètre jusqu'à eux, et dont l'action peut s'élever jusqu'à une espèce d'action volcanique, telle que nous les offrent les feux sacrés de Bakou, leurs environs sur la côte dela mer Caspienne et toute la mer Morte; à quoi nous ajouterons tant de points de la terre où se forment la pétréole et le bitume en France, en Italie, en Allemagne, en Bohême, en Chine et dans l'Amérique septentrionale.

Je n'allègue pas la chaleur produite par le grand procès de la précipitation générale dont nous devons la première idée à M. de Humboldt, parce que cette température, ayant eu lieu à la surface entière du globe, ne peut pas servir à expliquer les anomalies locales que les observations nous offrent.

Ces considérations nous expliquent les grandes anomalies que l'on a observées dans les mines relativement à la série des températures dans l'intérieur de la terre. Nous pourrions même ajouter aux causes principales citées l'oxidation lente des métaux à l'état métallique, et des changemens chimiques que quelques oxides et même les roches peuvent subir par l'air, l'eau et l'acide carbonique. L'on en tirera facilement la conséquence que la température des couches extérieures des continens doit être un peu plus élevée que les couches analogues de l'océan, même indépendamment de la différence d'action des rayons solaires sur les liquides et les solides, et de la plus grande

évaporation à la surface de la mer qu'à la surface de la terre-ferme, et que cette différence de température doit être d'autant plus saillante que l'on perce plus avant dans l'intérieur. Ces considérations nous expliqueraient même (si le refroidissement extérieur pendant l'hiver ne le faisait pas déjà) pourquoi M. Scoresby a trouvé une petite augmentation de température avec la profondeur dans la mer entre le Grönland et le Spitzberg, les terrains de ces deux masses de terre-ferme et vraisemblablement le fond de la mer entre deux, étant entièrement volcanique.

Ces mêmes considérations nous découvrent la possibilité d'une différence de chaleur propre d'un lieu à un autre à la profondeur où le thermomètre est stationnaire sur les continens; aussi les observations thermomètriques consignées dans les tables qui se trouvent au commencement du premier chapitre nous offrent en effet de telles différences très palpables à des profondeurs où toute influence climatique cesse, que l'on ne peut attribuer qu'à des circonstances locales. Or comme nous ne connaissons point d'autres causes que celles qui viennent d'être énoncées, et que celles-ci suffisent pour rendre compte du phénomène, nous croyons avoir résolu dans tous ses points le problème qui fait l'objet de ce chapitre *).

Résumons à présent le contenu de ce qui a été dit jusqu'ici. En ne nous appuyant que sur des faits bien avérés, sur des calculs justes et sur une logique sévère, nous avons obtenu les résultats suivants:

---

*) Les partisans du système du globe incandescent voudront peut-être tenter d'expliquer ces écarts de température par la différence de pouvoir conducteur des différentes roches et de leurs suites. Mais on sentira à la première réflexion, d'abord que cette explication n'irait point aux observations dans des lieux proches l'un de l'autre, comme deux puits d'une seule et même mine, puis qu'elle ne cadre pas avec les résultats que M. Fourier a tirés de ses calculs concernant l'extrême lenteur avec laquelle la chaleur perce aujourd'hui de la profondeur de 30 lieues jusqu'à la surface. Pour obtenir à la profondeur de quelques cents mètres des différences notables de température et d'accroissement de température au même niveau, il faut que la cause de la chaleur soit incomparablement plus proche de ces points que ne le serait le globe incandescent; et c'est ce que nous offrent les causes de chaleur qui viennent d'être citées.

1) En analysant les observations thermométriques sur la chaleur intérieure du globe citées par les partisans de l'hypothèse du globe incandescent, et sans révoquer en doute la vérité de ces observations, il a été prouvé que ces suites d'observations ne méritent aucun degré de confiance, dès qu'on veut en tirer une loi numérique de l'augmentation de la chaleur intérieure des continens avec la profondeur, et que par conséquent tous les calculs basés sur ces séries n'ont en général aucune force.

2) Plusieurs de ces observations, même de celles qui ont été faites dans les mêmes puits de mines ou dans des puits très voisins l'un de l'autre, fournissent des résultats directement contraires à la loi de l'augmentation de température avec la profondeur que l'on déduit des autres observations.

3) L'hétérogénéité des couches dont l'écorce de la terre est composée, et surtout le changement de ces couches plus ou moins fréquent en différents lieux, rendent toute loi numérique générale impossible. Ainsi une telle loi n'existe pas dans l'écorce de notre globe, et l'on parviendra encore moins à prédire en théorie les degrés de refroidissement que la surface de notre globe subira dans un nombre donné de siècles.

4) L'océan offre, à la suite d'expériences nombreuses et faites à des distances très considérables en tout sens et à de grandes profondeurs, une série de températures décroissantes avec la profondeur. Les lacs offrent sur les continens une série tout-à-fait analogue, mais sur une plus petite échelle. Ces deux séries sont diamétralement opposées à celles que l'on a observées sur les continens et toutes les tentatives possibles pour expliquer ce phénomène dans l'hypothèse du globe incandescent sont infructueuses.

5) La contradiction apparente des deux grands phénomènes de la diminution de température de l'océan et de l'augmentation de température des continens avec la profondeur, se lève facilement lorsqu'on met en ligne de compte la chaleur produite autrefois et de nos jours par les opérations volcaniques de toute espèce, et autres procès chimiques; et cette action, disséminée très irrégulièrement, explique suffisamment les anomalies de températures consignées dans les observations.

6) Comme il a été prouvé que la température du fond de la mer, couvert d'une enveloppe de 6000 toises d'eau est à peu près celle du zéro du thermomètre (celle de la glace fondante), et que l'hypothèse du globe incandescent ne peut nullement se concilier avec ce fait, nous devons présumer que cette température 0 est celle de la terre entière, et non la chaleur de l'incandescence qui fond les métaux et les roches.

Chapitre IV.

Hypothèse du globe incandescent considérée comme base d'un système géologique.

Nous avons considéré dans les trois chapitres précédens la température de notre globe sous le point de vue de la Physique générale. Considérons à présent l'hypothèse qu'on nous offre sous le point de vue géologique. Car l'on veut que nous croyons à cette hypothèse au point d'en faire la base de la Géologie. Leibnitz et Buffon nous ont déjà livré ce système, reproduit aujourd'hui avec quelques modifications. En voici les principaux traits caractéristiques, fournis par les *Plutonistes* d'aujourd'hui qui ont succédé aux *Vulcanistes* d'autrefois.

„La terre était jadis une masse ardente et fondue, et l'est encore à son intérieur. „Nos continens et nos îles n'en sont que des portions refroidies et solidifiées. Toute „l'eau qui se trouve aujourd'hui à sa surface et dans son intérieur était alors en „forme de vapeur, augmentant de beaucoup le volume actuel de l'atmosphère. Le „refroidissement de la surface du globe liquéfié a causé un retrait, et produit des „crevasses et des creux considérables. Dès que la surface eut perdu assez de sa tem„pérature pour permettre la réduction des vapeurs sous la pression de l'atmosphère „d'alors, l'épaisseur de la croûte refroidie jusqu'à la solidification dût déjà être con„sidérable. Les pluies qui résultèrent de la condensation rapide des vapeurs furent „très abondantes, formant des torrens qui causèrent de grands ravages. L'eau qui „pénétra par les crevasses des masses déjà refroidies et solidifiées jusqu'à la masse „encore ardente, produisit par son évaporation subite d'énormes explosions qui

„formèrent nos montagnes en projetant les roches, et en leur donnant la situation „inclinée que la Géognosie nous décrit. La continuation des torrens de pluie sillonna le terrain déjà formé, produisant les vallées où coulent nos fleuves qui contiennent encore aujourd'hui, mais en petit, le travail des anciens torrens. Les roches „cristallisées sont le produit immédiat du refroidissement, et les roches et autres „masses non cristallisées furent engendrées par la masse des eaux qui mirent en solution les roches et les terres solvables, et les déposèrent ensuite. C'est pendant que „se faisaient ces dépôts que commença l'animalisation dans l'océan.“

Si l'on voulait remonter plus haut, jusqu'à la formation des terres, en admettant avec H. Davy que le globe terrestre n'était composé à cet égard que de métaux et de métalloïdes, et que l'oxigène nécessaire à leur oxidation faisait aussi partie de l'atmosphère d'alors, on s'embarquerait dans de nouvelles difficultés propres à cette hypothèse, que nous voulons éliminer comme n'appartenant pas précisément au système plutonique, en passant de suite à la période où la masse était déjà oxidée, mais encore à la température de fusion.

La première objection qui se présente contre le système plutonique est prise des effets du refroidissement. Observons en les détails. Le refroidissement n'a pu percer que très lentement dans l'intérieur, dans les principes très justes de M. Fourier. Le retrait a donc dû s'opérer sur des couches très minces et, par conséquent, produire une infinité de fissures et ne laisser que peu d'espace d'une fissure à l'autre. L'on aurait absolument tort, dans le but de se réserver de grandes masses sans fissures ni crevasses, mais avec de grands espaces vides entr'elles pour en former des vallées, de se représenter les fissures comme des crevasses proportionnées à l'épaisseur de l'écorce entière, ou même en proportion de la surface entière du globe, en disant que, si le retrait produit dans de petits morceaux des fissures d'un vingtième de ligne de largeur, ces fissures sont les représentans de larges crevasses dans des masses de plusieurs lieues cubes, ou de plusieurs milliers de lieues de longueur. Car les lois chimiques ne s'exerçant toujours que sur des masses infiniment petites et fort rapprochées, il est indifférent pour chaque effet particulier, que les forces chimiques

agissent sur une grande étendue ou sur une petite. Les effets auront lieu sur chaque point et ne seront que répétés et multipliés, mais pas concentrés sur peu de points. Le basalte, par exemple, que nous trouvons en masses incomparablement plus grandes que les morceaux de minéraux que nous pouvons soumettre au feu de réverbère, ne nous offre que des fissures au lieu de ces larges crevasses, et l'épaisseur des prismes formés par ces fissures ne se mesure que par pouces, quoique le refroidissement de cette roche dans l'océan ait dû être beaucoup plus rapide que celui de la croûte du globe, qui n'eût été en contact qu'avec l'atmosphère.

Par le même principe, les petites cavités ou boursouflures qu'on observe dans les pierres, terres ou métaux fondus ne peuvent point nous autoriser à supposer que par le procès du refroidissement général des grandes masses elles soient devenues des cavernes dans l'écorce de la terre. Les Pyro-géologistes ont presque tous commis cette faute, regardant, en quelque sorte, les phénomènes qui ont lieu dans de grandes masses comme des dessins amplifiés des petits phénomènes qu'on observe dans les petites masses.

Ainsi, si l'écorce du globe eût été produite par le refroidissement d'une masse liquéfiée par la chaleur, elle ne pourrait nous offrir qu'une masse sillonnée de fissures qui ne se trouveraient qu'aux mêmes petites distances l'une de l'autre auxquelles on les observe dans de petits morceaux exposés au feu de réverbère *).

---

*) L'on objectera peut-être contre ce théorème physique, que la Nature nous offre cependant des masses sans fissures, quoiqu'elles aient été travaillées par le feu. Les volcans nommément nous livrent non seulement des laves poreuses et fissurées, mais aussi des laves compactes en grandes masses. A cela je réponds:

1) Les laves ne sont pas des masses fondues par le feu seulement; car nous verrons par la suite que la température du foyer des volcans n'est qu'environ $\frac{1}{15}$ de celle qu'il faut pour fondre la silice, et que, par conséquent, quelle que soit la cause qui ait opéré l'espèce de fusion que les laves ont subie (l'eau aidée d'une très haute température) ces deux genres de liquéfaction ne sont pas les mêmes; l'on ne peut donc pas conclure des effets de l'un à ceux de l'autre.

2) Les laves s'écoulent dans un canal qu'elles se creusent elles-mêmes, soit dans l'ancienne lave, soit dans le terrain naturel, et dilatent par conséquent les trois parois de ce canal autant que la lave ellemême est dilatée au moment où elle vient d'être coagulée. Le retrait est donc commun au canal creux

Mais, les observations des géognostes ne nous indiquent pas une telle structure. Elles nous offrent, à la vérité, de nombreuses fissures et crevasses, mais très éloignées les unes des autres, et évidemment comme des fractures, produit de forces mécaniques telles que des chocs, des courbatures, etc. Ainsi la texture massive actuelle des roches répugne à l'idée que l'écorce de notre globe se soit formée par voie de refroidissement.

Examinons spécialement le granite dans la supposition que cette roche ait été autrefois dans l'état de fusion. Les pesanteurs moyennes spécifiques du Feldspath, du Quartz et du Mica sont 2,518; 2,650; 2,750 *). Ainsi le Mica aurait dû se loger au fond de la masse liquéfiée, d'autant plus sûrement qu'exposé à la chaleur incandescente, il devient liquide comme de l'eau, alors que le Feldspath n'obtient que les premiers degrés de fusion. Et si l'on veut objecter que peut-être la viscosité du Feldspath et du Quartz auraient pu s'opposer à ce rassemblement du Mica dans la région inférieure, alors le Mica aurait dû, en vertu de sa pesanteur spécifique, de sa liquidité et de l'attraction capillaire, se loger dans les fissures du Feldspath et du

---

et à la masse qu'il contient. Donc le retrait relatif de la lave est nul, et ne peut par conséquent pas produire de fissures.

3) Par contre, si nous considérons le refroidissement de la croûte du globe fondue par la chaleur seule sur toute sa surface, nous n'avons nulle part un canal où la masse fondue se trouve renfermée, et qui réduise le retrait à zéro. Si, par exemple, le retrait, à compter de la température qui eût dû avoir lieu au moment où la masse se coagula jusqu'à la température actuelle, va à $\frac{1}{300}$ sur une seule dimension (et c'est la moins que l'on puisse admettre) le retrait linéaire de tout un méridien se montera 80000 toises, espace qui n'est plus occupé par la matière solide du globe, et qui doit, par conséquent, se remplacer par des hiatus plus ou moins larges ou étroits. Or, comme le refroidissement lent suppose que les coagulations successives n'auraient pu se faire que par couches très minces, le retrait n'a pu avoir lieu que sur ces minces couches, et l'on ne voudra pas supposer qu'une couche de quelques lignes d'épaisseur n'éprouve l'effet du retrait que sur des points très éloignés l'un de l'autre, et qu'il doit en résulter des masses compactes de plusieurs cents ou milles toises de longueur. Notre expérience en petit est parfaitement applicable et prouve le contraire.

*) L'on objectera peut-être que la proportion des pesanteurs spécifiques de ces trois substances du granite sont, à l'état de fusion, d'autres qu'à l'état de cristallisation. D'accord, pour éviter toute dispute sur un sujet inconnu. Mais on accordera de même qu'à l'état de fusion, les pesanteurs spécifiques ne sont pas égales; et alors le raisonnement subsistera, et nous aurons seulement une autre suite de couches superposées.

Quartz lorsque ces substances s'étaient déjà consolidées, tandis que le Mica devait être encore liquide. Nous prouverons tout à l'heure que cette assertion n'est pas une fiction ou une supposition gratuite.

Ainsi, dans la supposition que la chaleur du globe ait été assez intense pour donner au Quartz pur et au Feldspath pur une fluidité parfaite, et livrer ces deux substances à la loi de cristallisation, le refroidissement n'eût pas produit du granite, mais trois couches superposées, l'inférieure de Mica, la moyenne de Quartz, la supérieure de Feldspath; et dans le cas où ces deux dernières substances eussent été trop visqueuses pour permettre le rassemblement de chaque espèce de matière à sa place indiquée par la pesanteur spécifique, nous n'aurions au lieu du granite qu'une composition de Feldspath et de Quartz fissurée et parsemée de très petits creux, dont les fissures seraient injectées de Mica. La Nature nous offre au contraire le granite en grandes masses sans fissures visibles, chaque substance dont il est composé, existante à part et en contact parfait avec les autres, et nommément le Mica en petites masses feuilletées qui n'offrent aucun signe de fusion.

Ce défaut des caractères de fusion livre une troisième objection. Les trois substances qui constituent le granite ne sont qu'apposées l'une à l'autre, et retenues dans cette position par la seule attraction de surface, comme des lamelles de cristaux avec des limites parfaitement tranchées, sans le moindre mélange, sans passage géognostique. Si l'on considère que les masses de roches superposées au granite auraient eu besoin de plusieurs siècles pour se coaguler, pendant lesquels la couche granitique aurait dû rester liquide, il n'y a aucun doute que les trois substances qui la composent auraient eu tout le tems de se mélanger par l'affinité physique, non seulement au point de n'avoir point de limites distinctes, mais complètement et de manière à former une seule masse homogène, que la cristallisation n'eût pu séparer. Nous en avons la preuve dans les gangues proprement dites, qui n'ont même été que peu de tems exposées à la chaleur volcanique, telles que les agathes, les Mandelstein, les jaspes, la pierre à fusil, les laves vitrifiées, etc. Toutes ces substances sont composées de matières parfaitement soudées entr'elles, et souvent avec la roche

qui contient le filon, et offrent des passages géognostiques sans nombre qui finissent par être imperceptibles. Ainsi, dans la supposition que les trois substances du granite se fussent trouvées dans l'état de fusion, elles nous offriraient, comme les pierres que nous venons de nommer, des preuves irrécusables de cet état, et n'eussent pu nullement produire la structure granitique. Il en est de même de la structure porphyrique dont les grains n'offrent pas de limite tranchée avec la pâte. En général une limite tranchée, sans passages d'une substance à l'autre, doit être considérée comme une preuve que la roche n'a pas subi le feu de fusion, quoique la cristallisation et même le dépôt informe, humide, produit dans l'eau, puisse produire des limites effacées, des passages d'une roche à l'autre et nous les offre en effet très souvent.

L'on repliquera peut-être que la cristallisation aurait pu cependant séparer les masses fondues les unes dans les autres, et apportera pour preuve les beaux cristaux de toute espèce que nous offrent les géodes. Il ne serait pas difficile de répondre que l'on accorde ici à une cause encore très peu connue des effets qu'on ne doit attribuer qu'à des causes connues. Mais consultons l'expérience que la Nature nous offre dans les gangues. Nous y trouvons à la vérité les cristaux de roche de la plus grande pureté tapisser l'intérieur des géodes. Mais la masse de l'enveloppe est une pierre siliceuse mêlée en grandes proportions avec de l'alumine et des oxides, surtout de fer. Tout ce qu'on peut dire en faveur de l'hypothèse est que, tout comme la congélation de l'eau (qui est originairement une cristallisation) extrait d'une masse d'eau salée un amas de cristaux qui contiennent très peu de sel, de même la cristallisation de la masse des géodes extrait de cette substance une portion de silice qui ne contient que $\frac{1}{100}$ de matière étrangère. J'abandonne une réplique qu'on pourrait faire contre ce parallèle pour m'en tenir à l'expérience pure et simple et dis: Si la cristallisation des trois substances du Quartz, du Feldspath et du Mica s'est faite dans ces principes, si le granite n'est qu'un composé de petites géodes, pourquoi chaque grain de Quartz n'est-il pas enveloppé d'un mélange strié de silice, d'alumine et d'oxide? Pourquoi la Nature n'a-t-elle pas produit dans les granites les

mêmes effets que dans la géode, si la cristallisation a été produite de côté et d'autre par les mêmes causes?

Puisque nous en sommes à l'expérience, consultons les expériences de l'art. M. Hall et d'autres minéralogistes ont fondu des morceaux de pierre calcaire dont le refroidissement a été suivi de la cristallisation, et les vulcanistes d'autrefois et les plutonistes d'aujourd'hui regardent ces expériences comme des preuves irréfutables de leur système. Mais je n'ai encore lu nulle part qu'on ait répété l'expérience sur le granite. Je l'ai tentée, et, bien que le fourneau dont je pouvais disposer n'ait pu fondre complètement des morceaux d'environ 12 pouces cubes, les résultats sont néanmoins instructifs.

Je plaçai dans un creuset de plombagine un morceau irrégulier de granite (N°. 1) de la grosseur énoncée. Le Feldspath était fortement teint en rouge, le Mica presque noir. Le creuset placé dans le fourneau arriva bientôt à l'incandescence et je le laissai dans cette chaleur toujours alimentée pendant 4 heures. Un autre morceau (N°. 2) environ de même grosseur et pris de la même masse que le premier fut mis dans un second creuset et resta exposé au feu pendant 12 heures du moment où le creuset était parvenu à l'incandescence. Je conservai le reste de la masse pour la comparaison. Le N°. 1 fut retiré du feu et exposé à l'air de l'atelier lorsqu'il avait encore sa plus grande chaleur. Le N°. 2 resta, après ses 12 heures d'incandescence, dans le fourneau dont le courant d'air fut arrêté, jusqu'à ce qu'après 8 heures il se trouva entièrement refroidi.

N°. 1.

Il parut après son refroidissement crevassé et cassant, au point qu'il fut très facile de le casser en deux; plusieurs petits morceaux se détachèrent de la masse presque d'eux-mêmes. Son intérieur était tranché par deux crevasses horizontales et sillonné en tout sens par de nombreuses fissures très irrégulières et plus ou moins larges. Un faible effort en arrache des fragmens. Il avait perdu totalement sa couleur rouge, à l'exception de quelques taches à sa surface, qui avaient une couleur

peu différente de la couleur primitive: l'intérieur était parfaitement décoloré, quant au Feldspath et au Quartz. Le Mica seul avait conservé sa couleur presque noire.

L'extérieur de ce morceau portait des empreintes indubitables de fusion. Un luisant d'émail était répandu sur toute sa surface; les bords des fractures étaient émoussés et d'autres proéminences formellement arrondies. A certains endroits l'on observait en outre quelques parties demi-transparentes du minéral comme poussées au dehors de la masse et fondues parfaitement, arrondies dans tous les sens. Ces proéminences, de même que tout l'émail, offraient à la loupe une masse vitrée parsemée intérieurement de bulles microscopiques précisément comme le cristal de roche que j'ai fondu si souvent au soufflet de Neumann. Le Mica n'offrait pas partout une fusion complette, mais avait conservé dans l'intérieur sa forme feuilletée, cependant les bords vus à la loupe indiquaient un commencement de fusion.

L'intérieur de ce morceau paraissait plus compacte que dans son état naturel: la cassure, plus lisse, n'était plus composée de lamelles distinctes comme celle du granite naturel non chauffé. Il n'existait qu'un commencement ou plutôt l'avant-coureur de la fusion. Le Mica même n'était complètement fondu que près de la surface. J'ai observé un point où le Mica s'élève en forme d'une petite colonne de $\frac{1}{2}'''$ de hauteur et environ $\frac{1}{5}'''$ d'épaisseur. Vue à une forte loupe, elle parut rude à sa surface et offrait d'un côté une faible proéminence longitudinale. La surface horizontale a l'air de provenir d'une cassure, de sorte que cette petite colonne ne peut être nullement considérée comme un prisme cristallisé.

N°. 2.

Lorsqu'il fut retiré froid du fourneau, le granite se trouva fortement attaché au creuset, quoique celui-ci n'offrit encore aucun signe de fusion. Cassé à coups de marteau il abandonna au granite une enveloppe extrêmement mince de sa masse. Le granite lui-même ne se trouva pas crevassé et fragile comme le N°. 1; il fallut employer de forts coups de marteau pour le briser. L'intérieur n'offrit pas de crevasses, mais une quantité de fissures remplies de Mica fondu là où se trouvait

auparavant un grain de Mica à portée. Il avait également perdu sa couleur rouge entièrement à l'exception d'une seule tache à l'extérieur tant soit peu rougeâtre. L'intérieur offrait des signes de plus grande chaleur que le N°. 1. Environ la moitié des grains avaient acquis un certain degré de transparence et de luisant, sans au reste avoir perdu leur figure angulaire, et offraient à une forte loupe une infinité de bulles plus fines que celles des grains parfaitement fondus. L'intérieur offrait quantité de grains complètement fondus, proéminens, arrondis, demi-transparens et remplis de bulles qu'une faible loupe rendait facilement visibles. Un grand nombre de ces grains vitrifiés avaient été colorés en noir à la surface du morceau par le charbon, et leur cassure avait le luisant du verre *). D'autres grains étaient colorés seulement en gris. Un grain entr'autres (tout-à-fait noir) avait au milieu de son sommet un grain de Quartz incolore incrusté dans la masse noire et non fondu. Le Mica était partout complètement liquéfié dans l'intérieur comme à l'extérieur, et tapissait en couches plus ou moins minces la surface des creux plus ou moins arrondis par la fusion dans lesquels il se trouvait, et remplissait toutes les fissures qu'il avait pu atteindre.

Ces observations nous offrent les phénomènes suivants, tous importants pour le sujet que nous traitons. Les crevasses et les fissures, la décolorisation du Feldspath et du Quartz, la fusion parfaite et imparfaite du Mica sans perte de couleur, son écoulement dans les fissures, la fusion parfaite du Feldspath (et peut-être du Quartz) à l'extérieur, les premiers commencemens de fusion du Feldspath à l'intérieur et les bulles qu'il contient. Nous allons les analyser et les appliquer à la formation du granite.

Nous ne recherchons pas les causes qui ont dû donner au globe terrestre la chaleur capable de le mettre à l'état de fusion; il nous suffit de savoir que, dans l'hypothèse plutonique c'est son refroidissement qui a dû produire les roches actuelles et nom-

---

*) J'ai souvent observé le même phénomène lorsque je fondais des fragmens de cristal de roche dans le creux d'un charbon au soufflet d'hydrogène et d'oxigène. Ce mélange (combinaison ?) du charbon avec le feldspath et le quartz mériterait un examen approfondi.

mément les granites. Nous admettons même en faveur de l'hypothèse que les trois substances du granite doivent avoir été (déjà à l'état de fusion) disséminées individuellement dans la position relative où nous les trouvons aujourd'hui, quoique nous ayons prouvé plus haut que cela est impossible.

Si nous voyons que les degrés de chaleur que nous avons employés ont été capables d'arrondir les cases angulaires où se trouvait le Mica, nous devons nécessairement admettre que la chaleur bien supérieure qui aurait fondu le Quartz, eût dû donner à ces cases une figure complètement sphérique, qui, dans l'hypothèse du globe incandescent, sera devenue anguleuse par la cristallisation d'abord du Quartz, puis du Feldspath, et qu'ensuite le Mica s'est cristallisé dans l'espace et la forme qui lui a été abandonnée. Voilà tout ce qu'on peut dire à cet égard en faveur de l'hypothèse. Mais le refroidissement, après avoir coagulé le Quartz et le Feldspath, aurait dû, comme nous l'avons vu plus haut, produire au moins des fissures au tems où la chaleur tenait le Mica en fusion parfaite, comme le prouve notre expérience, et la capillarité aurait dû injecter le Mica dans ces fissures. Le granite d'aujourd'hui devrait donc avoir à cet égard complètement la même texture que nous offre le morceau de granite N°. 2. Car il faut observer que, dès que le Quartz et le Feldspath eussent été coagulés, ils eussent également été cristallisés, et ne peuvent plus dès lors être considérés que comme une pierre chauffée qui se refroidit et soumise par conséquent au retrait. Or nous ne trouvons cette structure (cette infiltration de Mica) nullepart dans le granite d'aujourd'hui. Donc ce granite ne peut pas avoir été autrefois à l'état de fusion.

Le Quartz et le Feldspath du granite exposés à la chaleur incandescente ont entièrement perdu leur couleur. Quelle que soit la matière colorante, elle a disparu. Il s'est fait un changement dans cette matière qui lui a ôté sa couleur, ou qui l'a tout-à-fait expulsée du minéral entier. Or la chaleur du granite du globe ayant dû être plus considérable que celle que nous avons pu employer sur nos deux morceaux, nous devons admettre que le Quartz et le Feldspath du granite d'aujourd'hui, s'il avait été fondu, n'aurait pas de couleur, et que par consé-

quent il aurait dû l'obtenir après le refroidissement. Mais nos deux morceaux de granite sont exposés à l'air depuis trois mois sans donner le moindre indice d'une couleur naissante. J'ai tenu en outre pendant 2 mois des fragmens de l'un et de l'autre sous l'eau, sans que la couleur voulût reparaître. Mais à tous les points où se trouvait du Mica, excepté ceux où cette substance avait été complètement fondue, il s'était formé du tritoxide de fer; là où il n'y avait pas de Mica la blancheur était parfaite. Ainsi il ne paraît pas que l'air ni l'eau colorent le Feldspath et le Quartz; ce que l'on sait d'ailleurs par les cristaux de ces deux substances, qui ne se sont pas colorés dans la suite des siècles, même sous l'eau de mer. Il suit donc de-là que les granites n'ont pas été soumis à la chaleur incandescente, et n'ont pas acquis leur état actuel par le refroidissement.

Nous avons obtenu, dans notre expérience au moins, du Feldspath parfaitement fondu incolore et transparent sans la moindre trace de cristallisation. Il avait au contraire la nature du verre et était intérieurement rempli de fines bulles, que le refroidissement ait été subit ou lent. La même chose arrive lorsqu'on fond le cristal de roche et d'autres pierres ou terres au soufflet de Newmann. Nous n'avons donc aucune raison d'admettre que le Feldspath et le Quartz fondus se cristallisent. Si l'on objecte que les masses fondues étaient trop petites pour donner lieu à la cristallisation, nous répondrons que la cristallisation humide a lieu, quelque petite que soit la masse à cristalliser; nous répondrons que la Nature nous offre dans des géodes, qui n'ont pas ½ pouce de diamètre, quantité de cristaux extrêmement fins, beaucoup plus petits que les masses que nous avons fondues. Ainsi, il n'y a aucune cause qui ait pu empêcher la cristallisation dans notre expérience, et nous devons en conclure que le Feldspath et le Quartz fondus ne cristallisent pas, pas plus que le Quartz mêlé à des oxides, c'est-à-dire notre verre ordinaire. Le Mica, fondu jusqu'à la liquidité la plus complète n'a donné également aucun signe de cristallisation, quoiqu'il en ait eu pleine liberté et quoique les creux qu'il remplissait avant sa fusion, et qu'il ne remplissait plus après, lui eussent offert les mêmes circonstances que les géodes. Il est donc impossible

d'expliquer la cristallisation d'aucune des trois substances du granite par voie de fusion et de refroidissement.

L'on objectera peut être, qu'ayant statué dans ma Géologie et ici que les gangues contenues dans les filons, et écoulées en lits (comme des laves) à la surface des roches déjà formées, sont des produits volcaniques, j'ai admis moi-même cette cristallisation par la fusion et le refroidissement, que je réfute en ce moment. Mais cette objection décèlerait une connaissance bien superficielle de ma théorie des filons et de la gangue. Selon moi (V. mon ouvrage allemand: *Grundriss der Physik der Erde und Geologie* p. 688 et suiv.), les matières siliceuses et autres, qui se trouvent au fond des cavernes volcaniques, sont en contact avec de l'eau, sous une température de 1400° R. au moins, et sous une pression de plus de 3700 atmosphères. Cette chaleur et cette pression secondent l'affinité de l'eau pour la silice, l'alumine, etc., affinité qui sans cette température et cette compression ne suffirait pas pour résoudre ces terres. Ainsi cette fusion est proprement une solution dans l'eau d'une très haute température et maintenue liquide par la pression. La gangue liquéfiée de cette manière et chassée avec rapidité dans le filon avec cette haute température au moment où cette crevasse se forme par la force expansive de la vapeur, se débarrasse de son eau superflue par voie d'évaporation dès que la tendance de l'eau à se dilater n'est plus assez coercée par le poids énorme qui la surmontait, surmonte elle-même son affinité pour la silice et l'alumine, et s'échappe (comme dans nos cristallisations artificielles) par voie d'évaporation, abandonnant les substances cristallisables aux lois de la cristallisation. Cette hypothèse, qui n'a en soi rien de contradictoire, s'élève à la dignité d'une théorie par les considérations suivantes.

a) Nous voyons que lorsque le Vésuve émet tranquillement et avec continuité ses laves chauffées au rouge, qu'il s'élève de ces laves une grande quantité de vapeurs qui n'a pu se faire jour entre le liquide et les parois du canal plein, mais qui se développe de la lave même, développement qui se continue encore le long du fleuve de lave.

b) Nous n'avons nulle raison d'admettre que dans le fond du volcan il existe le degré de chaleur que produit le soufflet de Newmann, puisque la température avec laquelle les laves en sortent, est de beaucoup inférieure à celle qu'il faut pour fondre la silice ou le platine à sec (14000° R. selon Wedgwood); le passage de la lave dans le canal n'étant pas capable d'enlever les $\frac{9}{10}$ de la chaleur, surtout lorsque l'écoulement a duré quelque tems. Il faut donc une substance qui favorise la liquéfaction, l'eau qui, comme l'on sait d'ailleurs, est un dissolvant, c'est-à-dire un liquéfacteur, si puissant, surtout aidé de la chaleur. La très petite quantité de soude que les laves contiennent (plusieurs n'en contiennent pas du tout) ne peut expliquer le phénomène.

c) La gangue, comme toutes les autres pierres cristallisées, doit conserver une partie d'eau (eau de cristallisation) qui fait corps avec la substance cristallisée. Une très haute température sous la pression simple d'une atmosphère doit vaporiser cette eau dès que la substance cristallisée est rammolie. De-là ces nombreuses bulles microscopiques que nous apercevons dans les grains de Quartz et de Feldspath que nous avons fondus.

d) Enfin, n'oublions pas que, si lors de la lutte entre les vulcanistes et les neptuniens, Hall et d'autres ont fondu des chaux carbonatées qui se sont cristallisées par le refroidissement, cette fusion a eu lieu sous une pression de 50 à 180 atmosphères qui y retenaient l'acide carbonique et l'eau de cristallisation. Sans cette pression, ces deux substances se volatilisent et la cristallisation n'a pas lieu.

En résumant tout ce qui vient d'être dit sur la texture du granite, nous devons conclure que, dans l'hypothèse du globe terrestre liquéfié par la chaleur, la cristallisation des substances du granite est impossible. Car même en admettant que la pression atmosphérique, lorsque toute l'eau de l'océan et des continens était dissoute en vapeurs peut être évaluée à 600 pressions atmosphériques d'aujourd'hui, cette pression serait loin d'égaler celle que la nature emploie au fond des cavernes volcaniques pour retenir le peu d'eau de cristallisation nécessaire au Quartz et au Feldspath, pression qu'on peut évaluer au moins à 3700 atmosphères

d'aujourd'hui. Si, pour éviter cet argument, l'on supposait qu'il ne faut point d'eau pour cristalliser le Quartz, ou que son eau de cristallisation ne pût en être séparée par aucun degré de chaleur, et que les petites bulles observées dans le Quartz et le Feldspath fondus sont dues à de l'eau hygrométrique ou à de l'air aspiré par le cristal refroidi (qui tous deux au reste auraient dû se dissiper par les mêmes pores qui leur avait servi d'entrée, long-tems avant que les cristaux aient obtenu la chaleur de fusion), alors il s'ensuivrait nécessairement que tout le Quartz et le Feldspath existans ne pourraient être que du verre parsemé de bulles microscopiques.

Ainsi, il est clair que l'hypothèse plutonique n'explique pas la structure d'une des principales roches dont l'écorce de notre globe est composée et aucune structure cristalline. Elle explique encore moins celle des roches calcaires pétries de coquillages, et moins encore celle des masses informes alumineuses qui, dans cette hypothèse, ne pourraient être au plus que des briques fêlées. Pour la formation de ces deux derniers genres de roches Pluton doit nécessairement avoir recours à Neptune; et comme nous avons le choix entre ces deux divinités, nous trouverons plus commode et plus conforme à nos connaissances géognostiques et physiques d'abandonner tout l'ouvrage au Dieu des mers qui s'y entend beaucoup mieux que le triste Pluton, et qui, lorsqu'il aura besoin de feu, s'adressera en toute sûreté à l'industrieux Vulcain.

Avançons dans la Géologie de l'hypothèse plutonique, et examinons si elle explique la suite des roches superposées les unes aux autres comme la Nature nous les offre, ou plutôt si cette suite n'est pas en contradiction avec l'hypothèse. Nous n'avons besoin que de nous en tenir aux grands traits, sans entrer dans les détails des variations et modifications de ces suites.

Si la masse entière du globe a été autrefois liquéfiée par une chaleur quelconque, il n'y a que deux hypothèses possibles:

1° Ou les masses autrefois fluides qui forment les roches d'aujourd'hui étaient mêlées, formant une seule masse homogène.

2° Ou ces masses encore à l'état liquide formaient des couches distinctes les unes des autres; ce qui suppose à la fois une tranquillité parfaite à la surface et à l'intérieur, et un défaut d'affinité physique entre les terres et les oxides qui composaient ces couches hétérogènes, ou au moins une affinité si peu énergique qu'elle n'ait pu causer pendant une longue suite de siècles un mélange spontané d'une couche à l'autre.

Dans le premier cas, nous ne connaissons aucune force naturelle qui ait pu former dans la masse homogène liquide des couches de roches si différentes les unes des autres. Car l'on ne voudra pas, j'espère, nous inviter à croire que la force de cristallisation, qui n'agit qu'à des distances infiniment petites, ait agi autrefois à des distances de plusieurs toises, ou même des centaines de toises pour former des strates de pareilles épaisseurs.

Dans le second cas, la suite des couches liquides aurait dû nécessairement suivre l'ordre des pesanteurs spécifiques, et se coaguler dans cet ordre; sans quoi, si de plus pesantes avaient été superposées sur de plus légères, celles-là auraient dû s'enfoncer et se mêler mécaniquement à leur passage avec les inférieures, troubler ainsi tout ordre de superposition, et ne produire que des couches mélangées. Or si nous rangeons les roches selon leur pesanteur spécifique, nous aurons, de haut en bas, les calcaires, les granites, les phyllades, les porphyres, les basaltes. Or tout le monde sait, qu'à l'exception des calcaires, les roches nommées se suivent dans un ordre contraire et même que, parmi les calcaires, les marbres se rangeraient sur la ligne des phyllades. Donc le second cas satisfait tout aussi peu que le premier. Et si l'on examine les fréquentes modifications que les suites générales nous offrent, l'on sentira facilement que ce n'est pas la pesanteur spécifique qui a présidé à l'ordre de superposition; ce qui cependant aurait dû avoir lieu, si les masses des roches actuelles avaient été à l'état de fusion, même dans le cas où l'on supposerait que les roches à l'état de fusion ne se suivent pas dans le même ordre de pesanteur spécifique que les mêmes masses à l'état solide.

L'on objectera peut-être que les basaltes, étant des éjections volcaniques, ne doivent pas être admis dans la série générale des couches. Nous en sommes très persuadés; mais pour que cette objection pût parler en faveur du système, il faudrait que le système offrît la possibilité de la formation des volcans, question que nous allons examiner tout-à-l'heure. Nous avons encore une considération à offrir au lecteur sur la structure des roches.

Nous supposons qu'une portion de l'écorce du globe se soit déjà formée par voie de refroidissement, et que cette croûte refroidie ait une centaine de pieds ou de toises d'épaisseur. Il est certain que cette croûte fissurée, crevassée et déchirée en lambeaux par le retrait nagera sur la partie fluide, comme les laves froides sur les laves encore liquides, et s'y enfoncera jusqu'à un certain point. La partie liquide sera donc forcée de monter dans les crevasses et de s'y refroidir bientôt. Nous aurions donc non des masses homogènes de granite, de phyllade, de porphyres, des calcaires, etc. mais partout des couches veinées que la Géognosie ne nous a pas signalées. C'est pour les roches à peu près le cas que nous avons désigné pour les grains de granite relativement au Mica.

Venons en à présent aux volcans. Le Plutoniste fait de notre globe entier une masse de roches *) en fusion et rejette dans l'atmosphère toute l'eau que les mers et les continens nous offrent, et ce ne serait que long-tems après que cette masse se fût solidifiée à son extérieur, que l'eau eût pu se précipiter de son siége élevé. Or nos considérations précédentes ont prouvé en théorie et par l'expérience que cette écorce solidifiée eût dû être parsemée d'une infinité de fissures et de crevasses, de sorte qu'elle n'eût formé que des amas de petites pierres peu adhérentes entr'elles, offrant une masse peu susceptible de résister à de grandes forces mécaniques. De plus, il n'y a dans ce mode de formation aucune raison d'admettre

*) Si l'on supposait que c'étaient des métaux et non des roches, l'on se trouverait vis-à-vis de la difficulté d'expliquer, dans la supposition que les couches refroidies aient été continues et sans gerçures grandes ou petites, comment les métaux ont pu s'oxider à une profondeur de plusieurs cents ou mille toises.

dans l'intérieur de cette écorce de grandes cavernes qui pussent servir de foyers aux volcans; et quand l'eau tombante de l'atmosphère fut parvenue au-dessous de la surface déjà coagulée à des couches de température bien plus élevée que la leur pour s'y vaporiser subitement, les explosions n'eussent fait l'effet que d'une mine creusée dans un terrain sans consistence; elles eussent éjeté une masse de matières, laissant pour vide un cône renversé. Cette opération ne pouvait, faute de tems et d'une source à part de chaleur, refondre les masses solidifiées, ni projeter des masses encore en état de fusion, et moins encore fournir des torrens continus de laves que les anciens volcans comme ceux d'aujourd'hui nous offrent.

Si les Plutonistes nous contestaient, malgré les preuves que nous en avons données, la nature fissurée et crevassée de la croûte refroidie et prétendaient encore que cette croûte ait été compacte, alors les petits effets même que nous venons de désigner n'auraient pas lieu, et l'eau tombant de l'atmosphère ne pourrait avoir produit que des fissures dans la superficie de la croûte déjà formée, et rien de ce qui ressemblât à un volcan.

Il suit de ces principes que le système plutonique ne peut pas non plus rendre compte des filons et de leur remplissage, qui est une opération volcanique. La solidité et la continuité des masses à fendre nous manquent également à cet égard. Leur texture crevassée et fissurée s'oppose à tout effet qui suppose de grandes résistances mécaniques; et où il n'y a pas de grandes résistances, il n'y a pas de grands effets, en Physique comme en Morale.

Le système n'explique pas mieux la situation inclinée d'une grande partie des roches, attestée par la Géognosie. Car même en accordant les forces mécaniques nécessaires (impossibles au reste à trouver), comment peut-on imaginer l'élévation d'une masse fragile sur une longueur seulement de mille toises, surtout si la force employée n'agit que subitement, comme par bouffées, ainsi que nous devons nous représenter les explosions causées par une violente et subite production de vapeur?

Pour expliquer les dévastations des continens que nous devons évidemment aux eaux, l'on admet dans le système plutonique que toute la masse de l'eau que nous connaissons et que nous ne connaissons pas était logée en forme de vapeur dans l'atmosphère, et s'est précipitée subitement dès que la température n'a pu lui conserver sa forme élastique et a produit des torrens qui ont sillonné la terre de vastes et profondes vallées. Examinons cette hypothèse en détail.

Puisque l'eau de nos mers et de nos continens a dû être primitivement en forme de vapeur, et former la bien majeure partie de l'atmosphère d'alors, il a fallu que la chaleur de la terre ait pu l'y soutenir quelque tems. Observons l'état de cette vapeur pendant ce premier tems. Cette eau formait donc une enveloppe énorme de vapeur dans laquelle notre atmosphère d'aujourd'hui était disséminée, et cet état ne devait pas se changer tant que le globe incandescent fournissait assez de chaleur pour réparer la perte causée par la radiation. Dès que cette perte surpassa le gain la précipitation de la vapeur commença. Ce procès a dû se partager en deux périodes.

1er *période*. Les vapeurs se condensent aux limites de cette atmosphère et la pluie tombe. Mais le refroidissement étant lent, le procès de la condensation n'a pas dû être rapide et la pluie formée a dû, en tombant de cette hauteur énorme, traverser des couches de plus en plus chaudes et se vaporiser de nouveau dans l'intérieur de cette atmosphère, comme nous voyons encore aujourd'hui les nuages se dissoudre lorsque leur température augmente par quelle cause que ce soit. Cette seconde évaporation devait refroidir les couches au milieu desquelles elle s'opérait, qui naturellement ont dû s'abaisser et diminuer la température des couches inférieures. Peu à peu les gouttes de pluie, formées toujours aux limites de l'atmosphère, ont atteint en forme liquide des couches toujours plus basses de l'atmosphère, jusqu'à ce qu'enfin elles arrivèrent à la surface de la terre. Voilà le premier période, pendant lequel la pression générale de l'atmosphère n'a pas changé, la quantité de vapeur qu'elle contenait étant restée la même.

2ᵉ *période.* Dès que la température à la surface du globe a permis à l'eau d'y séjourner, elle s'y est accumulée. Cette accumulation a eu deux suites, l'une que la pression atmosphérique diminuait, et l'autre que la hauteur absolue de l'atmosphère diminuait également. Or la diminution de pression favorise, comme tout le monde sait, la vaporisation; ainsi les gouttes de pluie devaient en tombant perdre par la vaporisation une portion de leur masse proportionnellement plus grande qu'auparavant, ce qui est la même chose qu'une perte réelle de pluie. La diminution de la hauteur absolue de l'atmosphère devait en rapprocher la limite de la source de la chaleur et par conséquent favoriser le recrutement de la chaleur perdue par la radiation. Ce qui devait augmenter encore la lenteur du procès de la condensation, et diminuer par conséquent la masse de pluie.

N'oublions pas enfin que la pluie, en se condensant à demeure dans la seconde période, fournit une quantité considérable de chaleur que la Physique évalue à 580° C., qui auraient dù diminuer d'autant la perte causée par la radiation, et par conséquent ralentir le procès général de la formation de la pluie.

Cet exposé du procès de la précipitation des vapeurs, dressé sur les lois de la nature, n'offre rien qui puisse nous faire présumer que la pluie ait pu, dans aucun des deux périodes de sa formation, tomber en torrens violens et causer sur la surface du globe de grands ravages. Nous ignorons même comment, les torrens de pluie, fussent-ils même accordés, ces profonds sillons, que l'on ne peut expliquer que par les ravages des eaux, auraient pu avoir lieu sur une surface parfaitement sphéroïdique, à peine ridée par de petites explosions partielles produites par les premières pluies. La mer n'existait pas encore, dans laquelle ces torrens auraient dù se rendre. Tout était encore horizontal. Ainsi le système plutonique n'explique nullement les ravages de l'eau qu'il doit expliquer.

Enfin l'on demande comment le système plutonique construit l'océan et les autres mers. Lorsque le globe entier était encore une masse liquéfiée par la chaleur, le grand creux qui devint le bassin de l'océan et les moindres qui sont ceux des autres mers ne pouvaient point exister en vertu des lois de l'équilibre. Si l'on voulait sup-

poser que là où sont les continens d'aujourd'hui la masse liquide ait été moins dense que là où est le fond des mers, il faudrait supposer encore que la masse plus légère n'ait pu s'écouler dans les grands creux. Mais qui ne voit pas que de ces deux suppositions la première est absolument gratuite et la seconde absurde? A quel Saint se vouer pour la solution du problème?

La rotation de la terre, qu'on pourrait faire commencer à des époques choisies, qu'on pourrait imprimer subitement ou bien en progression croissante ou décroissante ne servira à rien; car l'océan Atlantique et la mer du Sud couvrent malheureusement les régions équinoxiales et les régions polaires.

Le refroidissement n'aurait pu également produire ces grands creux par un retrait ici plus grand que là. Car même en admettant que l'inégalité du retrait ait pu causer des différences de volume qui répondissent à des creux aussi vastes et aussi profonds, il est certain que, dès que ces creux eussent atteint une profondeur d'un pied ou d'une toise, la fluidité de la masse inférieure eût d'abord rétabli l'équilibre et le niveau et les masses solidifiées eussent dû ou nager sur le globe liquide et rentrer dans l'horizon général, ou bien s'enfoncer entièrement dans la masse liquide et lui abandonner l'empire de la surface, selon que ces masses solidifiées eussent été plus légères ou plus pesantes que la masse liquide.

La précipitation des vapeurs aqueuses, voulût-on même lui supposer une rapidité inconcevable, n'a également pas pu causer cette énorme différence de niveau entre le fond des mers et la surface des continens. Mais, outre qu'il a été prouvé plus haut que la chute de la pluie a dû se faire très paisiblement, et par conséquent sans de grands mouvemens mécaniques, il n'y a ici que deux hypothèses imaginables: ou les continens ont été élevés, surhaussés au-dessus du niveau actuel du fond des mers qui aurait été le niveau général d'alors, ou les bassins des mers ont été creusés par les eaux.

Le rehaussement des continens ne peut se concevoir que par une espèce d'action volcanique provenant du contact de l'eau avec la partie encore liquide et ardente du globe sous la croûte déjà solidifiée. Mais nous avons déjà prouvé que cette cause

n'a pas même pu produire les cavernes des volcans isolés; comment aurait-elle pu former les immenses cavernes dont nos continens ne seraient aujourd'hui que les voûtes? D'ailleurs, cette cause, si elle avait existé, étant générale à toute la surface du globe, aurait du produire un effet général, et par conséquent à peu près égal, non ici un continent, là une mer, et toute l'eau de notre globe se trouverait recélée sous son écorce.

Pour creuser les bassins des mers dans la terre ferme qui s'était formée sur toute la surface du globe, il ne nous reste que les torrens imaginaires de pluie causés par la précipitation toute aussi imaginaire des vapeurs. Mais en accordant ces torrens de pluie aussi terribles que l'on voudra, ils ne pourront produire l'excavation désirée de deux tiers de la surface du globe. Car en supposant que l'imagination des Plutonistes pût inventer le mode d'action de ces torrens pour exécuter cette immense opération (ce dont on peut douter sans injure), il s'en suivrait que nous n'aurions que des terrains de transport sur toute la surface des continens jusqu'à une profondeur de 4000 toises.

Ainsi, de quelque côté que nous envisagions le problème, il est certain que, si jamais le globe terrestre eût été une masse liquéfiée par le feu, nous n'aurions pas d'océan, pas de mers, pas même de grands et profonds lacs; la masse solide du globe terrestre aurait une surface presque unie, produite par les lois de la gravité et de la force centrifuge, couverte partout de 4000 toises d'eau. Les Plutonistes n'ont sûrement pas imaginé que leur système finirait par mettre Neptune sur le trône de la terre entière, et reléguer leur divinité dans un enfer souterrain d'où elle n'aurait jamais dû sortir.

Chercherons-nous encore d'autres contradictions entre le système que nous combattons et les grands phénomènes que la Géognosie nous offre? Continuerons nous d'inquiéter les partisans de ce système en leur demandant comment se sont formées les nombreuses roches calcaires qui recèlent un monde de coquillages, anciens habitans de la mer, et les lits de sel gemme compagnons fidèles des gypses, comment les sables ont pu se former, non pas ceux que le Géologiste neptunien aime à faire

naître de la trituration des débris de roche arrachés à leur sol natal uniquement pour les broyer, mais ces sables qui sont évidemment des cristallisations individuelles, etc., etc.? Pour moi, je me contente parfaitement de la dixaine de points traités dans ce mémoire. J'ose croire que le lecteur impartial en fera de même, voyant que, si le système plutonique avait présidé à la formation de l'écorce de notre globe, cette écorce n'offrirait ni la structure granitique, ni des roches compactes, ni des couches stratifiées de roches, ni les suites que la Géognosie a découvertes, ni des volcans, ni des filons, ni des montagnes, ni les ravages produits par les eaux, ni l'océan d'aujourd'hui, ni les continens et les îles, mais *une croûte fêlée en tout sens et recouverte en entier d'un océan de 4000 toises de profondeur*, sur laquelle les Géologues ne forgeraient assurément pas un système plutonique.

Retournons à des principes modérés; ne rejetons pas les idées des Neptuniens ni celle des Vulcanistes, persuadés que des hommes distingués dans la Science ont pu, à la vérité, éprouver quelque partialité pour certaines idées, mais non nous offrir des idées absolument inapplicables. Croyons que la Nature a employé dans le grand ouvrage de la formation de l'écorce de notre globe les deux causes puissantes que nous trouvons encore actives, l'eau et la chaleur à des degrés supérieurs. Ce n'est que de la réunion de ces deux grands agens et des lois physiques, chimiques et mécaniques que peut résulter un système de Géologie bien fondé. Pour exposer mes idées le plus succinctement possible, qu'il me soit permis de transcrire ici ce que j'écrivais en 1825 à la classe mathématique et physique de l'Académie des Sciences de Paris.

,,Mes prédécesseurs dans cette partie, dont les noms sont si justement célébrés ,,dans les fastes des sciences naturelles, ont traité la Géologie si fort en gros, l'ont ,,encombrée de tant d'hypothèses sans fondement, et ont laissé malgré cela de si nombreuses lacunes dans leurs explications, que cette science si intéressante par elle-même, ,,qui peut faire tant d'honneur à l'esprit scrutateur de l'homme et répandre beaucoup

„de jour même sur la Géognosie, est décriée depuis une vingtaine d'années, depuis „que les Géognostes ont ajouté tant de découvertes précieuses aux connaissances que „l'on avait à l'époque où Buffon, DeLuc et Werner florissaient. L'on a si fort dé- „sespéré d'élever jamais l'édifice d'une saine Géologie, que nos plus grands auteurs „semblent convenir tacitement que cette science ne peut consister qu'en un tableau de „l'âge des formations et de leurs autres rapports réciproques, une espèce de Fac-si- „mile des archives de la nature, d'où l'on croit devoir exclure presque toute expli- „cation, toute considération vraiment physique.

„J'ai osé être d'un avis différent; j'ai osé réclamer les droits de la Chimie, de la „Physique, et de la Mécanique à l'explication de la formation de l'écorce de notre „globe. Accoutumé par mes leçons de Physique, que je donne depuis 23 ans, à sai- „sir les relations intimes qui lient entr'elles les branches des sciences naturelles et „en font un tout bien ordonné, je n'ai pu résister à l'appas d'appliquer ces idées à „l'oeuvre du Créateur qui révèle peut-être plus que tout autre l'empreinte de cet ac- „cord merveilleux de toutes les lois naturelles.

„J'ai dû fixer d'abord l'idée que je me fais de la Géologie, et tracer en caractères „généraux l'esprit de cette science. J'ai dû commencer par écarter les idées outrées „de régularité qu'on a de l'écorce de notre globe, idées qui se sont formées depuis „que l'on a cru, quoique à tort, être en possession de connaissances suffisantes „pour ranger les roches dans un système où l'on a incrusté de force les nouvelles „découvertes. Car comment nommer le nouveau sens attaché au mont *Formation*, et „l'admission d'un *terrain houillier* qui comprend, outre les houilles, des grès, des „porphyres, des calcaires, des amphibolites. Je suis bien éloigné de douter qu'il „règne de la régularité dans les suites des roches primitives. Mais vouloir la retrou- „ver dans les roches secondaires, c'est faire violence à la nature et se condamner à „forger des suites imaginaires dans le tableau général des formations. L'on sentira „cela parfaitement dès qu'on ôtera aux roches les épithètes de primitives, transitives, „secondaires, tertiaires et dès qu'on comparera la véritable suite d'un groupe avec „celle de son voisin. Il est donc essentiel de revendiquer la liberté de la nature, et

„de détruire le cadre dans lequel on l'a contrainte pour rendre au Géologiste la même „liberté sans laquelle il ne peut marcher que comme un prisonnier qui a les fers aux „pieds. Je reconnais au reste l'utilité de ces tableaux géognostiques; mais qu'on „nous les donne sans cadre et boiserie à compartimens; mais qu'on ne les considère „que comme des traits généraux de physionomie; mais qu'on accorde que chaque „groupe de roches peut avoir des traits particuliers. La Géognosie et la Géologie „se sont beaucoup trop modelées sur la Zoologie et la Botanique.

„L'erreur géognostique a engendré une erreur géologique, celle des périodes for- „melles de formation, fondée sur l'idée plus ou moins tacite que les révolutions ont eu „lieu à certaines époques fixes et sur toute la surface de la terre à la fois. Cette erreur „se démontre par la nécessité d'admettre des terrains de transition (qu'on eut mieux „fait de nommer dans le système hermaphrodites) idée insoutenable qui s'est conser- „vée depuis Werner jusqu'à nos jours. Précisément ces roches de transition, pro- „prement primitives, les granites et les schistes entrecoupées de calcaires, de serpen- „tine, de porphyre, de traumate et qui recèlent des types de végétaux et quelques „coquillages, auraient dû nous convaincre au premier coup-d'oeil que les bouleverse- „mens et par conséquent les formations qu'ils ont occasionnées, n'ont pas été simul- „tanés partout, mais qu'ils ont eu des époques très différentes en différens lieux, et „des degrés très variés d'énergie et de durée. Ils ont eu lieu de très bonne heure et „ont modifié le procès de la précipitation générale par accès et non par une influence „universelle. Ces mouvemens, imprimés à l'océan générateur et aux masses qu'il avait „déjà produites, ont détruit la régularité des couches horizontales de cet océan, et par „là même des suites des roches formées sous les auspices révolutionnaires très inéga- „lement selon les lieux, les tems et la hauteur du continent sous-marin déjà formé. „Ainsi, si nous retrouvons encore des traces de symétrie dans des groupes plus „ou moins éloignés les uns des autres, nous ne les devons qu'à des momens (des an- „nées ou des siècles) de répit, dont l'océan a joui dans ces contrées, tandis que dans „d'autres parages il était en état de bouleversement. Au reste, la Géognosie n'offre „peut-être pas deux seuls groupes de roches secondaires, même très voisins, où les

„deux suites soient complètement symétriques et l'on a dû introduire les *équivalens* „dans le système, qui s'expliquent dans le mien en admettant que ces lieux n'étaient „pas eux-mêmes dans ce moment le théâtre d'un bouleversement, mais se ressentaient „un peu de ceux qui avaient lieu dans des contrées éloignées.

„Mais tout en réclamant la liberté dont la nature a usé sans restriction, le Géo-„logiste doit se garder d'abandonner ses constructions au hasard et de former son „écorce du globe à perte de vue, sans loi ni mesure. Les lois naturelles sont des „ordres immuables que le Souverain du monde a proclamés, dont chaque oubli est „puni par une erreur. Pour les appliquer avec sagesse et sûreté, pour ne pas cou-„rir risque de forger des forces et des matériaux sans mesure, uniquement pour le „besoin du moment, le Géologiste doit se former en quelque sorte un étalon, une „unité générale à laquelle il rapporte et les masses et les forces qu'il emploie. Cet „étalon géologique est une certaine épaisseur de l'écorce du globe qu'il veut construire. „J'ai choisi par des raisons alléguées dans l'ouvrage une épaisseur de 6000 toises et „réglé sur cette donnée les masses et les forces à ma disposition; permis au reste à „tout autre Géologiste de changer cet étalon s'il croit devoir le faire. Ce n'est que „par là qu'un système géologique peut obtenir une physionomie prononcée, une in-„dividualité qui lui imprime le caractère de la vérité, ou du moins celui d'un haut de-„gré de vraisemblance.

„Mais cette physionomie individuelle n'est qu'imparfaite si le Géologiste s'en tient „aux formations générales, sans entrer dans certains détails marqués, que la nature „offre en si grande abondance. Ces détails ont, outre l'avantage d'étendre la sphère „des idées, et de donner plus de ressemblance au tableau géologique, celui de servir „de pierre de touche pour la vérité de système. La Géologie n'est et ne peut être „qu'une grande hypothèse; mais pour qu'elle soit frappée au coin du naturel, il faut „qu'elle explique les principaux détails caractéristiques, même ceux qu'on est tenté „d'affecter du surnom de singuliers ou bisarres. Plus le nombre des détails expli-„qués est grand, plus le système acquiert ce degré de vraisemblance dont l'esprit hu-„main est satisfait dans l'impossibilité où il se trouve d'arriver à l'évidence.

„Pour donner une idée de la tâche du Géologiste à l'état actuel de nos connais-„sances, j'ai disséqué le grand problème de la construction de l'écorce de notre globe „en plusieurs problèmes particuliers, dont l'aspect doit effrayer quiconque veut, à la „mode d'aujourd'hui, lire les hiéroglyphes de l'histoire de la terre sans employer les „chiffres que la nature a consignés dans la Physique, la Chimie et la Mécanique. „Au reste, l'on doit se garder de prendre cette dissection pour l'ordonnance du sys-„tème où l'on doit tout au contraire construire d'abord les grandes opérations, et trai-„ter ensuite les problèmes particuliers comme des corollaires des grandes constructions.

„Le Géologiste, s'il entend sa partie, ne doit pas *supposer* les révolutions qui ont „altéré et les roches déjà formées, et la marche du procès de la précipitation géné-„rale; il ne doit pas les regarder comme des postulats de Géométrie ainsi que l'a fait „Werner. Son devoir est de désigner leur cause génératrice, de les suivre dans leur „origine, leur accroissement et leur fin, et cela en puisant les matériaux dans la Géo-„gnosie et les principes dans la Physique.

„Enfin, le Géologiste doit saisir le problème entier à sa source, à laquelle per-„sonne ne paraît avoir songé avant moi. Tous les Géologistes sont aujourd'hui (1825) „d'accord sur le principe que nos continens et le fond des mers étaient primitivement „dissous dans un océan qui couvrait tout le noyau du globe et se sont formés par „voie de précipitation chimique. Mais aucun d'eux n'a recherché lesquelles des ma-„tières des roches se trouvaient en dissolution, et quels ont été les réagens qui les ont „précipités, ni où ces réagens se trouvaient. Et cependant c'est de l'action successive „des réagens, tranquilles ou troublés par les forces mécaniques, que dépend la succes-„sion des formations, la suite des différentes espèces de roches, inexplicable d'ailleurs. „Ce défaut primitif des systèmes géologiques a fait que le cahos est resté cahos.

SUR LES CONGRUENCES
DU SECOND DEGRÉ.

PAR

M. BOUNIAKOWSKY.

(Lu le 24 Novembre 1830.)

La considération des racines primitives des nombres premiers est d'un grand usage dans beaucoup de recherches sur la Théorie des nombres. La résolution algébrique des équations à deux termes, due à M. Gauss, en présente, sans aucun doute, l'une des applications les plus importantes. Plusieurs propositions sur les nombres, dont les démonstrations seraient assez compliquées, s'établissent très facilement par la considération des racines primitives. Nous nous proposons d'établir ici quelques unes de ces propositions parmi lesquelles le théorème exprimé par la congruence (16), ainsi que celui qui concerne les progressions arithmétiques, me paraissent nouveaux.

Le théorème de Wallis se démontre avec une simplicité qui ne laisse rien à désirer; en effet, puisque l'existence des racines primitives est démontrée pour tous les nombres premiers, supposons que ϱ soit une racine primitive par rapport au nombre premier p. On aura, en adoptant la notation de M. Gauss,

(1) $$\varrho^1\,\varrho^2\,\varrho^3\cdots\varrho^{p-1}\equiv 1\cdot2\cdot3\cdots(p-1)\ (\text{mod. } p.);$$

Or $$\varrho^1\,\varrho^2\,\varrho^3\cdots\varrho^{p-1}\equiv\varrho^{\frac{p(p-1)}{2}}$$

et comme en vertu d'une propriété connue des racines primitives l'on a

$$\varrho^{\frac{p-1}{2}}\equiv-1\ (\text{mod. } p.),$$

*

il s'ensuit que l'on aura

$$\varrho^{\frac{p(p-1)}{2}} \equiv -1 \cdots *)$$

Par conséquent la congruence (1) deviendra

$$-1 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \text{ (mod. } p.)$$

ou bien enfin

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) + 1 \equiv o \text{ (mod. } p.)\,,$$

congruence qui n'est autre chose que l'expression analytique du Théorème de WALLIS.

Les corollaires que l'on déduit de ce théorème, se démontrent avec la même facilité par le même moyen.

Proposons nous de démontrer actuellement le théorème suivant:

THÉORÈME. *Il sera toujours possible de décomposer le produit* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1)$ *en deux autres produits contenant chacun un nombre de facteurs* $\frac{p-1}{2}$ *pris dans la suite des nombres naturels* $1, 2, 3, \cdots (p-1)$, *tels que leur somme ou leur différence soit divisible par* p, *suivant que* p *sera de la forme* $4k-1$ *ou* $4k+1$.

1[er] Cas. $[p = 4k-1]$.

Soit ϱ comme précédemment la racine primitive du nombre premier p. Considérons les deux produits

$$\varrho^1 \varrho^2 \varrho^3 \cdots \varrho^{\frac{p-1}{2}} \text{ et } \varrho^{\frac{p-1}{2}+1} \cdot \varrho^{\frac{p-1}{2}+2} \cdots \varrho^{p-1}$$

et faisons

$$\varrho^1 \varrho^2 \varrho^3 \cdots \varrho^{\frac{p-1}{2}} \equiv P \text{ (mod. } p.) \text{ et } \varrho^{\frac{p-1}{2}+1} \cdot \varrho^{\frac{p-1}{2}+2} \cdots \varrho^{p-1} \equiv P' \text{ (mod. } p.)$$

de manière que

$$PP' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1).$$

Or, comme

$$\varrho^1 \varrho^2 \varrho^3 \cdots \varrho^{\frac{p-1}{2}} = \varrho^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{4}} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \equiv P$$

$$\varrho^{\frac{p-1}{2}+1} \varrho^{\frac{p-1}{2}+2} \cdots \varrho^{p-1} = \varrho^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{3p-1}{4}} \equiv (-1)^{\frac{3p-1}{4}} \equiv P'$$

---

*) Nous supprimerons quelquefois le module lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité a craindre.

il s'ensuit qu'on aura

$$P+P'\equiv(-1)^{\frac{p+1}{4}}+(-1)^{\frac{3p-1}{4}}$$

et puisque $p=4k-1$, il viendra

$$P+P'\equiv(-1)^{k}+(-1)^{3k-1}.$$

Le second membre de cette congruence étant égal à zéro quel que soit k, pair ou impair, on aura toujours

$$P+P'\equiv o\ (\text{mod. } p.),$$

congruence qui n'est autre chose que l'expression analytique du 1er cas du théorème que nous nous sommes proposé de démontrer.

2d Cas. $[p=4k+1]$.

L'on supposera

$$\varrho^{1}\cdot\varrho^{p-1}\cdot\varrho^{3}\cdot\varrho^{p-3}\cdots\equiv P\ (\text{mod. } p.)\ \text{et}\ \varrho^{2}\cdot\varrho^{p-2}\cdot\varrho^{4}\cdot\varrho^{p-4}\cdots\equiv P'\ (\text{mod. } p.)$$

ce qui donne

$$\varrho^{\frac{p(p-1)}{4}}\equiv P\ \text{et}\ \varrho^{\frac{p(p-1)}{4}}\equiv P'$$

et puisque $p=4k+1$, l'on aura

$$P-P'\equiv\varrho^{pk}-\varrho^{pk}=o\equiv o\ (\text{mod. } p.)$$

congruence qu'il s'agissait d'établir.

On démontrera d'une manière analogue différens théorèmes relatifs aux produits que l'on pourrait former avec les nombres de la suite naturelle 1, 2, 3,$\cdots(p-1)$, en les combinant deux à deux, trois à trois etc. Nous ne nous y arrêterons pas pour passer de suite à d'autres recherches; et d'abord nous commencerons par donner une démonstration, que nous croyons nouvelle, du théorème suivant:

Théorème. *Il sera toujours possible d'assigner aux indéterminées x et y dans l'expression Ax^2+By^2-C des valeurs telles, que cette quantité soit divisible par un nombre premier p quelconque. On suppose que les nombres A, B et C sont des entiers quelconques, positifs ou négatifs mais premiers à p.*

J'observe en premier lieu, que l'on peut supposer A et B positifs et C négatif; car si cela n'avait pas lieu, l'addition ou la soustraction d'un multiple de p, ferait

prendre aux quantités A, B et C le signe qu'on veut leur donner. Il est de même évident qu'il est permis de supposer $A < p$, $B < p$ et $C < p$.

Cela posé, soit ϱ une racine primitive par rapport au nombre premier p, et supposons que l'on ait

(2) $\varrho^a \equiv A$ (mod. p.); $\varrho^b \equiv B$ (mod. p.); $\varrho^c \equiv C$ (mod. p.);

les exposans a, b et c seront des quantités entièrement déterminées. Revenons à l'expression

$$Ax^2 + By^2 - C,$$

et cherchons d'abord les conditions auxquelles A, B et C doivent satisfaire, pour que l'une des indéterminées x ou y soit divisible par p. Si l'on suppose que ce soit l'indéterminée x, l'on devra pouvoir satisfaire à la congruence

$$By^2 - C \equiv 0 \text{ (mod. } p.).$$

Or, en posant

$$\varrho^\mu \equiv y \text{ (mod. } p.)$$

μ étant un exposant qu'il s'agit de déterminer, l'on aura, en vertu des deux dernières congruences (2)

$$\varrho^b \cdot \varrho^{2\mu} - \varrho^c \equiv 0$$

ou bien

$$\varrho^{2\mu + b - c} - 1 \equiv 0;$$

or, par la propriété des racins primitives, cette congruence ne pourra avoir lieu, à moins que l'on a ait

$$2\mu + b - c = 0 \text{ ou à } p - 1 \text{ ou à } 2(p - 1),$$

équations qui montrent que b et c doivent être deux nombres de la même espèce, c'est-à-dire ou tous les deux pairs, ou bien tous les deux impairs. Ainsi, toutes les fois que cette condition sera remplie, la congruence

(3) $$Ax^2 + By^2 - C \equiv 0 \text{ (mod. } p.)$$

sera satisfaite en faisant x égal a un multiple de p et $y \equiv \varrho^\mu$, μ étant déterminé par les formules

$$\mu = \frac{c-b}{2} \text{ ou bien } \mu = \frac{p-1}{2} + \frac{c-b}{2} \text{ ou bien } \mu = p - 1 - \frac{b-c}{2}.$$

Cherchons maintenant les conditions nécessaires pour que $Ax^2 - C$ soit divisible par p; si cette expression est en effet congrue à zéro suivant le module p pour une certaine valeur déterminée de x, on satisfera à la congruance (3) en supposant que y est égal à un multiple quelconque de p.

Si l'on suppose

$$\varrho^\lambda \equiv x \text{ (mod. } p.)$$

il viendra

$$\varrho^a \varrho^{2\lambda} - \varrho^c \equiv o$$

ou bien

$$\varrho^{2\lambda + a - c} - 1 \equiv o,$$

congruence, qui sera satisfaite si l'on a

$$2\lambda + a - c = o \text{ ou à } p - 1 \text{ ou à } 2(p - 1)$$

Or, ceci fait voir qu'il faudra nécessairement, pour que la congruence $Ax^2 - C \equiv o$ ait lieu, que a et c soient de la même espèce, c'est-à-dire ou tous les deux pairs, ou tous les deux impairs, autrement elle est impossible. Si cette condition est remplie, x sera déterminé par la congruence

$$\varrho^\lambda \equiv x \text{ (mod. } p.)$$

et l'on aura pour déterminer λ la formule

$$\lambda = \frac{c - a}{2},$$

ou bien la suivante

$$\lambda = \frac{p-1}{2} + \frac{c-a}{2},$$

ou bien encore

$$\lambda = p - 1 - \frac{a - c}{2}.$$

Il ne restera donc plus qu'à examiner le cas dans lequel b et c ne seront pas de la même espèce, aussi bien que a et c. Or ceci ne pourra avoir lieu qu'autant que a et b seront de la même espèce et qu'en même tems c sera d'espèce différente.

Supposons donc d'abord:

$$a = 2l + 1;\ b = 2m + 1;\ c = 2n.$$

et faisons

$$\varrho^\lambda \equiv x;\ \varrho^\mu \equiv y;$$

la congruence (3) deviendra après l'avoir divisé par ϱ^{2n}

$$\varrho^{2(\lambda+l-n)+1}+\varrho^{2(\mu+m-n)+1}-1\equiv o \text{ (mod. } p.).$$

ce qui montre que les deux exposans de ϱ seront impairs.

Si l'on suppose

$$a=2l;\quad b=2m;\quad c=2n+1;$$

l'on aura

$$\varrho^{2(\lambda+l-n)-1}+\varrho^{2(\mu+m-n)-1}-1\equiv o \text{ (mod. } p.)$$

congruence qui nous conduit à la même conséquence que la précédente. Ainsi, pour établir le théorème que nous nous sommes proposé de démontrer, il suffira de faire voir qu'il existe nécessairement deux nombres impairs M et N tels que la congruence

(4) $$\varrho^{M}+\varrho^{N}-1\equiv o \text{ (mod. } p.)$$

est satisfaite. Nous venons de supposer, pour abréger,

(5) $$\begin{cases} M=2(\lambda+l-n)\pm 1 \\ N=2(\mu+m-n)\pm 1. \end{cases}$$

Pour démontrer cette proposition, faisons

$$\varrho^{M}\equiv R \text{ (mod. } p.) \quad \text{et} \quad \varrho^{N}\equiv R' \text{ (mod. } p.)$$

R et R' étant l'un et l'autre plus petits que p. Il faudra donc en vertu de cette condition que

$$R+R'-1=p.$$

Pour satisfaire à cette équation, l'on pourra faire les $\frac{p-1}{2}$ suppositions suivantes:

$$\begin{aligned} R&=2; & R'&=p-1 \\ &=3; & &=p-2 \\ &=4; & &=p-3 \\ &\dots\dots & &\dots\dots \\ &=\frac{p-1}{2}; & &=\frac{p-1}{2}. \end{aligned}$$

On voit par là qu'il y aura $\frac{p-1}{2}$ valeurs de M et N propres à satisfaire à la congruence (4); mais ces valeurs ne seront pas généralement toutes les deux

impaires. Il faut donc faire voir qu'il y aura au moins deux valeurs correspondantes de M et de N qui seront toutes les deux impaires. Pour cela il n'y a qu'à observer que ni M ni N ne peut être égal à $p - 1$, puisqu'autrement l'on obtiendrait l'une des deux congruences impossibles

$$\varrho^M \equiv o \text{ ou } \varrho^N \equiv o.$$

Donc M et N ne peuvent être que des nombres de la suite $1, 2, 3, \cdots (p-2)$. Or cette suite contient un nombre impair de plus que de nombres pairs, ce qui fait qu'en prenant même le cas le plus défavorable pour la démonstration, c'est-à-dire celui où l'on supposerait qu'à des nombres impairs de cette suite correspondent des nombres pairs, on arrivera nécessairement, quand ceux-ci seront épuisés, à un nombre impair dont le correspondant sera ce même nombre, et par conséquent sera impair.

Donc il existe toujours deux nombres impairs M et N tels, que la congruence

$$\varrho^M + \varrho^N - 1 \equiv o \text{ (mod. } p.)$$

est satisfaite. Après avoir trouvé ces nombres M et N, l'on aura par les équations (5),

$$(6) \quad \begin{cases} \lambda = \frac{M \mp 1}{2} + n - l \\ \mu = \frac{N \mp 1}{2} + n - m \end{cases}$$

et comme rien n'empêche de supposer

$$M = 2(\mu + m - n) \pm 1$$
$$N = 2(\lambda + l - n) \pm 1,$$

l'on aura aussi

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda = \frac{N \mp 1}{2} + n - l \\ \mu = \frac{M \mp 1}{2} + n - m \end{cases}$$

ce qui montre que la congruence

$$Ax^2 + By^2 - C \equiv o \text{ (mod. } p.)$$

admettra généralement au moins deux solutions différentes. Le contraire pourrait avoir lieu dans le cas de $M=N$, ou de $A=B$. Remarquons qu'il n'est question ici que des valeurs de x et y inférieures à p.

En supposant dans la dernière congruence $A=1$, l'on obtiendra la suivante

$$x^2+By^2-C\equiv o \text{ (mod. } p.\text{)},$$

démontrée pour la première fois par LAGRANGE.

En supposant $A=B=1$ et $C=-1$, l'on aura le théorème

$$x^2+y^2+1\equiv o \text{ (mod. } p.\text{)}$$

démontré par EULER, (*Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, tom. V. pag.* 49). Ce théorème, comme on le sait, sert à établir la proposition relative à la décomposition d'un nombre entier quelconque en quatre carrés.

Rémarquons au reste que du théorème exprimé par la congruence

$$x^2+By^2-C\equiv o \text{ (mod. } p.\text{)}$$

on peut facilement déduire la proposition plus générale que nous venons de démontrer. En effet, la congruence

$$A'x^2+B'y^2-C'\equiv o \text{ (mod. } p.\text{)},$$

pouvant être mise sous la forme

$$A'x^2+(B'+pk)\,y^2-(C'+pk')\equiv o \text{ (mod. } p.\text{)},$$

on pourra déterminer k et k' de manière à ce que $B'+pk$ et $C'+pk'$ soient divisibles par A'; en supposant donc

$$B'+pk=A'\cdot B \text{ et } C'+pk'=A'\cdot C$$

la dernière congruence deviendra

$$A'x^2+A'\cdot By^2-A'\cdot C\equiv o \text{ (mod. } p.\text{)}$$

ou bien, en supprimant le facteur commun A', premier à p, l'on aura

$$x^2+By^2-C\equiv o \text{ (mod. } p.\text{)}$$

congruence qui est précisément celle de laquelle nous sommes partis tout à l'heure.

EXEMPLE. *Trouver les solutions de la congruence*

$$6x^2+7y^2-5\equiv \text{ (mod. } 11.\text{)}.$$

On aura $p=11$, $\varrho=2$, et $A=6$, $B=7$, $C=5$. De plus $2^1\equiv 2$, $2^2\equiv 4$, $2^3\equiv 8$, $2^4\equiv 5$, $2^5\equiv 10$, $2^6\equiv 9$, $2^7\equiv 7$, $2^8\equiv 3$, $2^9\equiv 6$, $2^{10}\equiv 1$.

Donc

$$a=9,\quad b=7,\quad c=4;$$

et par conséquent

$$l=4,\quad m=3,\quad n=2.$$

Les nombres M et N impairs qui satisfont à la congruence

$$2^M+2^N-1\equiv o \text{ (mod. 11.)}$$

sont, comme il est facile de le voir:

$$M=5,\quad N=1;$$
$$M=9,\quad N=9.$$

On aura donc, en vertu des formules (6)

$$\lambda=o,\quad \mu=-1 \text{ c'est-à-dire } \mu=9;$$
$$\lambda=2,\quad \mu=3,$$

et en vertu des formules (7)

$$\lambda=-2, \text{ c'est-à-dire } \lambda=8,\quad \mu=1.$$

On obtiendra donc de cette manière trois solutions différentes de la congruence proposée, savoir:

$$1^\circ \cdots\cdots 2^0\equiv x=1,\quad 2^9\equiv y=6;$$
$$2^\circ \cdots\cdots 2^2\equiv x=4,\quad 2^7\equiv y=8;$$
$$3^\circ \cdots\cdots 3^8\equiv x=3,\quad 2^1\equiv y=2.$$

Je vais actuellement établir le théorème suivant, qui comprend comme cas particulier celui qui vient d'être démontré.

THÉORÈME. *Il sera toujours possible de satisfaire à la congruence* $Ax^2+By^2-C\equiv o$ (mod. N), *N étant un entier impair quelconque, et les quantités* A, B, C *désignant des entiers premiers à N.*

Note. Le nombre N pourrait être double d'un impair que le théorème aurait encore lieu; mais en supposant N divisible par une puissance de 2 supérieure à la première, le théorème ne serait plus généralement vrai.

*

Pour démontrer ce théorème, nous démontrerons d'abord que la congruence

(8) $$Au^2 + Bv^2 - C \equiv o \text{ (mod. } p^n.)$$

est toujours possible. Dans cette dernière congruence, p désigne un nombre premier, et n un entier positif quelconque. Je commence par le cas de $n = 2$, et en représentant par α et β des nombres entiers tels que l'on ait

$$A\alpha^2 + B\beta^2 - C \equiv o \text{ (mod. } p.)$$

je fais

(9) $$\begin{cases} u = \alpha + pk \\ v = -\beta + pk', \end{cases}$$

k et k' désignant des entiers qu'il s'agit de déterminer; on aura donc

$$A(\alpha + pk)^2 + B(-\beta + pk')^2 - C \equiv o \text{ (mod. } p^2.)$$

ou bien

$$A\alpha^2 + B\beta^2 - C + 2p(A\alpha k - B\beta k') \equiv o \text{ (mod. } p^2.).$$

De plus, en observant que le second membre de cette congruence peut être remplacé par p^2E (E désignant un entier), et en faisant

$$A\alpha^2 + B\beta^2 - C = pe,$$

nous aurons l'équation

(10) $$A\alpha k - B\beta k' = \frac{pE - e}{2}.$$

Or, comme E est entièrement arbitraire, on pourra en disposer de manière que $pE - e$ soit divisible et par 2 et par le plus grand commun diviseur de $A\alpha$ et $B\beta$, après quoi l'équation (10) se présentera sous la forme d'équation indéterminée du premier degré, dont les deux indéterminées seront k et k'; après les avoir déterminées, la solution de la congruence

$$Au^2 + Bv^2 - C \equiv o \text{ (mod. } p^2.)$$

sera donnée par les formules (9), dans lesquelles α et β auront en général plusieurs valeurs distinctes.

Pour donner une application de cette solution, proposons nous de résoudre la congruence suivante:

$$6u^2 + 7v^2 - 5 \equiv o \text{ (mod. } 11^2) \equiv o \text{ (mod. } 121).$$

On aura d'abord, comme on l'a vu plus haut, trois solutions différentes de la congruence

$$6\alpha^2 + 6\beta^2 - 5 \equiv o \text{ (mod. 11)};$$

ces solutions seront

$$1^\circ \cdots\cdots \alpha = 1,\ \beta = 6;$$
$$2^\circ \cdots\cdots \alpha = 4,\ \beta = 8;$$
$$3^\circ \cdots\cdots \alpha = 3,\ \beta = 2.$$

En prenant 1°.

$$(11) \qquad \begin{cases} u = \quad 1 + 11\,k \\ v = -6 + 11\,k', \end{cases}$$

l'équation (10) se réduira à

$$k - 7\,k' = \frac{11\,E - 23}{2 \cdot 6}$$

et l'on pourra prendre $E = 1$, ce qui donnera

$$k - 7k' = -1.$$

Les solutions de cette dernière équation sont comprises dans les formules

$$k = 6 + 7\,z$$
$$k' = 1 + \ z,$$

z désignant un entier quelconque. Faisant par exemple $z = 0$, on aura $k = 6$, $k = 1$, et l'on obtiendra par les formules (11)

$$u = 67, \quad v = 5.$$

Faisant $z = 1$, on obtiendra, en prenant pour la valeur de u *le résidu minimum* de $1 + 11 \cdot 13$ suivant le module 121,

$$u = 23, \quad v = 16. \text{ etc. etc.}$$

En prenant 2°.

$$u = \quad 4 + 11\,k$$
$$v = -8 + 11\,k'$$

l'équation (10) se réduira à

$$3\,k - 7\,k' = \frac{11\,E - 49}{16}$$

qui pour $E = 3$, donne

$$3k - 7k' = -1$$

équation, dont les solutions sont renfermées dans les formules

$$k = 2 + 7z$$
$$k' = 1 + 3z.$$

Il résulte de là que les valeurs de u et v seront

$$u = \quad 4 + 11\,(2+7z) = 26 + 77z$$
$$v = -8 + 11\,(1+3z) = \ 3 + 33z;$$

posant $z = 0$, on aura

$$u = 26, \qquad v = 3;$$

faisant $z = 1$, on aura

$$u = 103, \qquad v = 36. \text{ etc. etc.}$$

Enfin si l'on suppose

$$u = \quad 3 + 11k$$
$$v = -2 + 11k'$$

l'on obtiendra l'équation

$$9k - 7k' = \frac{11E-7}{4},$$

et en prenant $E = 1$, il viendra

$$9k - 7k' = 1$$

dont les solutions complètes sont

$$k = 4 + 7z$$
$$k' = 5 + 9z.$$

Donc l'on aura

$$u = 47 + 77z$$
$$v = 53 + 99z$$

en posant $z = 0$, nous aurons

$$u = 47, \qquad v = 53.$$

En faisant $z = 1$, l'on aura (en prenant pour les valeurs de u et de v les *résidus minimums*)

$$u = 3, \qquad v = 31; \text{ etc. etc.}$$

Pour résoudre la congruence

(12) $$Au^2 + Bv^2 - C \equiv 0 \text{ (mod. } p^3.)$$

nous supposerons que l'on ait déterminé les valeurs de α et β qui satisfont à la congruence

$$A\alpha^2 + B\beta^2 - C \equiv o \text{ (mod. } p^2.)$$

et nous ferons ensuite

$$u = \alpha + p^2 k$$
$$v = -\beta + p^2 k'$$

ce qui réduira la congruence (12) à

$$A\,(\alpha + p^2 k)^2 + B\,(p^2 k' - \beta)^2 - C \equiv 0 \text{ (mod. } p^3.)$$

qui peut être remplacée par l'équation

$$A\alpha^2 + B\beta^2 - C + 2p^2\,(A\alpha k - B\beta k') = p^3 E$$

de laquelle on tirera, en supposant $A\alpha^2 + B\beta^2 - C = p^2 e$

$$A\alpha k - B\beta k' = \frac{Ep - e}{2}.$$

Or, cette dernière équation étant la même que l'équation (3), il s'ensuit que l'on pourra y satisfaire par des valeurs entières de k et k'. Donc la congruence (12) est toujours possible.

Il est facile de voir que le même mode de démonstration servira à établir la possibilité de la congruence (8) quel que soit l'exposant entier n. Supposons actuellement que l'on ait $N = p^n p'^{n'}$, p et p' désignant deux nombres premiers différens et n et n' deux entiers quelconques, et proposons-nous d'établir que la congruence

(13) $$Au^2 + Bv^2 - C \equiv o \text{ (mod. } p^n p'^{n'}.)$$

est toujours possible. Pour cela supposons que l'on ait résolu séparément les deux congruences

$$A\alpha^2 + B\beta^2 - C \equiv o \text{ (mod. } p^n)$$
$$A\alpha'^2 + B\beta'^2 - C \equiv o \text{ (mod. } p'^{n'}.)$$

Il est évident que l'on pourra remplacer dans la première congruence

$$\alpha \text{ par } \alpha + p^n k \text{ et } \beta \text{ par } \beta + p^n k'$$

de même dans la seconde

$$\alpha' \text{ par } \alpha' + p'^{n'}k_1 \text{ et } \beta' \text{ par } \beta' + p'^{n'}k'_1.$$

Si de plus, l'on peut trouver des valeurs entières de k, k', k_1, k'_1 qui satisfassent aux deux équations

$$(14) \qquad \alpha + p^n k = \alpha' + p'^{n'}k_1 \text{ et } \beta + p^n k' = \beta' + p'^{n'}k'_1.$$

il est évident que la congruence (13) sera satisfaite en posant

$$(15) \qquad \begin{cases} u = \alpha + p^n k = \alpha' + p'^{n'}k_1 \\ v = \beta + p^n k' = \beta' + p'^{n'}k'_1. \end{cases}$$

Or, les équations (14) étant toujours possibles, puisqu'elles peuvent être mises sous la forme

$$p^n k - p'^{n'}k_1 = \alpha' - \alpha \text{ et } p^n k' - p'^{n'}k'_1 = \beta' - \beta$$

il s'ensuit que la congruence (14) est également possible.

Si l'on suppose $N = p^n \cdot p'^{n'} \cdot p''^{n''}$, alors l'on cherchera d'abord les valeurs de α, β, α', β' qui satisfont aux deux congruences

$$A\alpha^2 + B\beta^2 - C \equiv 0 \ (\text{mod. } p^n \cdot p'^{n'}) .$$
$$A\alpha'^2 + B\beta'^2 - C \equiv 0 \ (\text{mod. } p''^{n''})$$

et l'on posera

$$\alpha + p^n p'^{n'} k = \alpha + p''^{n''}k_1$$
$$\beta + p^n p'^{n'} k' = \beta' + p''^{n''}k'_1$$

et puisque ces deux équations sont toujours possibles, il s'ensuit que l'on pourra toujours satisfaire à la congruence

$$Au^2 + Bv^2 - C \equiv 0 \ (\text{mod. } p^n \cdot p'^{n'} \cdot p''^{n''}) ,$$

et nommément en posant

$$u = \alpha + p^n p'^{n'} k = \alpha' + p''^{n''}k_1$$
$$v = \beta + p^n p'^{n'} k' = \beta' + p''^{n''}k'_1.$$

En continuant de la sorte, nous arriverons à la conclusion générale que la congruence

$$(16) \qquad Ax^2 + By^2 - C \equiv 0 \ (\text{mod. } N.)$$

est toujours possible. Il faut cependant excepter quelques cas pour les quels N

serait divisible par une puissance de 2 supérieure à la première, ce dont il est très facile au reste de s'assurer directement.

En faisant dans la congruence (16) $A = B = 1$ et $C = -1$, l'on aura la congruence particulière

$$x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{N}$$

qui montre *que l'on pourra toujours trouver deux nombres x et y tels, que la somme de leurs carrés augmentée de l'unité, soit divisible par un entier quelconque N, avec la seule restriction que ce nombre N ne soit pas divisible par 4, puisqu'il est connu que la somme $x^2 + y^2 + 1$ ne peut jamais être de la forme $4K$.*

Appliquons présentement ces considérations à la congruence

$$9u^2 + 11v^2 - 13 \equiv 0 \pmod{245},$$

dans laquelle on a $N = 245 = 5 \cdot 7^2$, et par conséquent $p = 5$, $n = 1$; $p' = 7$, $n' = 2$; on sait d'ailleurs que la racine primitive de 5 est 2, et celle de 7 est 3.

Il faudra d'abord, d'après ce qui a été dit plus haut, trouver les solutions des deux congruences

$$9\alpha^2 + 11\beta^2 - 13 \equiv 0 \pmod{5.}$$
$$9\alpha'^2 + 11\beta'^2 - 13 \equiv 0 \pmod{7^2}.$$

Or, l'on obtient par la méthode que nous venons d'exposer

$$\alpha = 4, \quad \beta = 3; \text{ etc.}$$

et

$$\alpha' = 4, \quad \beta' = 12; \text{ etc.}$$

Par conséquent l'on aura en vertu des équations (14)

$$4 + 5k = 4 + 49 \cdot k_1 \text{ et } 3 + 5k' = 12 + 49k'_1,$$

auxquelles on satisfait en prenant

$$k = 0, \quad k_1 = 0; \quad k' = -8, \quad k'_1 = -1;$$

ce qui donnera, en vertu des formules (15),

$$u = 4, \quad v = 37,$$

valeurs qu'il est aisé de vérifier. Remarquons au reste, qu'on aurait pu trouver par la même méthode d'autres solutions de la même congruence.

Prenons pour dernier exemple la congruence

$$x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{133.},$$

dans laquelle on a $N = 133 = 7 \cdot 19$. La racine primitive de 7, est, comme nous venons de le voir, égale à 3; celle de 19 est 2. Il faudra d'abord résoudre les congruences particulières

$$\alpha^2 + \beta^2 + 1 \equiv 0 \pmod{7.}$$
$$\alpha'^2 + \beta'^2 + 1 \equiv 0 \pmod{19.}.$$

Or, en faisant usage de la méthode que nous venons d'exposer, on trouvera

$$\alpha = 2, \quad \beta = 4;$$
$$\alpha' = 7, \quad \beta' = 11.$$

Les équations (15) se réduiront donc à

$$x = 2 + 7k = 7 + 19k'$$
$$y = 4 + 7k_1 = 11 + 19k'_1:$$

de plus, on trouvera

$$k = 17, \quad k' = 6; \quad k_1 = 20, \quad k'_1 = 7,$$

ce qui réduira les valeurs de x et de y à

$$x = 2 + 7 \cdot 17 = 121$$
$$y = 4 + 7 \cdot 20 = 144,$$

ou bien, en prenant au lieu de x la différence $133 - x$, et au lieu de y la différence $y - 133$, on obtiendra

$$x = 12, \quad y = 11,$$

valeurs qui satisfont en effet à la congruence

$$x^2 + y^2 + 1 \equiv o \pmod{133.}.$$

Il est inutile d'observer qu'on pourrait encore trouver d'autres solutions de la même congruence.

Proposons nous encore de démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit p un nombre premier quelconque. Supposons de plus que l'on ait deux progressions arithmétiques tout-à-fait arbitraires, avec la seule restriction, que la raison de chacune d'elles soit un nombre premier à p. Représentons par* E *un*

entier donné à volonté. Cela posé, je dis que l'on pourra toujours trouver un certain nombre de termes de la première progression de manière que leur somme, plus la somme d'un certain nombre de termes de la seconde progression, plus enfin l'entier E, *soit divisible par* p.

Démonstration. Représentons par α le premier terme de la première progression et par A sa raison. Soient aussi β le premier terme de la seconde progression et B sa raison. En supposant de plus la somme des n premiers termes de la première progression représentée par s, et celle des n' premiers termes de la seconde par s', on aura

$$s = \frac{[2\alpha + (n-1)A]\,n}{2}$$
$$s' = \frac{[2\beta + (n'-1)B]\,n'}{2},$$

par conséquent il faudra démontrer que la congruence

$$(17) \qquad \frac{[2\alpha + (n-1)A]\,n}{2} + \frac{[2\beta + (n'-1)B]\,n'}{2} + E \equiv o \ (\text{mod. } p.)$$

ou, ce qui revient au même, la suivante:

$$An^2 + (2\alpha - A)\,n + Bn'^2 + (2\beta - B)\,n' + 2E \equiv o \ (\text{mod. } p.)$$

est toujours résoluble, avec la restriction que ni A ni B ne soient divisibles par p.

La dernière congruence peut évidemment être mise sous la forme

$$An^2 + (2\alpha - A + pz)\,n + Bn'^2 + (2\beta - B + pz')\,n' + 2E \equiv o \ (\text{mod. } p.)$$

z et z' désignant des entiers quelconques. On peut aussi lui donner la forme suivante:

$$A\left(n + \frac{2\alpha - A + pz}{2A}\right)^2 + B\left(n' + \frac{2\beta - B + pz'}{2B}\right)^2 + 2E - A\left(\frac{2\alpha - A + pz}{2A}\right)^2 - B\left(\frac{2\beta - B + pz'}{2B}\right)^2 \equiv o \ (\text{mod. } p.)$$

et puisque z et z' sont arbitraires, on en pourra disposer de manière que $\frac{2\alpha - A + pz}{2A}$ et $\frac{2\beta - B + pz'}{2B}$ soient des entiers; en faisant pour abréger

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} n + \frac{2\alpha - A + pz}{2A} &= x \\ n' + \frac{2\beta - B + pz'}{2B} &= y \\ 2E - A\left(\frac{2\alpha - A + pz}{2A}\right)^2 - B\left(\frac{2\beta - B + pz'}{2B}\right)^2 &= C \end{aligned} \right.$$

*

la dernière congruence se réduira à

$$(19) \qquad Ax^2 + By^2 + C \equiv o \pmod{p.}$$

qui est toujours possible, comme nous l'avons démontré plus haut. Concluons de là, que la congruence (17) est également toujours possible, ce qu'il s'agissait précisément de démontrer.

Il est évident d'ailleurs que n et n' seront déterminés par les formules

$$(20) \qquad \begin{cases} n = x - \dfrac{2\alpha - A + pz}{2A} \\ n' = y - \dfrac{2\beta - B + pz'}{2B}. \end{cases}$$

Appliquons ces considérations aux deux progressions:

3, 10, 17, ...
6, 11, 16, ...

On aura $\alpha = 3$, $A = 7$; $\beta = 6$, $B = 5$. Supposons de plus $p = 19$ et $E = 10$. Il faudra d'abord trouver des valeurs de z et z' telles que les deux quantités

$$\frac{6 - 7 + 19\,z}{14} \quad \text{et} \quad \frac{12 - 5 + 19\,z'}{10}$$

soient entières. On trouvera $z = 3$, $z' = 7$, ce qui donnera: $\frac{6 - 7 + 19z}{14} = 4$ et $\frac{12 - 5 + 19z'}{10} = 14$. La congruence (19) se réduira donc a

$$7x^2 + 5y^2 - 1072 \equiv o \pmod{19.}$$

ou bien, en supprimant dans 1072 les multiples de 19

$$7x^2 + 5y^2 - 8 \equiv o \pmod{19.}.$$

Cette congruence, résolue par les méthodes exposées plus haut, donne entr'autres solutions: $x = 5$, $y = 4$; par conséquent, on aura en vertu des formules (20)

$$n = 5 - 4 = 1; \quad n' = 4 - 14 = -10 \equiv 9 \pmod{19.}.$$

Donc il faudra 1 terme de la première progression et 9 de la seconde, pour que la somme $s + s' + 10$ soit divisible par 19. En effet, on trouve $s = 3$, $s' = 234$, ce qui donne $s + s' + 10 = 19 \cdot 13$.

On satisfait aussi à la congruence $7x^2 + 5y^2 - 8 \equiv o \pmod{19.}$, en prenant $x = 1$, $y = 2$, ce qui donne

$$n = 1 - 4 \equiv 16 \text{ (mod. 19.) et } n' = 2 - 14 \equiv 7 \text{ (mod. 19.)}.$$

Donc on peut prendre $n = 16$, $n' = 7$; en effet, on trouvera $s = 888$, $s' = 147$, et $s + s' + 10 = 1045 = 19 \cdot 55$.

Nous terminerons en observant, que la proposition que nous venons de démontrer à l'égard de deux progressions arithmétiques, peut être généralisée en vertu du théorème exprimé par la congruence (16). En effet, si l'on représente par N un entier soumis aux mêmes restrictions que plus haut, et par A' et B' deux entiers premiers à N, on pourra toujours satisfaire à la congruence

$$A's + B's' + E \equiv o \text{ (mod. } N.)$$

si l'on suppose A et B, qui représentent les raisons des deux progressions arithmétiques, premiers à N, comme auparavant.

NOTE

SUR LA

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME D'ANALYSE;

PAR

M. COLLINS.

(Lu le 12 Janvier 1831.)

La démonstration que j'ai donnée dans mes „Recherches sur la transformation des fonctions" (pag. 181 de ce Vol.) du théorème :

$$\psi(\varphi x) = S\left[\frac{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}})!}{\overset{1}{\mathfrak{a}}!\cdots\cdots\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}!}\left(\frac{\varphi'o}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{a}}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\beta}o}{\mathfrak{b}!}\right)^{\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}}\frac{\psi^{\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots+\overset{\beta}{\mathfrak{a}}}(\varphi o)}{(\overset{1}{\mathfrak{a}}+\cdots\cdots+\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}})!}\,x^{\mathfrak{b}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{a}}+2\overset{2}{\mathfrak{a}}+\cdots+\mathfrak{b}\overset{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}=\mathfrak{b}$$

pourrait paraître à beaucoup de monde manquer, si non d'évidence, au-moins de simplicité et d'élégance. Il s'y est d'ailleurs glissé une faute de copiste, que je m'empresse de rectifier ici. P. 187, ligne 4 d'en haut, les expressions: $n < p$ et $n = p$ doivent respectivement être remplacées par celles-ci: $n > o$, $n = o$ *).

Le théorème en question étant, à ce que je crois, bien digne d'être solidement établi, j'en ai cherché une autre démonstration. J'en ai trouvé une qui me paraît de beaucoup préférable à la première et que voici:

On a, en vertu du théorème de MACLAURIN :

$$\psi x = S\left[\frac{\psi^{\mathfrak{a}}o}{\mathfrak{a}!}\,x^{\mathfrak{a}}\right]$$

donc aussi:

$$\text{(a)}\qquad \psi(\varphi x) = S\left[\frac{\psi^{\mathfrak{a}}o}{\mathfrak{a}!}\,(\varphi x)^{\mathfrak{a}}\right]$$

---

*) Une faute moins grave se trouve encore sur la même page, ligne 3 d'en bas, où le second terme de l'expression en parenthèses doit encore être multiplié par $(n+1)!$.

d'où l'on tire:

$$\psi(\varphi o) = S\left[\frac{\psi^{\alpha_o}}{\mathfrak{a}!}(\varphi o)^{\mathfrak{a}}\right]$$

ou bien:

$$\text{(b)} \qquad \frac{\psi^{\mu}(\varphi o)}{m!} = S\left[\frac{\psi^{\mu+\alpha_o}}{m!} \times \frac{(\varphi o)^{\mathfrak{a}}}{\mathfrak{a}!}\right].$$

Mais comme:

$$\varphi x = S\left[\frac{\varphi^{\alpha_o}}{\mathfrak{a}!} x^{\mathfrak{a}}\right]$$

on a par le théorème du polynome:

$$(\varphi x)^{\mathfrak{a}} = S\left[\frac{n!}{\mathfrak{b}!\,\overset{1}{\mathfrak{b}}!\,\overset{2}{\mathfrak{b}}!\cdots\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}}!}(\varphi o)^{\mathfrak{b}}\left(\frac{\varphi' o}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\delta} o}{\mathfrak{d}!}\right)^{\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}}} x^{\mathfrak{d}}\right]$$

$$\mathfrak{b} + \overset{1}{\mathfrak{b}} + \overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots + \overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}} = n$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + 2\overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots + \mathfrak{d}\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{d}$$

valeur qui, substituée dans l'équation (a), donne:

$$\psi(\varphi x) = S\left[\frac{\psi^{\alpha_o}}{\mathfrak{a}!} \times \frac{\mathfrak{a}!}{\mathfrak{b}!\,\overset{1}{\mathfrak{b}}!\cdots\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}}!}(\varphi o)^{\mathfrak{b}}\left(\frac{\varphi' o}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\delta} o}{\mathfrak{d}!}\right)^{\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}}} x^{\mathfrak{d}}\right] =$$

$$\mathfrak{b} + \overset{1}{\mathfrak{b}} + \overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots + \overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + 2\overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots + \mathfrak{d}\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{d}$$

$$S\left[\frac{\psi^{\beta+\overset{1}{\beta}+\cdots+\overset{\mathfrak{d}}{\beta}_o}}{\overset{1}{\mathfrak{b}}!\cdots\cdots\cdots\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}}!} \times \frac{(\varphi o)^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!} \times \left(\frac{\varphi' o}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\delta} o}{\mathfrak{d}!}\right)^{\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}}} x^{\mathfrak{d}}\right] =$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + 2\overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots + \mathfrak{d}\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{d}$$

$$S\left[\frac{(\overset{1}{\mathfrak{b}}+\cdots+\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}})!}{\overset{1}{\mathfrak{b}}!\cdots\cdots\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}}!} \times \frac{\psi^{(\overset{1}{\beta}+\cdots+\overset{\mathfrak{d}}{\beta})+\beta_o}}{(\overset{1}{\mathfrak{b}}+\cdots\cdots+\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}})!} \times \frac{(\varphi o)^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!} \times \left(\frac{\varphi' o}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\cdots\left(\frac{\varphi^{\delta} o}{\mathfrak{d}!}\right)^{\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}}} x^{\mathfrak{d}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}} + 2\overset{2}{\mathfrak{b}} + \cdots + \mathfrak{d}\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{d}.$$

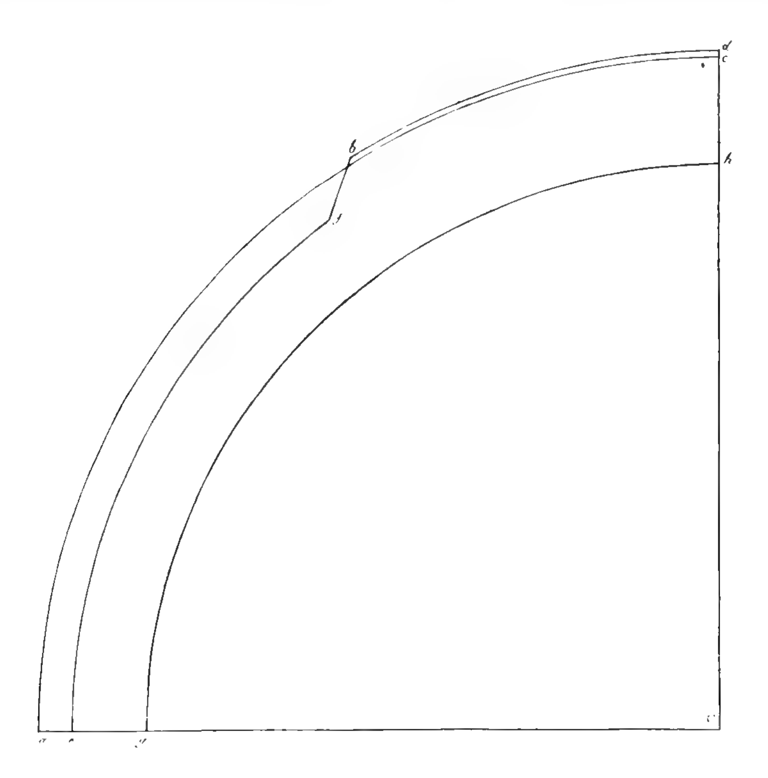
Donc, puisque par l'équation (b):

$$S\left[\frac{\psi^{(\overset{1}{\beta}+\cdots+\overset{\mathfrak{d}}{\beta})+\beta_o}}{(\overset{1}{\mathfrak{b}}+\cdots\cdots+\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}})!}\times\frac{(\varphi o)^{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}!}\right]=\frac{\psi^{\overset{1}{\beta}+\cdots+\overset{\mathfrak{d}}{\beta}}(\varphi o)}{(\overset{1}{\mathfrak{b}}+\cdots+\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}})!}$$

on obtient finalement:

$$\psi\,(\varphi x)=S\left[\frac{(\overset{1}{\mathfrak{b}}+\cdots+\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}})!}{\overset{1}{\mathfrak{b}}!\cdots\cdots\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}}!}\left(\frac{\varphi' o}{1!}\right)^{\overset{1}{\mathfrak{b}}}\cdots\cdot\left(\frac{\varphi^{\delta} o}{\mathfrak{d}!}\right)^{\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}}}\frac{\psi^{\overset{1}{\beta}+\cdots+\overset{\mathfrak{d}}{\beta}}(\varphi o)}{(\overset{1}{\mathfrak{b}}+\cdots\cdots+\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}})!}\,x^{\mathfrak{b}}\right]$$

$$\overset{1}{\mathfrak{b}}+2\overset{2}{\mathfrak{b}}+\cdots+\mathfrak{d}\overset{\mathfrak{d}}{\mathfrak{b}}=\mathfrak{d}$$



d
c
b
h
f
a
e
g
C

SUR LA PROPRIÉTÉ QUE POSSÈDE
LE PLATINE TRÈS DIVISÉ
D'OPÉRER LA COMBINAISON DE L'OXIGÈNE AVEC L'HYDROGÈNE, ET SUR LA DENSITÉ DU PLATINE;

PAR

M. HESS.

(Lu le 23 Mars 1831.)

Dès que la découverte de M. Doebereiner, concernant la propriété dont jouit le platine très divisé d'enflammer un mélange d'oxigène et d'hydrogène, eut paru comme météore brillant sur l'horizon de la science, un grand nombre de Physiciens s'empressèrent de constater ce fait remarquable et destiné à se répandre si promptement par l'application dont il se trouve susceptible. Il serait sinon impossible, mais certainement fastidieux de vouloir reproduire ici toutes les expériences qui ont été faites à ce sujet; tout le monde se rappelle encore celles de MM. Dulong et Thenard, et le mémoire de M. Liebig si plein de faits intéressants. Toutes les explications qu'on a données de ce phénomène peuvent être rapportées à deux principes. On l'a attribué à une action électrochimique provenant du contact de substances hétérogènes, ou bien l'on a tâché de lever les difficultés en admettant que la propriété bien connue des substances poreuses d'absorber des quantités plus ou moins considérables de différents gaz, suffisait pour expliquer le phénomène. Il est évident que l'une des deux explications doit être juste, en ce que le phénomène étant dû ou à une action purement mécanique, ou à une action chimique doit se ranger sous l'une

des deux catégories, ou bien enfin les deux causes peuvent agir simultanément. Mais ces explications ne me paraissent pas suffisamment basées pour pouvoir être admises comme telles; je ferai observer en outre que les chimistes qui se sont occupés du phénomène en question, ne se sont point attachés à obtenir des expressions numériques. Un corps poreux absorbant des quantités différentes de différents gaz, il était possible que les quantités exprimées en nombres comparables entr'eux puissent nous manifester des rapports simples à saisir. L'électricité et l'affinité chimique entraient-elles pour quelque chose, il pouvait se trouver un rapport entre la quantité des substances absorbées et le poids de l'atome de ces substances. La condensation était-elle un phénomène simplement mécanique, il pouvait dépendre de l'attraction réciproque des molécules et se trouver en raison des masses, ou ce qui revient au même, la quantité de gaz absorbé pouvait être en raison inverse de la densité. J'ai donc cru qu'il ne serait peut-être pas sans intérêt de traiter le sujet sous ce point de vue, d'autant plus qu'un résultat même négatif, mais fondé sur des expériences précises et faites dans un but déterminé peut quelquefois rapprocher de la vérité.

J'ai long-tems cherché un appareil convenable pour exposer le platine très divisé, et tel qu'on l'obtient en décomposant le chlorure ammoniacal de ce métal par une chaleur peu intense, au contact de différents gaz. Voici celui qui, après plusieurs expériences préalables, a paru satisfaire aux conditions requises, et diminuer autant que possible les fautes d'observation. Un tube de verre d'un centimètre de diamètre fut étiré à ses deux bouts comme l'indique la fig. I. Le bout effilé *a* étant recourbé, à l'endroit où le tube commençait à devenir plus épais, sous un angle droit, l'était encore une seconde fois à peu près à son extrêmité *a*, fig. II. Il faut avoir soin de rendre la dernière extrêmité recourbée très faible, pour que le tube soit tout-à-fait capillaire à l'endroit de la courbure, et qu'il puisse rompre facilement par un léger choc. L'éponge de platine était introduite dans l'espace *a* par l'ouverture *b*. L'appareil ainsi rempli était adapté à la machine pneumatique par sa partie *b* au moyen d'un tube en gomme élastique. Le vide étant fait, la partie effilée du tube entre *a* et *b* était scellée par

la flamme d'une petite lampe à esprit de vin, de façon à séparer tout-à-fait la partie *a* de la partie *b* qui restait attachée à la machine pneumatique. — Il faut donc pour faire l'expérience, peser d'abord l'appareil vide tel qu'il est représenté par la fig. II., le peser une seconde fois après y avoir fait le vide et l'avoir scellé, enfin peser la partie *b* du tube qui a été détachée du reste de l'appareil. — De ces quatre pesées on déduit le poids de l'appareil, et le véritable poids du platine. On plonge ensuite l'appareil sous le mercure et on introduit le bec dans la cloche remplie du gaz sur lequel on veut faire l'observation (Voy. Fig. II. les lignes ponctuées). Alors un léger choc contre les parois de la cloche suffit pour casser le bec bien effilé, et le gaz se précipite dans le vide. L'absorption s'opère dans fort peu de tems, néanmoins j'ai souvent laissé le gaz en contact avec le platine pendant 12 heures, et jamais moins de trois, quoiqu'après une demi-heure on ne remarque plus de changement dans le volume. Si on a négligé de rendre le bec tout-à-fait capillaire à l'endroit où il doit rompre, la cassure n'est pas unie, on a beaucoup de peine à recueillir les petits éclats de verre, et cela devient une source d'erreurs assez sensibles quand il s'agit de déterminer la capacité de l'appareil. L'absorption étant terminée, on note la diminution de volume du gaz dans la cloche, ayant eu soin d'abord de ramener le mercure à un même niveau et de laisser l'appareil au moins pendant une demi-heure dans cette position. On enlève ensuite la cloche et on retire l'appareil de la cuve. Le moyen qui se présente le premier pour connaître le volume du gaz absorbé par le platine, est de remplacer le gaz par de l'eau, de peser ensuite l'appareil, et de soustraire la capacité ainsi obtenue du volume total dont le gaz a été diminué dans la cloche. Vidant ensuite l'appareil dont le poids est connu et le remplissant de nouveau d'eau, la capacité ainsi indiquée moins celle qui vient d'être obtenue (correction faite pour la dilatation du verre et de l'eau), donne le volume du platine et par suite sa densité. Ce procédé qui au premier abord paraît fort simple offre néanmoins des difficultés que je regarde comme insurmontables pour la manipulation. J'ai donc préféré de vider l'appareil. Pour cela on scelle à la lampe l'extrêmité capillaire; on coupe ensuite la branche ascendante du tube à un endroit

où il a au moins un millimètre de diamètre. En introduisant par cette ouverture un peu d'eau et un fil d'archal, on parvient avec quelque précaution à diviser l'éponge de platine assez pour la faire passer par cet orifice; mais il est indispensable d'éviter toute violence, le verre étant d'ordinaire très mince autour de l'orifice, une légère pression interne suffit pour en détacher des éclats, ce qui rend l'expérience inutile. Après avoir vidé jusqu'à la dernière trace de platine, on remplit l'appareil d'eau de même que le bout du tube qui en a été détaché. Une pesée indique par la quantité d'eau la capacité de l'appareil. Ce volume défalqué de toute la quantité dont le volume du gaz a diminué dans la cloche, donne le volume du gaz absorbé. Pour connaître le rapport entre le volume du platine et celui du gaz absorbé, il faut diviser le poids de l'éponge employée à l'expérience par sa densité. Celle-ci devait nécessairement être déterminée par l'expérience.

Quelques essais faits avec beaucoup de soin, mais selon la méthode que j'ai cru devoir abandonner, m'avaient fait supposer que la pesanteur spécifique était pour le moins aussi grande que celle qu'on attribue au métal forgé. Mais d'après ce mode d'opérer qui n'admettait pas l'emploi d'une quantité un peu notable de platine, la moindre faute pouvait facilement augmenter ou diminuer d'une ou de deux unités le nombre obtenu; il ne donnait donc point de certitude.

Pour obtenir un résultat qui approche de la vérité il y a plusieurs circonstances à observer. D'abord il faut que le sel ammoniacal de platine ne soit pas entassé avec force dans le creuset où on le décompose. Il ne faut pas l'exposer à une température plus haute que celle qui est absolument nécessaire pour sa décomposition. Il faut tâcher de n'employer que l'éponge qui se trouve au milieu du creuset, elle est la moins compacte.

Je pris un flacon pesant $7,3875^{Gm}$; l'éponge de platine qui y fut introduite pesant $15,6745^{Gm}$. Le col du flacon fut étiré en un tube d'un petit diamètre. Après avoir introduit de l'eau distillée et l'avoir fait bouillir pendant $\frac{3}{4}$ d'heure, l'appareil fut complètement rempli d'eau et plongé dans une grande masse d'eau distillée. Lorsqu'il fut refroidi, le poids de l'appareil contenant le platine et plein d'eau

était 66,058. En retirant ensuite le platine, il m'arriva de fracturer un peu l'orifice du tube. Cette expérience ne pouvait donc donner qu'un à peu près. En admettant les extrêmes de fautes possibles, la plus grande quantité d'eau (à la même température) qui pouvait y entrer était $51,13^{Gm}$ la plus petite 51,08, ce qui donne pour le volume de platine 0,6965 ou bien 0,7465 Cent. c. et de là une densité = 22,5 ou 20,99. Je pris un autre flacon, dont le col ne fut plus effilé, mais l'orifice fut usé à l'émeri et recouvert d'une petite plaque de verre usée de même. Voici les données de l'expérience:

		Température.
Poids du verre	$7,081^{Gm}$	
Poids du verre et du platine	23, 184	
Le verre contenant le platine et rempli d'eau	75, 774	16,8° C.
Le verre rempli d'eau sans platine	60, 435	15,6° C.

Ce qui donne une densité de 21,106 à 0°. La correction pour la dilatation cubique du platine a été négligée, vu qu'elle n'occasionne aucune différence dans la troisième décimale. Cette expérience a été faite avec beaucoup de soin. La difficulté est de bien expulser l'air. Voici les précautions que j'ai observées. Le platine fut arrosé d'eau distillée dont on venait d'expulser l'air par une ébullition prolongée. Je fis bouillir l'eau à plusieurs reprises dans le flacon pour bien expulser tout l'air que le platine retient avec beaucoup de force, et chaque fois j'ai eu soin de laisser refroidir complètement l'appareil, afin que les dilatations et les contractions successives facilitassent l'introduction de l'eau dans les pores du métal. Cette manoeuvre fut répétée cinq fois, et les deux dernières je laissai refroidir dans le vide.

On sait que le platine qui vient d'être laminé acquiert une densité plus grande; on cite que WOLLASTON est parvenu à lui donner une densité de 21,25 à 21,5. La densité d'un morceau de platine laminé, que m'avait communiqué M. SOBOLEFSKY membre correspondant de cette Académie, et qui avait été travaillé d'après son procédé, se trouva = 21,32. On sait que quand le platine laminé est chauffé jusqu'au rouge et qu'on le laisse refroidir, il est devenu moins dense.

Une feuille de platine communiquée à notre gouvernement par M. WOLLASTON, et qui paraît avoir été parfaitement bien travaillée, ne donna après la calcination d'après l'expérience que j'ai faite, qu'une densité = 20,66. Il paraît résulter de là que de tout platine chauffé au rouge, l'éponge de platine possède la plus grande densité. En outre il faut bien faire attention que prenant la pesanteur spécifique de l'éponge de platine, les fautes qui sont les plus difficiles à éviter tendent toutes à donner une densité moindre.

Je fis une expérience préalable avec du noir de platine préparé selon la méthode de M. LIEBIG; je ne fis point bouillir et je n'expulsai l'air qu'imparfaitement dans le vide, elle me donna une densité de 19,61. Les auteurs indiquent une densité de 16 à 17,5, ce qui m'engagea à préparer de nouveau du noir de platine et à donner à l'expérience tous les soins dont j'étais capable. En voici les données:

Poids du verre	7, 081 Gm
Poids du verre plus le platine	21,3243 Gm

L'eau étant introduite dans le flacon on la fit bouillir à plusieurs reprises, et lorsque la température fut suffisamment abaissée, on posa l'appareil sous la cloche de la machine pneumatique en même tems qu'un flacon avec de l'eau distillée dont on avait expulsé l'air par l'ébullition. Lorsque le liquide fut parvenu à la température de la chambre, c'est-à-dire de 17° C. je fis les pesées suivantes:

Poids du verre plus le platine, plus l'eau	63,9520
Poids du verre plein d'eau	50,3973
Ce qui donne pour le volume du platine	0,6888

donc une densité = 20,6.

Revenons maintenant aux quantités de gaz absorbées par l'éponge de platine: j'indiquerai les données des expériences, avec le résultat.

Expérience I.

Poids du verre	20,711
Poids du verre plus le platine	23,711

Le vide étant fait, l'appareil étant *scellé*, et le bout *b*, tenant à la machine pneumatique, séparé du reste de l'appareil .	19,7995
Le bout *b*	3, 648

	Volume du gaz.	Baromètre.	Température
Avant l'expérience	157	765^{mm}	17°,4 C.
Après l'expérience	146	764^{mm}	16°,4 C.

Poids du verre rempli d'eau $29,713^{Gm}$.

De ces données on tire: Poids du platine $= 2,747^{Gm}$, son volume $0,13^{cc}$, capacité de l'appareil $9,01^{cc}$. Diminution du gaz dans la cloche $=$ 10,5, absorbé par le platine $1,5^{cc}$. Résultat: 11 fois le volume du platine.

Expérience II.

Poids du verre	$22,327^{Gm}$
Poids du verre plus le platine	25,4215
Poids de l'appareil le vide étant fait etc.	22,9345
Poids du bout *b*	2, 469

	Volume du gaz.	Baromètre.	Température.
Avant l'expérience	182,5	768,8	13°,5
Après l'expérience	166,5	——	——

Poids du verre rempli d'eau . . . . $35,22^{Gm}$.

De ces données on tire: Poids du platine $3,0943^{Gm}$, son volume 0,146, capacité de l'appareil 12,9. Diminution du gaz dans la cloche $10,0^{c.c}$, donc absorbé par le platine $3,1^{c.c}$. Résultat: 21 fois le volume du platine.

Expérience III.

Poids du verre	20, 233^{Gm}
Poids du verre plus le platine	26, 85
Poids de l'appareil le vide étant fait, etc.	25, 2985
Poids du bout *b*	1, 5375

	Volume du gaz.	Baromètre.	Température.
Avant l'expérience	158	759, 2	18°,3 C.
Après l'expérience	139	755, 5	17°.

Poids du verre rempli d'eau 34,014^{Gm}.

De ces données on tire: Poids du platine 6,617^{Gm}, son volume 0,313; capacité de l'appareil 13,771 *c,c*. Diminution du gaz dans la cloche 19,8; absorbé par le de platine 6,029. Résultat: 19,2 fois le volume de platine.

Expérience IV, faite avec du noir de platine, dont 6,072^{Gm} absorbèrent 86*c.c*; ce qui équivaut à 292 fois le volume du platine.

Ces expériences toujours faites avec de l'éponge de platine nouvellement préparée, prouvent que le même poids de platine n'absorbe pas toujours la même quantité de gaz, et il paraît que cette différence provient des différences de la superficie des particules du platine. Il s'ensuit une nouvelle difficulté pour comparer entr'elles les quantités des différents gaz qu'absorbe le platine. Il est évident d'après ce que je viens de rapporter, que cela ne peut se faire qu'autant que l'on se sert du même platine pour les différents gaz.

Pour avoir quelques données là-dessus je fis les expériences suivantes:

1) 13,^{Gm}008 d'éponge de platine renfermée dans un appareil semblable a celui dont je me suis servi plus haut furent introduits dans du gaz oxigène pur. La diminution du gaz dans la cloche, se trouva = 16,06^{cc} à 0° et 46$^{cent.}$. La cloche ayant été enlevée de-dessus l'appareil, le bout effilé fut sur la champ scellé

au chalumeau, puis recourbé. — L'appareil introduit ensuite dans du gaz hydrogène, et la pointe étant cassée, on entendit de petites détonations se succéder très rapidement. Le volume dont le gaz se trouvait diminué dans la cloche, réduction faite pour la température et la pression, se trouva = 48,26.

Nous avions donc pour l'oxigène . . . . 16, 06.
pour l'hydrogène . . . . 48, 26.
Mais $3 \times 16,06 = 48,18$.

On voit donc que dans ce cas le platine avait absorbé à très peu de chose près la même quantité d'oxigène que d'hydrogène. Cette expérience fut répétée dans un ordre inverse, en commençant par l'hydrogène.

Absorption de l'hydrogène . . . . 11, 73.
Absorption de l'oxigène . . . . 16, 53.

Ces deux nombres doivent se trouver dans le rapport de 1 à $1\frac{1}{2}$, si la quantité de l'hydrogène absorbé était égale à celle de l'oxigène.

Pour voir ce qu'il en était, je pris du noir de platine. L'oxigène absorbé étant = 16: l'appareil fut plongé dans l'hydrogène, le mercure monta avec beaucoup de rapidité dans la cloche et dépassa l'orifice du tube, ce qui fit entrer le mercure dans l'appareil et manquer l'expérience, cependant, le volume de l'hydrogène dans la cloche avait déjà diminué de plus de 64, ce qui prouve évidemment que le platine absorbe infiniment plus d'hydrogène que d'oxigène.

Pour savoir si la même masse de platine absorbait toujours la même quantité de gaz, je fis un changement à l'appareil. Je soudai à l'extrêmité qui regardait la machine pneumatique un tube thermométrique d'une longueur convenable. La manipulation restait la même; mais l'expérience étant achevée, il ne fallait plus qu'enlever le bout scellé du tube thermométrique, et fermer le bec pour pouvoir faire de nouveau le vide dans l'appareil, et exposer de nouveau le platine au contact du gaz; voici une expérience avec de l'éponge de platine:

Diminution du gaz hydrogène dans la cloche . . . . . $25,^{cc}34$.
Pour la seconde fois . . . . 24, 00.

Il semblerait résulter de cette expérience, que l'éponge de platine retient le gaz hydrogène même dans le vide. Les expériences suivantes ne laissent aucun doute à cet égard.

La soudure du tube thermométrique rendait le manipulation difficile à cause de l'inflexibilité de l'appareil. J'ajoutai le tube thermométrique par un petit tube en gomme élastique, on sait que ces tubes résistent parfaitement à la pression atmosphérique, enfin il est toujours facile de s'assurer si l'appareil tient le vide. $5,355^{Gm}$ de noir de platine légèrement calciné furent introduits dans l'appareil. La diminution du gaz dans la cloche fut dans quatre expériences :

I.	II.	III.	IV.
47, 8	17, 6	18, 5	18, 5.

Ces nombres prouvent que le platine avait absorbé, pendant la première expérience, une quantité d'hydrogène qui ne l'abandonnait plus dans le vide. Ce phénomène ne peut pas être attribué à ce que le platine se trouvait fortement entassé, au contraire l'appareil était très spacieux; en outre le vide étant fait, je remuai le platine en secouant l'appareil avant d'avoir intercepté la communication avec la machine pneumatique.

La capacité de l'appareil était de 14,75 *cc*, ce qui prouve que de 47,8 centim. cubes absorbés dans la première expérience, il y en avait 14,75 employés à remplir l'appareil, tandis que 33,05 étaient absorbés par le platine, et que ceux-ci ne pouvaient plus en être dégagés par le vide; on se souviendra que M. Liebig à remarqué que le noir de platine retenait l'alcool avec la même avidité (Annales de chim. et de phys. T. 42. p. 322).

Je fis passer de l'air atmosphérique sur ce même noir de platine, il se forma de l'eau qui se manifesta à la paroi supérieure de l'appareil. Le platine étant ensuite légèrement réchauffé par une lampe, fut complètement desséché par un courant d'air sec.

Le vide étant fait, je plongeai l'appareil dans du gaz oxigène pur. Voici les quantités dont le volume du gaz diminua sous la cloche dans cinq expériences:

I.	II.	III.	IV.	V.
14, 6	13, 6	14, 8	15, 2	14, 8.

Ces quantités égalent à si peu de chose près la capacité de l'appareil trouvée 14,75^{cc}, que les variations ne dépassent pas les limites des fautes d'observation. J'ai cru que le noir de platine retenait peut-être encore de l'humidité, mais réchauffé par une lampe il n'en dégagea pas une trace; je n'ai pas non plus négligé de le secouer néanmoins, la diminution du gaz dans la cloche restait la même, ce qui prouve que le platine ne condense point du gaz oxigène.

Le noir de platine dont je m'étais servi fut transversé avec soin dans un autre appareil semblable au précédent dont la capacité était de 14, 3 *cc.* L'expérience fut faite avec les gaz suivants:

Gaz acide carbonique.

	I.	II.
Le volume du gaz a diminué dans la cloche de	13, 5	14, 5.

Ces nombres prouvent suffisamment qu'il n'y a point d'absorption.

Gaz acide hydrochlorique.

La première expérience me donna une absorption de passé 50^{cc}, mais je m'assurai bientôt que le platine n'était plus complètement sec. L'expérience fut répétée après que le platine eut été desséché avec beaucoup de soin. Le volume absorbé se trouva alors être 16^{cc}. Il paraît donc que ce gaz n'est point absorbé par le platine, au moins pas en quantité appréciable.

Gaz nitrogène.

	I.	II.
Diminution du gaz dans la cloche	13, 3	14, 2.

Point d'absorption.

Gaz ammoniac.

Ce gaz ayant d'abord donné une absorption considérable, je trouvai qu'elle était due à la présence d'un peu d'humidité qui avait eu le temps de s'introduire pendant que le platine s'était trouvé en communication avec la machine pneumatique. Je fis donc une expérience à part avec une autre quantité de noir de platine qui fut préa-

lablement chauffé au rouge naissant. La diminution de volume du gaz dans la cloche fut de 6^{cc}, ce qui était justement la capacité de l'appareil.

Gaz oléfiant.

Je me servis de l'appareil et du platine employés pour toutes les expériences précitées, le gaz se trouva diminué de 13,4, donc point d'absorption.

Dans le cours de ces expériences avec les différents gaz, le noir de platine dont je m'étais servi, ayant souvent été chauffé se trouva à la fin gris comme quand on l'expose à une chaleur rouge. Il avait donc subi une modification, et pour que les expériences faites avec différents gaz sur la même masse de platine fussent concluantes, il s'agissait de voir si cette masse n'avait pas perdu, par le contact réitéré de différentes substances, la propriété de condenser l'hydrogène. L'expérience étant faite dans ce gaz, la diminution de volume fut, dans la cloche, d'un peu plus des 34 *c.c* ce qui indiquait que le platine après avoir été chauffé plusieurs fois et avoir subi une modification visible, condensait encore 20^{cc} d'hydrogène. Il en avait condensé 33^{cc} à la première expérience. La chaleur, diminue donc dans le platine, jusqu'à un certain point, la propriété de condenser l'hydrogène.

On voit par les faits que je viens de rapporter que le noir de platine ou en général le platine extrêmement divisé jouit de la propriété de condenser des quantités considérables d'hydrogène, mais qu'il ne condense ni l'oxigène, ni l'azote, ni l'acide hydrochlorique ni l'ammoniaque, ni le gaz oléfiant, ni l'acide carbonique, du moins aucun de ces gaz en quantités appréciables. Ce rapport qui existe entre le platine et l'hydrogène est certainement un de ces phénomènes qui ne sont pas encore expliqués. Il est évident que la surface que présente le platine y entre pour beaucoup, puisqu'elle fait varier les quantités de l'hydrogène absorbé, mais quel est son action? dépendrait-elle de la circonstance sur laquelle M. Liebig, dans le mémoire cité, attire notre attention p. 327 où il rappelle la propriété du gaz hydrogène „de s'échapper „par les fentes d'une cloche plongeant dans le mercure, de telle sorte que le mercure „y monte de 2 — 3 pouces contre la loi de la pesanteur?" Si c'est la même cause

qui détermine la condensation de l'hydrogène par le platine très divisé, du verre très divisé devrait aussi produire une condensation plus ou moins grande. Pour m'en convaincre j'ai rempli un appareil, comme celui qui a été décrit, avec du verre réduit en poudre, l'appareil plongeant dans l'hydrogène, il ne s'est point manifesté de condensation. Il paraît donc que les deux phénomènes sont indépendants l'un de l'autre. On arriverait peut-être à la solution du problème, s'il était possible de déterminer avec précision d'un côté le rapport entre le volume du gaz condensé et la superficie que présente le platine, de l'autre le rapport qui existe entre le volume du gaz et la masse du métal. En effet, on peut bien s'imaginer que chacun des nombres obtenus par l'expérience représente la somme de deux valeurs dont l'une se rapporte à la masse, l'autre à la superficie, et dans ce cas l'une de ces valeurs, fut-elle même constante, il est évident qu'il nous manque des données pour former une équation quelconque qui nous conduise à connaître cette valeur.

Quant à la propriété qu'a le noir de platine de déterminer la combustion de l'hydrogène, on a cru pouvoir l'expliquer par la forte condensation de ce gaz, mais il est facile de déduire des expériences rapportées plus haut, que cette condensation n'explique nullement le phénomène, car ce n'est ni la grande quantité de chaleur dégagée par la condensation, ni comme le suppose M. Liebig, la compression simultanée de l'hydrogène et de l'oxigène qui agissent dans ce cas. Voici ce qui prouve cette assertion: Quand on expose du noir de platine, renfermé dans l'appareil dont je me suis servi, et qu'on a préalablement rendu vide d'air, au contact du gaz hydrogène, toute la chaleur qui peut se dégager par la condensation du gaz se trouve dégagée, ce qui fait que l'appareil s'échauffe tellement qu'on à peine à le tenir entre les doigts, quoiqu'il plonge dans le mercure. Mais cette chaleur une fois dégagée, et l'appareil revenu à la température du milieu où il se trouve, qu'on l'expose au contact de l'oxigène, il y a formation d'eau, et cependant nous avons vu que même le noir de platine ne condense point l'oxigène, et en cela mes expériences s'accordent parfaitement avec celles de M. Doebereiner. Dans ce cas il ne peut plus être question ni de compression d'oxigène, ni de combinaison déterminée par la chaleur; au

contraire, la chaleur qui se dégage alors n'est due qu'à la combinaison qui a lieu. Cette expérience, si je ne me trompe, prouve clairement que le développement de chaleur et l'inflammation ne sont que des phénomènes accessoires. Cela paraîtrait rapporter la cause première à ce que nous nommons électricité par contact, — je m'abstiendrai toutefois de trancher la question.

ESSAI MONOGRAPHIQUE

SUR LES ESPÈCES

D'ERIOCAULON DU BRÉSIL,

PAR

M. BONGARD.

(Lu le 6 Avril 1831.)

La riche collection de plantes du Brésil que l'Académie reçut l'année dernière de la part de M. DE LANGSDORFF, un de ses membres, renferme un grand nombre de végétaux qui ne sont pas encore décrits dans les ouvrages de botanique. Ajoutés à la multitude de ceux que plusieurs savants d'un grand mérite nous ont fait connaitre dans ces derniers temps, nous sommes encore bien loin de voir épuisées les richesses végétales que ce pays renferme. Leur nombre en effet est si étonnant, que de long-temps le zèle et les travaux assidus de ceux qui sont à portée d'examiner les collections de plantes, qu'on en a tirées, ne pourront suffire à leur publication. En jettant un coup d'oeil sur les travaux botaniques de MM. RADDI, MARTIUS, POHL, AUG. DE ST.-HILAIRE et de SCHLECHTENDAHL; sur ceux des MM. NEES D'ESENBECK et TRINIUS, qui ont décrit les graminées du Brésil, on aura une idée de la prodigieuse végétation de ce pays.

Dans la collection de M. LANGSDORFF, le genre d'Eriocaulon a fixé particulièrement mon attention, tant par la beauté et la variété des formes, que par le nombre d'espèces nouvelles que j'y ai trouvées.

Le travail que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, est le résultat de l'étude et de l'examen que j'en ai fait.

J'aurais désiré pouvoir étendre mes recherches analytiques sur toutes les espèces d'Eriocaulon connues, afin d'offrir une monographie complète de ce genre; mais les matériaux nécessaires pour un pareil travail me manquent; quoiqu'en possession de la plupart des espèces d'Eriocaulon de l'Amérique septentrionale et de quelques espèces des autres pays, je suis loin d'avoir les échantillons de toutes celles qui ont été décrites dans l'ouvrage de MM. DE HUMBOLDT et BONPLAND. Je n'ai même pu avoir sous les yeux qu'une seule espèce sur les onze de la Nouvelle Hollande, décrites par M. ROB. BROWN. Il a donc fallu me borner à celles qui sont originaires du Brésil.

CHAPITRE I.

Aperçu historique du genre ERIOCAULON.

Le nom *d'Eriocaulon*, qui signifie *tige laineuse*, fut d'abord donné par PLUKENET à une plante de l'Amérique septentrionale, dont les tiges sont couvertes d'une laine noire et luisante *).

C'est la même plante qui, plus tard, fut nommée par LINNÉ: *Eriocaulon decangulare.*

LINNÉ en conservant le nom *d'Eriocaulon*, l'employa comme nom générique, quoique la signification étymologique du mot ne répondit plus aux espèces, pour lesquelles il le destina.

LINNÉ marqua d'abord dans les *species plantarum* de l'année 1743 quatre espèces de ce genre, c'est-à-dire:

1) L'Eriocaulon quinquangulare } des Indes orientales.
2) — — sexangulare }
3) — — setaceum de Malabar
4) — — decangulare de l'Amérique septentrionale.

*) Eriocaulon Noveboracense, capitulo albo globoso, s. Globularia Americana statices haud absimilis, cauliculis lanâ atronitente refertis. *Pluk. amalth.* t. 409 fig. 5.

Dans la 13me édition du *systema vegetabilium* publiée par Murray en 1774, on ajouta une cinquième espèce, originaire du Brésil, décrite et figurée par Breynius *). C'est *l'Eriocaulon triangulare* qui, par conséquent, est la première espèce venue du Brésil.

Lamarck publia ensuite, en 1786, dans l'Encyclopédie méthodique plusieurs nouvelles espèces, dont trois ont été figurées. Willdenow fit entrer ces dernières dans ses *species plantarum* de 1797. Ces espèces nouvelles étaient:

l'*Eriocaulon repens* de l'île de Bourbon

— — *fasciculatum* } tous les deux de la Guiane.
— — *umbellatum* }

Les autres espèces décrites dans l'ouvrage cité de Lamarck, furent omises par Willdenow, parce qu'il les regardait comme douteuses ou comme trop peu connues.

Plus tard, en 1805, Persoon inséra cependant dans son Enchiridion encore deux autres espèces de celles qu'avait notées Lamarck, c'est-à-dire *l'Eriocaulon compressum* de la Caroline méridionale et *l'Eriocaulon pubescens* de Madagascar, en regardant le premier comme une variété du second.

De cette manière, on ne trouve dans l'ouvrage de Persoon que 9 espèces d'Eriocaulon, tandis que long-temps avant lui, Lamarck en avait décrit *douze*. Mais ces espèces omises n'étaient pas suffisamment connues, et on jugea plus tard que quelques unes de ces dernières devaient être rapportées à des espèces qu'on connaissait déjà, et que l'*Eriocaulon spadiceum* de Lamarck appartenait au genre de *Schoenus*.

Dans la Flore de la Cochinchine, publiée en 1790 par Loureiro, il est fait mention d'une espèce d'Eriocaulon désignée sous le nom de *quadrangulare*, qui, n'étant pas suffisamment décrite, ne fut pas mentionnée dans les ouvrages de Willdenow et de Persoon.

---

*) *Breynius* Cent. tab. 50.

Déjà en 1768, on avait découvert à l'île de Skye, en Irlande, une espèce d'Eriocaulon, dont le Professeur Hope, à Edimbourg, donna une description avec une assez bonne analyse *). Mais cette espèce fut toujours confondue avec l'*Eriocaulon decangulare* de l'Amérique septentrionale. Withering la distingua à la fin de cette dernière, et la nomma *Eriocaulon septangulare*, nom sous lequel elle parut dans la *Flora britannica* de Smith. C'est la seule espèce d'Eriocaulon qui jusqu'à présent ait été trouvée en Europe.

Michaux dans sa flore de l'Amérique septentrionale (1803) décrit quatre nouvelles espèces *d'Eriocaulon:*

1) *Eriocaulon gnaphaloides.*
2) — — *villosum.*
3) — — *flavidulum.*
4) — — *pellucidum* **).

A celles-ci, M. Rob. Brown ajouta dans son Prodrome de la flore de la Nouvelle Hollande onze nouvelles espèces de ce pays.

Enfin, M. Poiret, dans le supplément à l'Encyclopédie méthodique de Lamarck, ne distingua pas seulement avec cet auteur l'*Eriocaulon compressum* comme espèce de l'*Eriocaulon pubescens;* mais il ajouta aussi une espèce nouvelle de Cayenne, sous le nom d'*Eriocaulon caulescens.*

Ainsi, le nombre des espèces d'Eriocaulon se trouvait déjà porté à 28, lorsque MM. Humboldt et Bonpland publièrent 6 nouvelles espèces de ce genre, recueillies dans leur voyage au midi de l'Amérique, ce qui porta leur nombre jusqu'à 34, qui furent consignées dans le 2me volume du *systema vegetabilium*, publié en 1817 par Roemer et Schultes.

---

*) Philosophical transactions 1770. Vol. 59. pag. 241.

**) Je doute que l'*Eriocaulon pellucidum* soit réellement distinct de l'*Eriocaulon septangulare*; J'ai eu occasion de comparer plusieurs échantillons de ces deux plantes, et une analyse exacte ne fait voir des différences autres qu'une légère modification dans les écailles extérieures des capitules, qui sont un peu plus allongées dans l'*Eriocaulon septangulare.*

Parmi toutes ces espèces, on n'en connaissait jusqu'alors qu'une seule, qui fut originaire du Brésil; mais quelques années plus tard, M. FREYREIS, qui se trouva auprès de M. LANGSDORFF au Brésil, communiqua quelques nouvelles espèces de ce pays à MM. THUNBERG et WIKSTROEM en Suède, qui les publièrent de suite. THUNBERG *) nomma l'une *Eriocaulon Freyreisii* et M. WIKSTROEM donna dans les actes de l'Académie Royale de Suède de l'année 1820 **) la description et les figures de trois espèces nouvelles qu'il nomma:

Eriocaulon ramosum,
— — *hirsutum*,
— — *caespitosum*.

Plus tard, M. SCHRADER publia deux nouvelles espèces d'Eriocaulon, que le Prince MAXIMILIEN de NEUWIED avait rapportées de son voyage au Brésil, et qu'il nomma: *E. Maximiliani* et *E. bifidum* ***).

Depuis ce temps, aucune nouvelle espèce d'Eriocaulon n'a été publiée, et le nombre total de celles qui sont connues se monte par conséquent à 40, dont 7 sont originaires du Brésil.

Mais ce nombre va être considérablement augmenté par les espèces nouvelles qui se trouvent dans la collection de M. LANGSDORFF. A celles-ci j'ai pu encore en ajouter quelques autres également venues du Brésil, et qui se trouvaient dans les riches herbiers de MM. FISCHER et PRESCOTT. Ces Messieurs m'ont communiqué avec une complaisance tout amicale ce qu'ils possédaient à cet égard, et je leur dois en outre la connaissance exacte de beaucoup d'espèces d'Eriocaulon de divers autres pays.

Enfin M. RIEDEL, botaniste plein de connaissances et de zèle, qui accompagna M. LANGSDORFF dans ses voyages scientifiques au Brésil, et à qui on est redevable de la richesse de la collection en question, m'a fait connaitre quelques espèces d'Erio-

---

*) Decas plantarum Brasiliensium p. 7.

**) Pag. 74. et suivantes.

***) ROEMER et SCHULTES Mantis. in Vol. II. Syst. vegetab. 1824 p. 468.

caulon, recuillies par lui dans la province de Bahia, contrée que M. Langsdorff dans son voyage n'avait pas atteint.

De cette manière, j'ai pu avoir sous les yeux et examiner 80 espèces d'Eriocaulon du Brésil. J'ai reconnu parmi elles les espèces décrites par M. Wikstroem; je crois y reconnaître *l'Eriocaulon Maximiliani* indiqué par M. Schrader, ainsi que quelques espèces déjà décrites par Lamarck; mais je ne puis pas y trouver l'espèce la plus anciennement connue, décrite par Breynius et nommée par Linné *Eriocaulon triangulare;* je n'y retrouve pas non plus *l'E. Freyreisii* de *Thunberg* ni *l'Eriocaulon bifidum* de *Schrader*. Toutes les autres espèces paraissent être nouvelles, et le genre Eriocaulon reçoit ainsi tout d'un coup, et du seul Brésil, une augmentation qui est presque le double du total des espèces que nous connaissions jusqu'à présent des divers pays, prises ensemble.

CHAPITRE II.

Description des Organes.

Organes de la végétation.

Racines.

Les Racines des Eriocaulons sont communément fibreuses; quelquefois elles se présentent en forme de faisceaux. Les espèces à feuilles réticulées (qui sont d'ailleurs rares au Brésil) ont communément des racines annuelles, fibreuses, blanchâtres, et comme articulées; elles sont formées de cellules transparentes avec des diaphragmes transversals bien distincts. Un fil de vaisseaux parcourt le milieu de chaque fibre dans toute sa longueur.

La plupart des espèces du Brésil ont des racines vivaces.

Tiges.

Les tiges des Eriocaulons sont très variables. Elles sont assez apparentes dans quelques espèces; mais dans beaucoup d'autres elles sont si courtes qu'elles paraissent manquer entièrement, et ce sont celles que l'on est dans l'usage d'appeller *acaules*

Mais un bon nombre de ces dernières offrent des rhizomes, qui quelquefois sont d'une grosseur remarquable.

La tige est toujours herbacée, et dans la règle cylindrique; des feuilles la garnissent ordinairement dans toute sa longueur. Quelquefois ces feuilles se détachent successivement et laissent la tige dans sa partie inférieure nue. On voit alors sur elle les cicatrices des feuilles tombées sous la forme de stries transversales ou obliques qui entourent la tige en spirale.

Feuilles.

Les feuilles sont le plus souvent lancéolées et prolongées en angle aigu; on remarque aussi des feuilles *ensiformes*, c'est-à-dire comprimées latéralement à la manière de celles des Iris.

Dans quelques espèces munies de tiges, la base des feuilles caulinaires est large et embrassante et le reste du limbe communément creusé en canal.

On voit souvent la base des feuilles, ou l'endroit d'où elles prennent naissance, couverte d'une touffe épaisse de poils plus ou moins longs.

Leur position sur la tige est ordinairement en spirale; quelquefois alterne. La position verticillaire se rencontre aussi, quoiqu'elle soit rare et peu régulière.

Les feuilles réticulées, assez fréquentes dans les Eriocaulons des autres pays, et surtout dans les espèces du nord, se rencontrent rarement dans celles du Brésil, et je ne les ai observées que dans trois espèces.

Organes de la reproduction.

Inflorescence.

L'inflorescence des Eriocaulons est *axillaire*, c'est-à-dire les pédoncules sortent des aisselles des feuilles. La feuille qui se trouve ainsi à la base du pédoncule est modifiée dans son développement et prend toujours l'aspect d'une gaîne qui entoure la partie inférieure du pédoncule. Dans la *Tonina fluviatilis*, plante qui, à ce qu'il me semble, ne devrait pas être séparée du genre Eriocaulon, cette gaine n'est pas

encore complète: on voit distinctement que c'est la feuille à la base du pédoncule qui va se transformer en gaîne.

Si les pédoncules se trouvent en nombre considérable, l'alongement de la tige en souffre nécessairement; elle s'arrête tout d'un coup, et les pédoncules ramassés sur un espace étroit, paraissent terminer la tige.

Dans ce cas on voit souvent à la base de chaque pédoncule, outre la gaîne, une feuille qui ressemble plus ou moins aux feuilles ordinaires, mais qui ont été prises et décrites par divers auteurs pour des involucres. Elles ne sont réellement que des feuilles restées souvent un peu plus courtes par les mêmes circonstances qui arrêtent la prolongation de la tige.

Les pédoncules qui en nombre plus on moins grand, paraissent terminer la tige et la terminent dans le sens rigoureux, sont tantôt de longueur égale et forment des *ombelles;* tantôt très inégalement longs. Pour distinguer cette dernière modification de la précédente, qui est commune à un groupe particulier, je me suis servi de l'expression de *pédoncules en faisceau* (pedunculi fasciculati). On voit dans ceux-ci les extérieurs, ou ceux de la périphérie, communément plus courts que ceux du milieu. Cela me paraît tenir au mode de leur développement.

La forme des pédoncules est dans la règle anguleuse; mais le nombre des angles varie infiniment, ce qui a engagé les botanistes de les employer souvent comme caractère spécifique. De là les noms d'Eriocaulon *triangulare*, *quinquangulare*, *sexangulare*, *septangulare* et *decangulare*. Mais ces modifications des angles sont trop souvent communes à plusieures espèces, et ne peuvent nullement offrir des caractères distinctifs suffisants.

Les pédoncules grèles possèdent souvent la propriété de se tourner en spirale, lorsqu'ils sont secs, comme on voit dans *l'Eriocaulon spirale*, *tortile*, etc.

Une modification de pédoncules très remarquable se rencontre dans certaines espèces. Elle ressemble à un assemblage de pédoncules soudés ensemble dans toute leur longueur; de sorte qu'il en provient un seul pédoncule plat et large, qui est terminé par un capitule de fleurs.

D'autres fois ces pédoncules se partagent à leur sommité, et chaque branche porte un capitule de fleurs comme les pédoncules simples. La gaîne est cependant simple et ne montre aucune modification dans sa structure.

Les *gaînes* ont ordinairement l'extrémité supérieure *obliquement coupée*, quelquefois elles y sont divisées en 2 ou plusieurs petites parties, rarement *tronquées*.

Les pédoncules portent à leur sommité des *capitules* formés de fleurs très petites, dont chacune est munie d'une *bractée* ou écaille, comme on les nomme ordinairement. Ces capitules sont le plus souvent orbiculés ou hémisphériques.

Les écailles extérieures sont communément stériles et forment l'enveloppe du capitule, se couvrant en partie les unes les autres.

Dans plusieurs espèces elles sont d'une grandeur remarquable et donnent aux capitules un aspect particulier.

Il y a une série d'Eriocaulons, dans lesquels les écailles du bord du capitule offrent une modification très remarquable, et qui jusqu'à présent ne s'est rencontrée que dans quelques espèces du Brésil. Ces écailles ou bractées prennent un développement particulier, deviennent plus grandes et plus longues que toutes les autres, changent de forme, et ressemblent en quelque sorte aux fleurons ligulés marginaux que l'on observe dans les composées radiées. Cela paraît expliquer la nature de ces organes.

Ces bractées transformées offrent ainsi des capitules radiés avec cette différence, que dans les composées ce sont des corolles auxquelles est dû cet aspect, tandis que dans les Eriocaulons il est produit par des bractées.

Linné avait toujours cru que les Eriocaulons étaient des plantes *monoclines* à trois étamines; il les avait par conséquent placés dans la troisième classe de son système. Mais l'analyse de *l'Eriocaulon septangulare* faisait voir que du moins cette espèce était *monoïque*, et l'on devait soupçonner que les autres espèces des différents pays avaient une structure analogue; ce qui a été constaté plus tard par plusieurs botanistes.

Toutes les espèces d'Eriocaulon offrent, sous ce rapport, la même structure; je l'ai rencontrée dans toutes celles du Brésil, ainsi que dans les Eriocaulons des divers autres pays, que j'ai pu me procurer. Je l'ai observé aussi dans une espèce nouvelle du *Népal*, que je dois à l'amitié de M. Prescott *).

Souvent les fleurs femelles se trouvent à la périphérie du capitule, et les mâles en occupent le centre; ou bien on voit l'inverse, les mâles à la circonférence, et les femelles au milieu du capitule; mais j'avoue que je n'ai pu trouver une règle constante dans ces dispositions; le plus souvent les fleurs des deux sexes paraissent être mêlées sans aucun ordre.

Il m'a été impossible d'observer avec exactitude le développement successif des fleurs dans les capitules; mais il me semble que l'épanouissement va de la périphérie au centre. *L'Eriocaulon speciosum*, qui offre au milieu des capitules hémisphériques une espèce de fossette, qui provient du peu de développement des fleurs à cet endroit, le montre évidemment.

Fleurs.

Les fleurs sont communément pédicellées, et portent à la base du pédicelle une *bractée*, qui protége et couvre plus ou moins la fleur.

Les fleurs mâles et femelles offrent un *double périgone*. Le *périgone extérieur* est formé de 2 à 3 parties; mais la modification ternaire est la plus fréquente dans les espèces du Brésil. Ces parties périgonales sont plus ou moins oblongues, plus ou moins concaves et quelquefois carinées. Elles portent le plus souvent à leur sommité des poils courts, gros, blancs et opaques.

---

*) *Eriocaulon Nepalense*: acaule; foliis radicalibus reticulatis, lineari-lanceolatis, obtusis, glabris; pedunculis (caespitosis) elongatis (pedalibus) glabris; vaginis folia subaequantibus bifidis; (capitulis lanatis minoribus).

Folia sub lente visa punctulis albis glandulosis adspersa. *Squamae* capituli exteriores ovato-oblongae, acuminatae, glabriusculae; interiores pilis albis margine dorsoque, apicem versus, obsitae.

Les bractées offrent en ce cas la même structure et le capitule prend ainsi un aspect *velu*, comme on le voit dans un grand nombre d'espèces d'Eriocaulon; ou bien ces parties sont absolument dépourvues de poils ainsi que les bractées, et le capitule est alors *glabre*.

Le périgone extérieur est toujours plus colorié et d'une texture un peu plus rude que le périgone intérieur. Sa coloration est le plus souvent foncée tirant sur le brun; dans quelques espèces elle est d'un blanc mêlé de noir, dans d'autres d'un blanc jaunâtre et luisant.

Le *périgone intérieur* des fleurs mâles, formé aussi de 2 — 3 parties, comme le périgone extérieur, diffère de ce dernier en ce que ces parties sont le plus souvent soudées entr'elles plus ou moins, et forment une espèce de tube ouvert en haut, et offrant autant de petits lobes qu'il y a de parties soudées. Ces lobes du tube sont alternes avec les parties extérieures du périgone. Dans quelques espèces les parties périgonales intérieures sont cependant libres.

Dans les échantillons desséchés, les lobes du tube se replient ordinairement en dedans ainsi que les étamines.

Le tube renferme les *étamines* au nombre de 2 — 4 ou de 3 — 6. Je n'ai trouvé 6 étamines que dans une seule espèce de la section des *Radiés*, que j'ai appelée *Eriocaulon Prescottianum.*

Le nombre binaire des étamines se rencontre aussi rarement dans les espèces du Brésil; je n'ai jamais compté 4 étamines dans les Eriocaulons de ce pays. Ce nombre cependant paraît ne pas être rare dans les espèces de la Nouvelle Hollande, où celui de 6 étamines se rencontre aussi plus souvent.

Les *étamines* des *Eriocaulons*, si elles se trouvent au nombre de 2 ou 3, sont toujours placées devant les petits lobes du tube, et insérées au receptacle. Elles sont communément plus longues que le tube (stamina exserta) et se composent d'un *filet* et d'une *anthère* biloculaire. Le filet est libre de toute adhérence. L'anthère est insérée à la sommité du filet par le milieu du dos. Les anthères sont ovales ou plus ou moins oblongues, formées de deux bourses soudées ensemble par le milieu, et

s'ouvrant par des fentes longitudinales. Leur couleur est jaune; quelquefois elles paraissent d'un brun qui tire au noir, si toute fois cette dernière coloration n'est pas produite par l'exsiccation. Les granules de *pollen* sont jaunes, sphériques, et sans aspérités.

On voit les anthères plus grandes et les filets très courts dans quelques cas, où le périgone intérieur vient à avorter totalement.

Le plus souvent on trouve dans les fleurs mâles le rudiment du pistil avorté sous la forme de 3 fils plus ou moins unis. Quelquefois on observe aussi un développement singulier dans l'intérieur du tube, qui paraît être occasionné par l'avortement du pistil. Une substance épaisse et charnue en remplit la plus grande partie, montant jusqu'à une petite distance de l'ouverture du tube, produisant alors les étamines, et offrant au centre le pistil rudimentaire.

Dans les fleurs femelles, les parties du périgone intérieur sont toujours libres et nullement soudées ensemble. Elles offrent quelquefois vers le haut une tache noire qui paraît être de nature glanduleuse, et, dans ce dernier cas, on voit aussi une pareille tache, mais plus petite, aux lobes du tube de la fleur mâle. Cette structure paraît être en rapport avec une certaine conformation des feuilles; car je n'ai pu remarquer de pareilles taches que dans les espèces à feuilles réticulées.

Les espèces d'Eriocaulons de la série des *radiés* ont ordinairement les parties périgonales intérieures longues, étroites et rapprochées de manière qu'elles semblent former un tube, sans cependant être soudées ensemble, tandisque les parties du périgone intérieur sont à proportion très courtes. L'*Eriocaulon Prescottianum* se rapproche sous ce dernier rapport des formes ordinaires. Cette anomalie, ainsi que la forme radiée des bractées marginales sont les seuls points par lesquels diffèrent ces Eriocaulons des autres, et cette modification ne m'a pas paru assez importante pour justifier la séparation de ce groupe du genre *Eriocaulon*.

Dans les deux espèces vivipares qui se trouvent parmi les Eriocaulons du Brésil, on voit provenir, entre le périgone interne et le pistil, des poils fins qui paraissent avoir quelque analogie avec ces mêmes organes dans quelques Cyperacées.

J'ai encore observé de pareils poils dans les fleurs de l'*Eriocaulon speciosum*; mais il se pourrait bien que dans ce cas-ci ces poils dussent leur origine à l'avortement de l'organe femelle.

Le pistil offre ordinairement ses parties en nombre égal à celui des autres parties de la fleur.

Le style se compose de 2 ou 3 parties plus ou moins soudées par le bas, et libres vers la sommité. Elles se terminent en *stigmates* un peu *grossis* et *arrondis*.

Outre ces parties du style, on voit encore le plus souvent des lanières de diverses longueurs qui, soudées vers le bas, forment souvent une espèce d'étui qui enveloppe pour ainsi dire le style. Ces lanières sont alternes avec les parties du style qu'elles surpassent communément en longueur; elles ne se terminent pas en pointe grossie comme les véritables stigmates. Il paraît qu'on les a confondues avec ces dernières, par conséquent si on lit dans l'ouvrage de MM. Humboldt et Bonpland, que le style de l'*Eriocaulon ensifolium* est tripartite et les parties bifides, je crois que cela se rapporte aux lanières; car il y a quelques espèces chez lesquelles elles sont fendues à leur sommité de manière à former deux branches, comme on peut le voir dans l'*Eriocaulon falcatum*, *Langsdorffii* et *paludosum* *).

On n'observe pas ces organes dans toutes les espèces d'Eriocaulon; il n'y en a quelquefois pas la moindre trace. On ne les voit pas par exemple dans l'*Eriocaulon villosum*, *septangulare*, *setaceum* et *Nepalense;* elles manquent aussi dans plusieurs espèces du Brésil. Dans tous ces cas la forme des parties du pistil s'approche en quelque manière de celle des lanières et elles s'y trouvent quelquefois au nombre de 4 ou 6. Cette dernière circonstance rend un peu difficile la conjecture que l'on peut se former de ces organes. Il paraît cependant que la structure naturelle du pistil est celle où les parties sont au nombre double de celui des loges, de sorte que chaque loge ait 2 fils pistillaires, comme on le voit par exemple dans l'*Eriocaulon flaccidum* **). Dans l'*Eriocaulon septangulare* on trouve indifférement 2, 3 et 4

*) Tab. IX.

**) Tab. IV.

*

parties du pistil, ce qui prouve qu'elles sont très sujettes à avorter. Cette observation pourra servir à expliquer la structure du pistil. Si nous admettons que ces parties, au nombre de 4 à 6, dans la règle sont disposées à avorter dans beaucoup de cas, nous les verrons souvent reduites par ce phénomène au nombre de 2 ou 3; mais l'avortement peut aussi y être partiel, et alors ces mêmes parties, au lieu de disparaître totalement, se transforment en organes accessoires, qui, dans ce cas, prennent l'aspect de lanières.

Je me suis donné beaucoup de peine pour trouver dans la structure de l'ovaire quelque point essentiel, qui pourrait me conduire à reconnaître la véritable nature de ces organes, mais je n'y ai pas réussi. Ces parties extrêmement petites et desséchées depuis long-temps, ne reprennent pas par l'eau un état tel qu'il est nécessaire pour apercevoir avec précision leur structure. Peut-être que l'on réussira mieux sur des fleurs fraîches.

Fruit.

L'ovaire est supère, et à l'état de jeunesse communément de forme oblongue, marqué de 2 ou 3 sillons. Il est composé de 2 ou 3 carpelles soudés entr'eux, qui forment autant de loges. A l'état de maturité, ces loges sont ovales et leur position est alterne avec les parties du périgone intérieur, ou opposée à celles du périgone extérieur. Elles s'ouvrent longitudinalement à la ligne moyenne du dos, (le long de la nervure dorsale), et chacune ne renferme qu'une seule graine, qui est attachée à de petits placentas à l'angle supérieur interne de la loge. Le cordon ombilical est très-court, et perce les tégumens de la graine à une de ses extrémités. L'embryon se trouve à l'autre bout qui est opposé au hile, c'est-à-dire à la partie de la graine qui regarde le bas de la loge. La graine est par conséquent pendante.

Les graines sont très petites, ordinairement de forme elliptique, mais souvent un peu oblique. L'endroit où se trouve l'ombilic, est ordinairement un peu pointu. Leur coloration est le plus souvent un brun rouge, plus ou moins foncé, quelquefois un jaune doré.

Le *spermoderme* paraît un peu ridé par des lignes longitudinales un peu saillantes, qui quelquefois sont traversées par d'autres lignes moins visibles. Ces lignes se font souvent encore mieux remarquer par une espèce de production membraneuse très délicate qui leur est adhérente.

La cavité du spermoderme est toute remplie par un albumen, hors duquel se trouve à l'autre bout de la graine, opposé au hile, l'embryon très petit, et de forme lenticulaire. On le distingue facilement par la couleur plus foncée, que l'on remarque à cet endroit de la graine. Une coupe verticale de celle-ci le fait apercevoir distinctement. Malgré toute la peine que je me suis donnée pour découvrir le vaisseau qui doit mener du hile à l'embryon, je n'ai pas pu réussir à le voir.

CHAPITRE III.

Classification et affinités du genre ERIOCAULON.

Par l'exposition de la structure de l'Eriocaulon, que je viens de donner dans le chapitre précédent, on voit que ce genre de plantes doit appartenir à la famille des *Restiacées*, telle que M. ROB. BROWN l'a proposé dans son Prodrome de la flore de la Nouvelle Hollande.

Parmi les Restiacées le genre Eriocaulon s'approche le plus de *Tonina*. Les fleurs de celle-ci offrent dans toutes les parties exactement la même structure que l'on observe dans les Eriocaulons; mais les capitules de Tonina ne sont pas strictement embriqués en dehors, et ils paraissent être formés par de petits faisceaux de fleurs, dont chacun se distingue par une bractée plus longue que les autres. Cette modification me paraît cependant trop peu importante pour fonder sur elle la séparation de cette plante du genre Eriocaulon.

Les autres genres des Restiacées sont déjà plus éloignés de l'Eriocaulon, et s'en distinguent, tant par le port que par d'autres caractères saillants. Ils sont d'abord tous dioïques, et ont l'inflorescence en épis. L'Eriocaulon se distingue en outre par ses an-

thères biloculaires ovales ou oblongues des genres *Restio*, *Lepyrodia* et *Hypolaena*, qui les ont peltées. *Lyginia* diffère de l'Eriocaulon par les étamines soudées longitudinalement ensemble. *Loxocaria* par un style indivise, et par un ovaire monosperme.

CHAPITRE IV.

Distribution géographique des espèces d'Eriocaulon.

La plupart des espèces d'Eriocaulon croissent dans les régions tropiques de l'un et l'autre hémisphère. Mais elles sont beaucoup plus communes dans l'hémisphère austral, comme on peut en juger par les nombreuses espèces du Brésil, et par celles de la Nouvelle Hollande. Nous ne connaissons pas encore une seule espèce d'Eriocaulon originaire de l'Afrique, quoique l'île de Madagascar nous ait déjà fourni l'*Eriocaulon pubescens*, et celle de Bourbon l'*Eriocaulon repens*.

Les espèces observées en Asie, quoique peu nombreuses, sont à peu près toutes intertropicales. Il n'y a que quelques Eriocaulon de l'Amérique qui se rencontrent assez loin vers le nord. L'*Eriocaulon pellucidum* se trouve même au Canada, et si nous ajoutons à celui-ci l'*Eriocaulon septangulare*, qui croît en Irlande, nous avons l'étendue la plus septentrionale de ces végétaux. Cette dernière espèce d'Eriocaulon est la seule qui ait été observée en Europe.

Des 114 espèces que nous connaissons aujourd'hui, il s'en trouve:

Au Brésil	1
A la Guiane	6
Dans le reste de l'Amérique méridionale . . .	84
En tout dans l'Amérique méridionale	91 espèces.
Dans l'Amérique septentrionale	6
Dans l'île de Madagascar et de Bourbon . . .	2
Aux Indes orientales	4
En Cochinchine	1
Dans l'Austrasie	11
En Europe	1
	116.

Deux espèces de ce nombre paraissent être sporadiques, car il paraît que l'*Eriocaulon repens de Lamarck* vient aussi au Brésil, et que l'*Eriocaulon pellucidum* du Canada n'est pas distinct de l'*Eriocaulon septangulare* de l'Europe.

Les Eriocaulons aiment pour la plupart les endroits marécageux et inondés; quelques uns viennent dans les sables humides, d'autres croissent entre les herbes et les graminées, d'autres enfin habitent des terrains secs et pierreux.

Au Brésil on rencontre souvent les Eriocaulons dans les régions alpines, M. RIEDEL en a beaucoup recueilli dans la chaîne de montagnes dite Serra da Lapa; il en a rencontré sur l'Itacolumi, haute montagne près de Villa ricca dans la Province de Minas Geraës. M. MARTIUS dit avoir trouvé des Eriocaulons sur le sommet même de l'*Itambé*, montagne dont la hauteur est de 5590 pieds *).

CHAPITRE V.

De la division du genre ERIOCAULON et des caractères spécifiques des Espèces.

Dans la disposition des espèces brésiliennes du genre Eriocaulon, j'ai tâché de former des groupes naturels.

Le nombre de 2—4 et de 3—4 étamines m'a paru d'abord un caractère important pour former 2 divisions principales de ce genre.

L'aspect velu ou glabre des capitules est entr'autres un bon caractère pour distinguer des groupes d'Eriocaulons et pour en former 2 sous-divisions. Il y a bien quelques espèces dont les capitules ne sont pas glabres dans le sens rigoureux, mais leur aspect est cependant bien différent de ceux qui sont velues, et on peut les ranger sans inconvenient avec les glabres, auxquelles elles ressemblent.

L'inflorescence en forme d'ombelle distingue d'une manière bien prononcée et constante tout un groupe d'Eriocaulon; mais il n'en est pas de même de l'in-

---

*) Reise in Brasilien, 2 Th. p. 455.

florescence qui présente des ombelles irrégulières, que j'ai nommées pédoncules en faisceau, car celle-ci, quoique très frappante au premier coup d'oeil, va se confondre par des formes intermédiaires avec les pédoncules simples, et ne peuvent par cette raison nullement former un groupe distinct.

Les Eriocaulons qui ont les tiges applaties et divisées à la sommité, se distinguent par cette structure de tous les autres et forment un petit groupe quoique peu nombreux, mais bien caractérisé.

Il en est de même des espèces vivipares, qui en outre offrent dans les fleurs femelles des poils entre le périgone interne et le pistil.

Plusieurs espèces d'Eriocaulon sont fort distinctes par la grandeur des écailles qui forment le dehors des capitules. Elles forment un groupe bien naturel que j'ai cru devoir conserver.

De tous les Eriocaulons les espèces à capitules radiés sont celles qui se distinguent de la manière la plus saillante. Elles forment une section ou un *sous-genre* que j'ai désigné par le nom d'*Eulepis*, qui fait allusion à la singulière et jolie modification des écailles, qu'on remarque dans les espèces de cette série.

Les espèces à feuilles réticulées pourraient, à ce qu'il me semble, former un groupe particulier et assez naturel; car elles offrent en même temps certains rapports dans la structure de leurs fleurs. Mais je n'en connais parmi les espèces du Brésil, que deux qui offrent cette structure, et je n'en ai pu analyser qu'une seule. Il était donc inutile de fonder pour le moment sur cette structure une division; mais on pourra le faire avec avantage, quand on tracera un tableau général de tous les Eriocaulons connus.

Je me suis permis d'établir une division des Eriocaulons sur la grandeur relative des capitules. En faisant cette distinction j'ai bien senti qu'un pareil caractère était trop vague pour pouvoir être employé; mais je l'ai trouvé commode pour séparer provisoirement quelques espèces très remarquables par la grandeur extraordinaire des capitules. On découvrira sans doute avec le temps des formes intermédiaires qui feront alors cesser la distinction.

Quant aux caractères spécifiques, les tiges, les feuilles, les pédoncules et leurs gaînes offrent des modifications assez nombreuses pour fonder sur elles la distinction des espèces, sans qu'on ait besoin de recourir à la structure des fleurs, qui par leur extrême petitesse, présentent de grandes difficultés à cet égard, et qui d'ailleurs n'offrent pas autant de caractères distinctifs qu'il paraît au premier coup d'oeil. J'ai déjà observé dans une autre occasion que le nombre des angles des pédoncules ne peut pas servir pour distinguer les espèces; aussi je n'en ai fait aucun usage.

La forme des capitules ne peut non plus fournir des caractères distinctifs, car elle change avec les diverses périodes de la végétation, de sorte que le capitule qui par exemple est hémisphérique au moment de l'épanouissement des fleurs, devient globuleux ou ovale à l'époque où les fruits commencent à murir.

Je me suis donc borné à tirer les caractères spécifiques des organes ci-dessus cités, tâchant toujours d'en offrir de saillants et de faciles à saisir.

SPECIERUM ERIOCAULI

Brasiliensium Synopsis.

ERIOCAULON.

Character genericus.

Capitulum androgynum. Flosculi unibracteati, bracteis capituli exterioribus involucrantibus, saepissime sterilibus. *Perigonium* duplex, interius corollinum.

Masc. Partes *perigonii exterioris* 2—3 liberae; *interioris* saepissime in tubum connatae. *Stamina* 4—6 libera. Antherae biloculares.

Femin. *Perigonii utriusque* partes liberae. *Styli* 2—4, vel 3—6, plus minus connati, apice liberi et saepissime (si 2 v. 3) cum totidem appendicibus filiformibus alternantes.

Capsula 2—3 locularis; loculis monospermis.

---

§. 1. *Staminibus* 3—6 (*s. partibus perigonii ternariis*).

† *Capitulis piloso-lanatis.*

I. *Umbellata:* caulescentia; pedunculis in umbellam dispositis aequalibus.

1. *E. Maximiliani Schrad.?* caule ramoso dense folioso; foliis caulinis basi vaginantibus patentibus lanceolato-acuminatis canaliculatis junioribus ciliatis; pedunculis pubescentibus; vaginis glabris. *Tab. I. c.* descript.

E. Maximiliani *Schrad.* Roem. et Schult. mantiss. in Vol. II. pag. 470. N°. 20. b. ?

Obs. Planta nostra recedit a descriptione cel. SCHRADER, 1) staturâ altiore; 2) pedunculis longioribus, 3—4 pollicaribus, qui 2 fere pollices longi dicuntur in speciminibus a SCHRADERO visis; 3) squamis capitulo multo (nec paullo) brevioribus.

Hab. in arenosis et lapidosis Serra Lenheira et de St. Joze.

Floret Junio. ♃.

2. *E. ramosum Wikstr.*: caule ramoso dense folioso; foliis amplexicaulibus patentibus lanceolato-acuminatis canaliculatis ciliatis; vaginis bifidis pedunculisque pilosis.

Wikstroem K. V. A. Handl. 1820. p. 76. tab. 3.

Habitat in Brasilia. ♃.

Obs. Differt ab *E. Maximiliani*, cui simile: 1) staturâ multo minore; 2) pedunculis multo brevioribus, pilosis (nec pubescentibus); 3) vaginis pilosis bifidis (nec glabris oblique fissis).

3. *E. affine*: caulibus caespitosis ramosis dense foliosis; foliis caulinis amplexicaulibus patentibus, lanceolato-acuminatis canaliculatis ciliatis; pedunculis subpubescentibus; vaginis glabris bifidis. *Tab. XXXII.*

Hab. in Brasiliae arenosis. ♃.

Obs. Differt ab *E. ramoso*, ad quod proxime accedit: staturâ humiliore; caulibus caespitosis; pedunculis subpubescentibus (nec pilosis); vaginis glabris. Radix fasciculata insignis.

4. *E. divaricatum*: caule ramoso folioso, inferne denudato oblique striato; ramis divaricatis; foliis amplexicaulibus lanceolato-acuminatis, canaliculatis recurvis; pedunculis pilosis; vaginis glabris apice pilosiusculis. *Tab. III.*

Hab. in arenosis Serra da Lapa.

Floret Novembri. ♃.

5. *E. rigidum*: caule ramoso folioso, inferne denudato oblique striato; ramis brevibus erectis; foliis amplexicaulibus erectis lanceolato-acuminatis planiusculis; pedunculis subpubescentibus; vaginis glabris. *Tab. XXI.*

Hab. in montibus altis locis subhumidis prope *Tejuco*, districtus adamantum in provincia Minas Geraës.

Flor. Decembri. ♃.

Obs. Differt ab *E. divaricato:* caule strictiore, ramis brevioribus non divaricatis; foliis planiusculis, pedunculis subpubescentibus (nec pilosis) vaginis glabris apice non pilosiusculis.

6. *E. polyanthum:* caulibus caespitosis simplicibus; foliis radicalibus e basi perlatâ longe-lanceolatis obtusis; caulinis minoribus amplexicaulibus adpressis planis; pedunculis pilosis; vaginis bifidis glabris. *Tab. II.*

Hab. in pratis humidis glareosis Serra da Lapa.

Floret Novembri. ♃.

Obs. Differt ab *E. Maximiliani:* caulibus caespitosis simplicibus; foliis radicalibus lato-lanceolatis (nec lineari-lanceolatis), caulinis adpressis planis (nec patentibus canaliculatis); pedunculis duplo brevioribus pilosis; vaginis bifidis.

7. *E. brachypus:* caulibus caespitosis simplicibus foliosis; foliis radicalibus linearibus pilosis; pedunculis pubescentibus vaginis glabriusculis. *Tab. VI.*

Hab. in arenosis prope Cachoeira.

Floret Decembri. ☉.

8. *E. ciliatum:* caulibus simplicibus; foliis radicalibus e basi latâ lanceolato-acuminatis ciliatis; pedunculis facile deciduis subpubescentibus, vaginis bifidis. *Tab. V.*

Habitat et floret cum praecedente.

9. *E. Bahiense:* caulibus caespitosis simplicibus; foliis radicalibus lanceolato-acuminatis obtusiusculis pilosis ciliatis; pedunculis persistentibus pilosis; vaginis bifidis glabriusculis. *Tab. XX.*

Habitat prope Rios dos Contos, provinciae Bahiensis.

Floret Februario. ♃.

Differt à praecedente praeter notas allatas:

1) habitu diverso; 2) foliis angustioribus pilosis, minus dense ciliatis; 3) pedunculis longioribus, crassioribus, pilosis, non deciduis; 4) capitulis triplo majoribus.

II. *Pedunculis fasciculatis inaequalibus v. solitariis.*

a) Capitulis minoribus.

* *Caulescentia.*

10. *E. incanum:* caule ascendente ramoso folioso; foliis amplexicaulibus adpressis lanceolatis villosis; pedunculis fasciculatis longissimis sericeo-incanis; vaginis villosis bifidis. *Tab. LXI.*

Habitat in arenosis prope Tejuco.

Flor. Decembri. ♃.

11. *E. canescens:* caule erecto subramoso folioso; foliis caulinis amplexicaulibus adpressis lanceolato-acuminatis mucronulatis canescentibus; pedunculis fasciculatis lanuginosis; vaginis pubescentibus. *Tab. L.*

Habitat in saxosis prope Tejuco.

Flor. Decembri. ♃.

Obs. Differt a praecedente: habitu diverso, pedunculis brevioribus tenuioribus et tenuiter lanuginosis (nec sericeo-incanis); vaginis brevioribus oblique fissis pubescentibus (nec bifidis villosis) capitulis denique florentibus cylindricis (nec sphaericis).

12. *E. repens Lam.?* caule decumbente ramoso; foliis amplexicaulibus linearibus subcanaliculatis basi pilosis recurvis; pedunculis axillaribus subfasciculatis vaginisque pubescentibus. *Tab. VII.*

Lamarck Encyclop. méthod. T. III. p. 264. Tab. 50. fig. 2.?

Habitat in arenosis Serra da Piedade.

Floret Septembri.

Obs. Propter nimis brevem cel. LAMARCKII descriptionem difficiliter determinanda species. Nostra planta bene convenit et cum icone et cum descriptione citata, sed recedit pedunculis et vaginis brevioribus. Priores in specimine Lamarckiano dicuntur 5 — 6 pollicares et vagina pollicem longa; haec organa autem dimidium breviora in speciminibus Brasiliensibus.

13. *E. fasciculatum Lam.:* caule erecto simplici folioso; foliis patentibus lineari-lanceolatis acutis pilosis; pedunculis terminalibus fasciculatis vaginisque pilosis.

E. fasciculatum Lam. Encyclop. méth. Tom. III. p. 276. T. 50. fig. 3.

Habitat in Provinciâ Bahiâ, ubi legit cel. RIEDEL.

Obs. Specimina Brasiliensia exacte conveniunt cum Surinamensibus a D. D. ROLAND et WEIGELT lectis.

14. *E. fastigiatum:* caule brevi simplici folioso, foliis caulinis lanceolato-longissime acuminatis, basi subciliatis, pubescentibus; pedunculis fastigiatis longissimis vaginisque pubescentibus. *Tab. LX.*

Habitat in petrosis Serra de St. Joze.

Flor. Junio.

15. *E. tortile:* caule brevi subramoso folioso; foliis caulinis lineari-lanceolatis pilosis; pedunculis fasciculatis elongatis gracilibus spiraliter tortis glabris; vaginis pilosis *XLIX.*

Habitat in arenosis humidis prope Ilheos provinciae Bahiae, ubi legit cel. RIEDEL.

Floret . . .

16. *E. bryoides:* exiguum; cauliculis confertis ramosis dense foliosis; foliis linearibus acuminatis pilosiusculis; pedunculis terminalibus fasciculatis pubescentibus; vaginis bifidis. *Tab. X.*

E. bryoïdes Riedel MS.

Habitat in rupibus, locis umbrosis Serra da Lapa.

Floret Novembri. ⊙

** *Subacaulia.*

17. *E. geniculatum:* subacaule; foliis radicalibus linearibus obtusiusculis pilosis ciliatis; cauliculis subhorizontalibus foliosis; pedunculis adpresse pilosis; vaginis bifidis villosis. *Tab. XXXI.*

Habitat in glareosis subhumidis Serra da Lapa.

Floret Decembri.

18. *E. glareosum:* subacaule; foliis radicalibus caespitosis patenti-diffusis brevissimis linearibus obtusis villosis; cauliculis subhorizontalibus foliosis; pedunculis retrorsum pubescentibus; vaginis foliis longioribus bifidis pilosis. *Tab. XXV.*

Habitat in gloreosis siccis Serra da Lapa.

Floret Novembri.

Obs. Praecedenti affine, a quo distinguendum: staturâ humiliore; foliis radicalibus vaginis brevioribus patenti-diffusis et capitulorum squamis exterioribus ovato-acutis, quae valde obtusae in *E. geniculato.*

19. *E. saxatile:* subacaule; foliis linearibus acuminatis pilosis, tenuiter ciliatis; pedunculis filiformibus parce pilosis; vaginis pilosis. *Tab. XXX.*

Habitat in saxosis umbrosis Serra de St. Joze.

Floret Junio. ☉

20. *E. capillare:* subacaule; foliis linearibus acuminatis mucronulatis pubescentibus glaucis; pedunculis capillaribus subpubescentibus; vaginis glabris subintegris apice piloso-barbatis. *Tab. XLVIII.*

Habitat in umbrosis prope Aguas quentes.

Floret Septembri. ☉

Obs. Praecedenti valde affine, a quo optime distinguendum: vaginis glabris subintegris apice piloso-barbatis (nec pilosis et apice oblique fissis).

21. *E. plantagineum:* subacaule; foliis lineari-lanceolatis acutis, subtus albicantibus; pedunculis vaginisque albicantibus glabris. *Tab. XVII.*

Habitat in umbrosis saxosis montis Itacolumi.

Floret Augusto. ♃.

22. *E. paludosum:* subacaule; foliis confertis linearibus basi lanatis, ceterum glabris; pedunculis caespitosis filiformibus elongatis; vaginis ad fissuram pilosis. *Tab. IX.*

Habitat in paludosis montis Itacolumi.

Floret Augusto. ♃.

Obs. Omnes sub N°. 20, 21, 22 et 23 recensitae species sunt modo acaules, modo evidenter caulescentes, ut ex copiosis, quae coram habeo speciminibus perspicio.

*** *Acaulia.*

23. *E. blepharophoron:* foliis pedunculos subaequantibus confertis lineari-lanceolatis acutis dense ciliatis; pedunculis caespitosis pubescentibus; vaginis brevissimis apice barbatis. *Tab. XVI.*

Habitat in paludibus Serra da Lapa.

Flor. Novembri.

24. *E. lingulatum:* pusillum; foliis pedunculos subaequantibus confertis lingulatis obtusis, parce ciliatis; pedunculis glabriusculis; vaginâ glabrâ albidâ. *Tab. XII.*

Habitat in glareosis Serra da Lapa.

Floret Novembri.

Obs. Affine praecedenti, a quo differt, praeter notas in characterem receptas, staturâ humiliore; foliis ad insertionem nudis (nec piloso-lanatis) et margine pilis longis distantibus ciliatis, qui in *E. blepharophoro* breves et densi.

25. *E. homomallum:* acaule: foliis caespitosis linearibus obtusiusculis piloso-incanis subhomomallis; pedunculo solitario incano; vaginâ apice barbatâ. *Tab. XXXIX.*

Habitat in glareosis Serra da Lapa.

Flor. Novembri. ♃.

26. *E. mucronatum:* acaule, foliis brevibus, dense confertis linearibus mucronatis apice subincurvis parce pilosis; pedunculo subsolitario piloso; vaginâ folia subaequante pilosâ apice bifidâ. *Tab. XIX.*

Habitat in humidis glareosis Meia da Serra da Lapa.

Floret Januario.

27. *E. curvifolium:* acaule: foliis dense confertis linearibus mucronulatis curvatis longe-pilosis; pedunculis fasciculatis pubescentibus; vaginis brevibus pilosis. *Tab. XXIV.*

Habitat in arenosis et glareosis Meia da Serra da Lapa.

Floret Januario.

Obs. Distinguitur a praecedente, cui affine: staturâ altiore (*E. mucronatum* est plantula bipollicaris); foliis pilosioribus, pedunculis longioribus, capitulisque majoribus.

28. *E. lanuginosum:* acaule: foliis dense caespitosis brevibus linearibus incurvis piloso-lanuginosis; pedunculis fasciculatis piloso-canescentibus; vaginis brevibus apice laciniatis. *Tab. XIX.*

Habitat in pratis humidis paludosisque Serra da Lapa.

Floret Novembri.

29. *E. exiguum:* acaule: foliis linearibus acutis glabris; pedunculis fasciculatis pubescentibus; vaginis folia adaequantibus glabris. *Tab. LIX.*

Habitat in graminosis humidis prope Ilheos, provinciae Bahiensis, et in provincia *Minas Geraës.*

Floret . . . . . ☉

30. *E. Fischerianum:* acaule: foliis caespitosis vaginâ brevioribus, linearibus acutis glabris; pedunculo solitario pubescente; vagina apice trifida. *Tab. LIX.*

Habitat in provincia *Minas Geraës.*

Floret . . . . . ☉

Mecum benevole communicavit cel. D. Fischer.

31. *E. gramineum:* acaule; foliis caespitosis linearibus acutis apice subincurvis parce pilosis; pedunculis caespitosis tenuibus pilosis, vaginis brevibus glabris. *T. XXIV.*

Hab. in pratis graminosis Serra da Lapa.

Floret Novembri. ☉

32. *E. calocephalum:* acaule: foliis caespitosis vaginas subaequantibus, linearibus submucronatis superne pilosis; pedunculis caespitosis rigidis elongatis pilosiusculis; vaginis pilosis bifidis. *Tab. XLVII.*

Habitat in pratis humidis Serra da Lapa.

Floret Novembri.

33. *E. caespitosum Wikstr.:* acaule: foliis caespitosis lineari-lanceolatis obtusiusculis ciliatis; pedunculis caespitosis pubescentibus; vaginis foliis sublongioribus, pubescentibus apice lacinulatis.

Wikström K. Vet. Acad. Handl. 1820. p. 78. tab. 4.

Habitat in Brasilia, unde misit cel. LANGSDORFF.

34. *E. crassiscapum:* acaule; foliis vaginâ brevioribus lanceolato-acuminatis reticulatis glabris; pedunculo crassiusculo fistuloso glabro; vaginâ laxâ bifidâ. *T. XLIV.*

Habitat in paludibus inter as Prados et Barbacêna.

Floret Junio.

35. *E. chrysanthum:* acaule: foliis vaginâ brevioribus linearibus acuminatis subpubescentibus; pedunculo solitario pubescente; vaginâ oblique fissâ apice lacinulatâ. *Tab. XLIII.*

Habit. prope Rio-Janeiro.

Flor. Decembri. ⊙

Ex herbario D. PRESCOTT, cui cel. LINDLEY.

36. *E. pubigerum:* acaule; foliis lineari-lanceolatis acutis pubescentibus; pedunculis gracilibus pubescentibns; vaginis apice piloso-barbatis. *Tab. XLII.*

Habitat in Brasilia.

Floret . . . . .

37. *E. flavescens:* acaule; pubescens; foliis lineari-lanceolatis subfalcatis nitentibus; pedunculis caespitosis; vaginis insignibus apice lacinulatis. *Tab. XXXV.*

Habitat in humidis montis Itacolumi.

Floret Augusto.

Obs. Species longitudine vaginarum insignis et facilè distinguenda.

38. *E. planifolium*: acaule: foliis pedunculos subaequantibus lato lineari-lanceolatis acuminatis glabris, glaucescenti-nitentibus; pedunculis compressis striatis glabris; vaginis truncatis. *Tab. LVIII.*

Habitat in umbrosis humidiusculis montis Itacolumi.

Flor. Augusto. ♃.

Obs. Proximum *E. compresso Lam.* et fortasse non diversum; sed propter incompletum Lamarckii specimen et nimis brevem hujus descriptionem, extricatu difficile. Apud cel. LAMARCK squamae capitula involucrantes *argenteae*, quae autem fuscescentes in nostris speciminibus.

b) CORYMBOSA: *pedunculis compressis apice divisis; ramulis capituliferis.*

39. *E. corymbosum:* acaule; foliis caespitosis, lineari-lanceolato-acuminatis, ciliatis; pedunculis glabris; vaginis basi lanatis integris. *Tab. XVIII.*

Habitat in arenosis Serra de St. Joze.

Floret Junio.

40. *E. melaleucum:* caulescens; foliis caulinis amplexicaulibus lineari-lanceolatis longe acuminatis, basi ciliatis; pedunculis glabris; vaginis glabris subbifidis. *Tab. XXIII.*

Habitat in Provincia Minas Geraës.

Floret . . . . .

Obs. Praecedenti valde affine, a quo optime distinguendum: 1) praesentiâ caulis 1 — 2 pollicaris; 2) foliis acutioribus, pilis longis parcis *inferne* ciliatis, qui in *E. corymboso* breviores, densiores totum folii marginem occupant; 3) pedunculis angustioribus et apice pluries divisis.

41. *E. tuberosum:* acaule; rhizomate tuberoso; foliis caespitosis erectis lineari-lanceolato-acuminatis; pubescentibus; pedunculis pubescentibus, ad apicem canescentibus; vaginis bifidis. *Tab. XXII.*

Habitat in Serra da Lapa.

Floret Novembri.

Obs. Antecedentibus equidem valde affinis species.
Distinguenda: 1) rhizomnate crasso tuberoso; 2) foliis basi glabris (nec lanatis) pubescentibus (nec pilosis nec ciliatis); 3) pedunculis apice canescentibus; 4) vaginis bifidis.

c) Capitulis majoribus: dimensionem pisi majoris superantibus.

42. *E. Riedelianum:* acaule; pilosum; foliis caespitosis pedunculos subaequantibus erectis lineari-lanceolatis acuminatis canescentibus ciliatis; pedunculis caespitosis incanis. *Tab. XXXIV.*

Habitat in arenosis humidis prope Marahú provinciae Bahiae, ubi legit et benevole mecum communicavit D. Riedel.

Flor. . . . . . ♃.

43. *E. elongatum:* acaule; pubescens; foliis erectis linearibus obtusiusculis; pedunculis longissimis; vaginis demum glabriusculis. *Tab. XLI.*

Habitat in arenosis saxosisque Serra Lenheira prope St. Juão. ♃.

Flor. Junio. ♃.

44. *E. macrocephalum:* acaule; pubescens; foliis caespitosis vaginis brevioribus erectis lanceolato-obtusis; pedunculis caespitosis longissimis subincanis; vaginis bifidis: laciniis obtusiusculis. *Tab XXXIII.*

Habitat in pratis humidis Serra da Lapa et Serra da Corassa.

Flor. Novembri, Januario.

Obs. Praecedenti speciei et *E. gnaphaloidi Michx.* affine. A priori distinguendum: 1) foliis brevioribus latioribus et obtusioribus; 2) vaginis foliis duplo longioribus bifidis (nec oblique fissis). Alterum differt: foliis subulato-ensiformibus.

E. decangulare H. et B. equidem affinis species.

45. *E. falcatum:* acaule; foliis caespitosis vaginis brevioribus lineari-lanceolatis falcatis pubescentibus; pedunculis caespitosis vaginisque pubescentibus. *T. LVII.*

Habitat in humidis Serra da Lapa.

Flor. Novembri.

d) *SQUAMOSA: squamis capitulorum insignibus.*

46. *E. elichrysoides:* acaule: foliis caespitosis erectis, e basi latâ lanceolato-acuminatis obtusis glabris reticulatis; pedunculis glabris; vaginis laxis obtusis. *Tab. XXVII.*

Habitat in paludosis ad flumen Rio Pardo.

Flor. Septembri.

47. *E. latifolium:* acaule; pubescens; foliis erectis pedunculos subaeqnantibus lato-lanceolatis acuminatis; pedunculis caespitosis; vaginis bifidis. *Tab. LXIV.*

Habitat in glareosis siccis Serra da Lapa.

Floret Novembri.

48. *E. argenteum:* acaule; foliis erectis e basi latâ lanceolato-acuminatis, acutis pedunculisque sericeo-argenteis; vaginis oblique fissis obtusis. *Tab. LII.*

Habitat et floret cum praecedente, cui affine.

49. *E. elatum:* acaule: foliis erectis longissimis, lanceolato-longe-acuminatis pilosis basique ciliatis, subtus argenteis; pedunculis caespitosis pubescentibus; vaginis pilosis. *Tab. LXIII.*

Habiat in rupibus Serra da Lapa.

Floret Novembri.

50. *E. macrorhizon:* acaule, rhizomate crasso; foliis linearibus pilosis subtus canescentibus; pedunculis piloso-canis; vaginis pilosis. *Tab. XI.*

Habitat in glareosis Serra da Lapa.

Floret Novembri.

Obs. In speciebus sub. N°. 48 — 51 squammae capitulorum involucrantes *reflexae.*

51. *E. piliferum:* acaule; rhizomate crasso; foliis linearibus pubescentibus margine pilosis; pedunculis pubescentibus; vaginis pilosis apice obtusis et piloso-barbatis. *Tab. XII.*

Habitat et floret cum praecedente.

Obs. Characteribus datis facile ab antecedente, cui affine, distinguitur. Squamae capituli involucrantes *erectae.*

52. *E. plumosum:* acaule; foliis vaginis brevioribus erectis lanceolato-acuminatis obtusis subglabris; pedunculis vaginisque pilosis. *Tab. LXII.*

Habitat in saxosis Serra da Lapa.

Floret Novembri.

Obs. Squamae capituli extus atrofuscae, intus albo-plumosae.

53. *E. Langsdorffii:* caulescens; caule simplici folioso; foliis caulinis vaginantibus, lanceolato-acuminatis, ciliatis; pedunculo axillari solitario pilosiusculo; vaginâ pilosâ. *Tab. LI.*

Habitat in umbrosis montis Itacolumi.

Flor. Augusto.

e) PROLIFERA.

54. *E. viviparum:* acaule; foliis radicalibus caespitosis acutis supra sparse pilosis, subtus glabris; pedunculis vaginisque pilosis. *Tab. XXVIII.*

Habitat in umbrosis subhumidis Serra da Piedade.

Floret Septembri.

55. *E. proliferum:* acaule: foliis radicalibus caespitosis vaginas subaequantibus, linearibus mucronatis pilosis; pedunculis albo-lanatis; vaginis pilosis bifidis. *Tab. XXVIII.*

Habitat in jugis montium St. Joze, locis arenosis graminosis.

Floret Junio.

†† *Capitulis glabriusculis.*

56. *E. hirsutum Wikstr.:* acaule; foliis caespitosis lineari-ensiformibus (lateribus compressis) hirsutis ciliatis; pedunculis caespitosis pubescentibus; vaginis pilosis bifidis.

Wikstr. l. c. p. 79. tab. 4.

Habitat in Brasilia.

57. *E. umbellatum Lam.:* caulescens: caule erecto simplici nudo; foliis radicalibus confertis linearibus mucronatis hirsutis; pedunculis fasciculatis piloso-incanis; vaginis pilosis.

Lamarck Encyclop. méth. III p. 277 *t.* 50 *fig.* 4.

Habitat in paludibus ad ripas fluminis Rio Pardo.

Floret Augusto.

58. *E. verticillatum:* caulescens; caule erecto simplici folioso; foliis radicalibus confertis linearibus acutis pubescentibus; caulinis dense verticillatis; pedunculis fasciculatis; vaginis glabris. *Tab. VIII.*

Habitat in arenosis humidis Serra da Lapa.

Flor. Novembri.

59. *E. splendens:* caulescens; caule erecto simplici folioso; foliis caulinis lanceolatis pubescentibus, pedunculis fasciculatis vaginisque pubescentibus. *Tab. LXVI.*

Habitat in humidis graminosis inter Barbacenam et St. Juão.

Floret Junio.

Variat: 1) staturâ humiliore ($\frac{1}{3}$ praecedentis)

2) caule brevissimo, subnullo, pedunculo solitario.

60. *E. nitens:* acaule: foliis radicalibus caespitosis vaginis brevioribus linearibus acutis subpilosis; pedunculis caespitosis glabris; vaginis pilosis. *Tab. LV.*

Habitat in paludosis arenosis exsiccatis prope os Prados.

Floret Junio.

61. *E. circinnatum:* acaule: pusillum; foliis radicalibus pedunculum subaequantibus linearibus pubescentibus circinatis; pedunculis subsolitariis pubescentibus; vaginâ oblique fissâ. *Tab. XXXIX.*

Habitat in lapidosis glareosis Serra da Lapa.

Floret Novembri.

62. *E. crassifolium:* acaule, pusillum, foliis radicalibus pedunculos subaequantibus linearibus obtusis mucronulatis crassis, margine sparse pilosis; pedunculis glabris, vaginis trifidis. *Tab. XXIX.*

Habitat in glareosis Meia da Serra da Lapa.

Floret Januario.

63. *E. cuyabense:* pusillum, caulescens; cauliculis subcaespitosis simplicibus foliosis; foliis caulinis linearibus glabris; pedunculis fasciculatis foliis involucrantibus brevioribus; vaginis nullis. *Tab. X.*

Habitat in graminosis humidis prope Cuyabá, provinciae Mattogrosso

Floret Aprili. ⊙

64. *E. pusillum:* acaule; foliis caespitosis vaginis brevioribus linearibus subcanaliculatis curvatis; pedunculis caespitosis pubescentibus; vaginis laxiusculis. *Tab. XXIX.*

Habitat in Brasilia.

65. *E. filiforme:* acaule; foliis vaginis brevioribus, confertis patenti-diffusis lanceolatis acutis pubescentibus; pedunculis longissimis filiformibus spiraliter tortis glabris; vaginis pilosis. *Tab. LIII.*

Habitat in paludibus Serra da Lapa.

Floret Novembri.

Obs. Variat pedunculis vix pollicem excedentibus.

66. *E. spirale:* acaule; foliis vaginas subaequantibus confertis patenti-diffusis, linearibus obtusis sparse pilosis; pedunculis caespitosis filiformibus spiraliter tortis glabris; vaginis pilosis trifidis. *Tab. XLV.*

Habitat in glareosis subhumidis Serra da Lapa.

Floret Decembri.

Obs. Affine videtur *E. Freyreisii Thunbg.*, sed folia non setacea.

67. *E. gracile:* acaule; foliis vaginas subaequantibus confertis linearibus acutis pilosiusculis; pedunculis caespitosis filiformibus pubescentibus; vaginis pilosiusculis. *Tab. XLVI.*

Habitat in umbrosis siccis montis Itacolumi.

Floret Augusto. ⊙

68. *E. xeranthemoides:* acaule; foliis elongatis linearibus canaliculatis mucronatis supra glabris, subtus pubescentibus; pedunculo solitario elongato subpubescente; vaginis pubescentibus bifidis. *Tab. XL.*

Habitat locis paludosis in Serra da Chapada.

Floret Septembri.

Obs. Squamae capitulum involucrantes obtusae, flavae.

69. *E. centauroides:* acaule; foliis elongatis basi dilatatis ciliatisque, linearibus obtusiusculis; pedunculo solitario puberulo; vaginâ oblique fissâ. *Tab. LXV.*

Habitat in pratis humidis paludosis Serra da Lapa.

Obs. Squamae capitulum involucrantes numerosae, obtusae, flavicantes, margine albo-scariosae.

Praecedenti affinis species, sed notis indicatis faciliter distinguenda.

EULEPIS: *squamis capitulorum marginalibus radiantibus.*

70. *E. Prescottianum:* acaule; foliis lanceolato-acuminatis, glabriusculis; pedunculo solitario vaginâque pubescente. *Tab. XXXVI.*

Habitat prope Rio de Janeiro.

(Ex herbario amiciss. D. PRESCOTT, cui cel. LINDLEY).

71. *E. elegans:* acaule; foliis caespitosis vaginas vix superantibus, basi fusco-lanatis, setaceis pubescentibus; pedunculis caespitosis tenuibus glabris; vaginis pubescentibus. *Tab. XIII.*

Habitat in arenosis subhumidis Serra da Lapa. — *Floret* Novembri.

72. *E. niveum:* acaule; foliis caespitosis, vaginas subaequantibus setaceis pilosis glaucescentibus; pedunculis caespitosis tenuibus subglabris; vaginis pilosiusculis. *Tab. XXXVII.*

Habitat in arenosis siccis Serra de St. Joze, Provinciae Para.

Flor. Junio.

Obs. Praecedenti affine, a quo differt: 1) staturâ minore; 2) foliis glaucis, basi non lanatis.

73. *E. aciphyllum:* caulescens; caule brevissimo ramuloso; foliis caespitosis vaginis brevioribus lanceolato-linearibus acutis canaliculatis; pedunculis caespitosis vaginisque pubescentibus. *Tab. XXXVIII.*

Habitat in pratis sabulosis humidis Serra da Lapa.

Floret Novembri.

74. *E. nitidum:* acaule; foliis caespitosis vaginis brevioribus patenti-diffusis, linearibus obtusis glabris; pedunculis caespitosis vaginisque adpresse pilosiusculis. *T. XIV.*

Habitat in Brasiliâ.

75. *E. anthemiflorum:* caulescens; caule brevi simplici nudo; foliis radicalibus confertis brevissimis linearibus obtusiusculis; pedunculo terminali subsolitario vaginâque pubescente. *Tab. XV.*

Habitat in paludosis Serra da Lapa.

Floret Novembri.

§. 2. *Staminibus duobus* (sive partibus perigonii binariis).

76. *E. speciosum:* caulescens; caule simplici folioso; foliis lanceolato-acuminatis ciliatis planis; pedunculis fasciculatis subpubescentibus; vaginis laxis trifidis. *Tab. LXVII.*

Habitat in Provincia St. Paulo.

Floret . . . .

77. *E. trichophyllum:* caulescens; caule subramoso folioso; foliis caulinis amplexicaulibus lanceolato-acuminatis mucronatis subcarinatis, piloso-canescentibus; pedunculis terminalibus vaginisque pilosis. *Tab. LIV.*

Habitat in Brasilia.

78. *E. flaccidum:* caulescens; caule flaccido ramoso folioso; foliis caulinis amplexicaulibus, lineari-acuminatis mucronatis recurvatis pilosis; pedunculis fasciculatis filiformibus parce pilosis; vaginis glabris. *Tab. IV.*

Habitat in arenosis subhumidis Serra da Lapa.

Floret Novembri.

Obs. Valde affine videtur *E. bifido Schrad.* sed recedit: caule non caespitoso nec bifido; staturâque multo altiore.

Appendix; species incertae sedis propter flores incompletos non satis evolutos.

79. *E. amoenum:* caulescens; caule erecto simplici folioso; foliis amplexicaulibus lato-lanceolatis acuminatis adpressis glabris; pedunculis fasciculatis glabris; vaginis caulescentibus bifidis. *Tab. LVI.*

Habitat in glareosis graminosis prope Capanema.

Floret Februario. ♃.

80. *E. sparganioides:* acaule; foliis erectis lineari-lanceolatis obtusiusculis reticulatis glabris; pedunculis ad apicem subpubescentibus; vaginis elongatis glabris. *Tab. LXVIII.*

Habitat in Brasiliâ.

SPECIERUM DESCRIPTIONES.

Eriocaulon Maximiliani Schrad.? *Tab. I.*

Caule ramoso dense folioso; foliis caulinis basi vaginantibus patentibus lanceolato-acuminatis canaliculatis junioribus ciliatis; pedunculis (umbellatis) pubescentibus; vaginis glabris.

Radix non visa.

Caulis erectus, teres, striatus, ramosus, dense foliosus, ad insertionem foliorum pilosus: pilis dense adpressis albis; 2—4 pollices longus, quatuor circiter lineas crassus.

Rami erecti, simplices.

Folia spiraliter posita, approximata, basi dilatatâ caulem amplectentia et vaginantia, patentia, squarrosa, lanceolato-acuminata, supra canaliculata, subtus convexa, mucronata, subpungentia; juniora pilosiuscula margineque pilis albis ciliata, demum glabriuscula, $2\frac{1}{2}$—3 pollices longa, basi dimidium fere pollicem lata.

Pedunculi terminales, erecti, umbellati, obscure tetragoni, pubescentes, numerosissimi, usque ad 300, aequales, 3—4 pollices longi.

Vaginae longitudinaliter striatae, glabrae, apice oblique fissae, membranaceae, albicantes.

Capitula in apice pedunculi solitaria, florifera subglobosa, albo-lanata, magnitudine seminis piperis nigri.

Squamae exteriores involucrantes, imbricatae, breves, ovato-oblongae, fuscae, margine albidae, ciliatae, steriles.

Bracteae oblongae, concavae, acuminatae, nervo medio tenuissimo percursae, fuscescentes, ad apicem pilosae: pilis brevibus, albis, sub lente tuberculosis, opacis.

Receptaculum pilosum.

Flores masculi et feminei mixti.

Flor. mascul. pedicellati.

Perigon. exterius ex tribus partibus liberis formatum. Partes ovatae, acutae, concavae, nervo medio tenui vix perceptibili notatae, apice pilosae, fuscescentes. Pili ut in bracteis.

Perigon. interius corollinum, album, texturae tenerrimae, in tubum obconicum concretum, apice trilobum; lobulis acutis et cum partibus perigonii exterioris alternantibus.

Stamina tria, receptaculo affixa, ante tubi lobulos posita, exserta. *Filamenta* erecta, filiformia, glabra, albida. *Antherae* oblongae, biloculares, oscillantes, flavae. Rudimentum pistilli abortivi.

Flor. femin. Partes *perigonii exterioris* oblongae, acutae, concaviusculae, nervo medio vix conspicuo percursae, margine pilosae: pilis ut in floribus masculis.

Partes *perigonii interioris* tres, liberae, corollinae, ovatae, basi angustiores, apice acutae, planiusculae, albidae, margine pilis longis, acutis, transparentibus obsitae.

Ovarium ovatum, trigonum, glabrum.

Styli tres, basi concreti, apice liberi, erecti, perigonium interius subaequantes. *Stigmata* obtusa. *Appendices* tres, filiformes cum stylis alternantes illisque longiores.

Capsula trilocularis; loculis in medio dorsi longitudinaliter dehiscentibus, monospermis.

Semina ovata, lineis longitudinalibus transversalibusque rugulosa, purpurascentia.

Explic. Tab. I. 1) Squamae capituli exterior aucta. 2) Flos masculus auctus. 3) Idem verticaliter sectus, evolutionem substantiae carnosae magnam tubi partem implentem offerens, cum rudimento pistilli abortivi. 4) Pilus valde auctus 5) Flos femineus auctus. 6) Idem sine perigonio interiore. 7) Pistillum magis auctum cum loculo anteriore aperto. 8) Semen auctum.

Eriocaulon polyanthum. Tab. II.

Caulibus caespitosis simplicibus; foliis radicalibus e basi perlatâ longe-lanceolatis obtusis; caulinis minoribus amplexicaulibus adpressis, planis; pedunculis (umbellatis) pilosis; vaginis bifidis glabris.

Radix . . . .

Caules caespitosi, erecti, teretes, simplices, foliosi, ad insertiones foliorum pilis albis longiusculis adpressis dense vestiti, ceterum glabri, striati, pedem circiter longi, et tres fere lineas in diametro crassi, fuscescentes.

Folia radicalia e basi valde latâ longe acuminata, obtusa, striata, superne pilosiuscula, subtus glabra, planiuscula, 4 circiter pollices longa, pollicem basi lata, sursum sensim angustiora et versus apicem duas lineas fere lata, crassiuscula et ut e siccis videtur, pallide viridia.

Caulina radicalibus multo minora amplexicaulia adpressa, remota, lanceolata, acutiuscula, superne subpilosa, subtus glabra, striata, plana, pollicem circiter longa et 4 lineas basi lata.

Pedunculi terminales, dense umbellati, erecti, tetragoni, pilis longis distantibus obsiti, numerosissimi, 300 et plures, aequales, sesquipollicem longi.

Vaginae angustae, bifidae, glabrae, striatae, 4 lin-longae, membranaceae, lutescentes.

Capitula in apice pedunculorum solitaria, florifera hemisphaerica, albo-lanata, parvula, semine piperis nigri minora.

Squamae exteriores involucrantes, imbricatae, obovatae, margine pilosae, fusco-nitentes, steriles.

Bracteae oblongae, obtusae, concavae, apice lanato-pilosae: pilis brevibus, opacis, sub lente tuberculosis, albis.

Receptaculum pilosum.

Flores mascul. in ambitu, pedicellati.

Perigonium exterius ex tribus partibus liberis formatum. Partes obovatae, basi attenuatae, obtusae, concavae, nervo medio percursae, ad apicem pilis brevibus crassis albis vestitae, tubo paulo breviores, subfuscescentes.

Perigonium interius in tubum turbinatum coalitum, apice parum dilatatum, trifidum, lobulis latiusculis, acutis, glabris; corollinum, albidum.

Stamina 3, receptaculo inserta, ante tubi lobulos posita, exserta. *Filamenta* filiformia, glabra, alba. *Antherae* oblongae, biloculares, oscillantes, flavae.

Perigonium interius, abortu nonnunquam affectum, membranulam tenuissimam albam tubi loco offert. Filamenta tum brevissima; antherae solito majores.

Flor. femin.

Perigonii exterioris partes tres, liberae, oblongae, obtusae, concavae, apice pilosae, pilis illis masculorum florum similibus, subfuscescentes, perigonium interius subaequantes.

Partes *perigonii exterioris* tres, liberae, oblongae, obtusae, margine a medio ad apicem pilis longiusculis, tenuibus albis ciliatae, tenerrimae, albidae.

Ovarium ovatum, trigonum, glabrum.

Styli tres, inferne coadunati, ultra medium liberi, partes perigonii interioris subaequantes. *Stigmata* obtusa. *Appendices* tres, filiformes, stylis longiores et cum illis alternantes.

Capsula trilocularis; loculis medio dorso dehiscentibus, monospermis.

Semen ovatum, lineis longitudinalibus rugulosum, purpurascens.

Explicat. Tab. II. 1. Capitulum sub lente visum. 2. Flos masculus. 4. Idem cum perigonio interiore abortivo. 5. Stamina praecedentis. 6. Anthera. 7. Pilus perigonii exterioris. 8. Flos femineus. 9. Idem ademto perigonio exteriore. 10. Semen. — Omnia magnitudine aucta; 6 et 7 augmento fortiore.

Eriocaulon divaricatum. Tab. III.

Caule ramoso folioso, inferne denudato oblique striato; ramis divaricatis; foliis amplexicaulibus lanceolato-acuminatis canaliculatis recurvis; pedunculis (umbellatis) pilosis; vaginis glabris apice pilosiusculis.

Radix non visa.

Caulis erectus, teres, ramosus: ramis paucis, valde divaricatis, elongatis, subverticillatis; superne dense foliosus, inferne delapsis foliis nudus, cicatricibus obliquis notatus, ad foliorum insertiones pilosus, ceterum glaber, 2 — 3 pedum altitudinis, pennaeque anserinae et quod excedit crassitudinis, fuscescens.

Folia versus apicem caulis ramulorumque dense congesta, amplexicaulia, lanceolato-acuminata, basi parum dilatata, apice mucronulata, pungentia, canaliculata, striata, superne glabriuscula, subtus pilosa, basi pilis tenuibus, longiusculis, albis ciliata, a dimidio ad integrum pollicem longa, medio 2 — 3 lineas lata, basi triplo latiora.

Pedunculi terminales, in umbellam aequalem dispositi: umbellis 2 — 3 in apice caulis ramulorumque, e flosculis circiter 50 conformatis; erecti, aequales, ob-

obscure tetragoni, rigidiusculi, pilis subadpressis albis canescentes, pollicem circiter longi, in statu sicco facile decidui.

Vaginae basi angustae, apice latiusculae oblique fissae, longitudinaliter striatae, apice pilosiusculae, ceterum glabrae, 4 lineas circiter longae, membranaceae, albidae.

Capitula florifera hemisphaerica, albo-lanata, semine piperis nigri paulo minora.

Squamae exteriores involucrantes ovato-oblongae, acutiusculae, concavae, basi incrassatae, nervo medio percursae, a medio ad apicem pilis albis margine ciliatae, fusco-nitentes.

Receptaculum pilosum; pili longi, tenues, subfuscescentes.

Bracteae ovato-oblongae, obtusae, concavae ad apicem pilis crassis, opacis, albis obsitae, ceterum glabrae, nervo valido medio longitudinaliter percursae, partibus perigonii parum longiores, fuscescentes.

Flores masculi cum femineis mixti, pedicellati.

Perigon. exter. ex 3 partibus formatum, partes ejusdem formae et structurae quam bracteae, paulo tantum minores tubumque vix superantes.

Perigonii interioris partes in tubum obconicum apice trilobum concretae, lobulis latiusculis obtusis.

Stamina 3 longe exserta. *Filamenta* tenuia, filiformia, alba. *Antherae* oblongae, biloculares, flavae.

Flores feminei. Partes *perigonii exterioris* tres, liberae, oblongae, obtusae, ad apicem pilis crassiusculis albis obsitae, nervo longitudinali medio percursae, valde tenues, pellucidae, albicantes, nitentes.

Partes *perigonii interioris* illis *exterioris* quidem simillima, attamen delicatiores albidiores pilisque subtilioribus apice vestitae.

Ovarium oblongum, trigonnm, glabrum.

Styli 3 coaliti, apice liberi, perigonio interiore parum longiores. *Stigmata* obtusa. *Appendices* tres, filiformes, stylis multo longiores.

Semen non visum.

Explicatio Tab. III.

1) Squama capituli exterior. 2) Flos masculus cum bracteâ. 3) Flos femineus. — Omnia aucta. 4) Folium in magnit. naturali.

Eriocaulon flaccidum. Tab. IV.

Caulescens; caule flaccido ramoso folioso; foliis caulinis amplexicaulibus linearibus acuminatis mucronatis pilosis recurvis; pedunculis fasciculatis filiformibus parce pilosis; vaginis glabris.

Radix annua, fibrosa. Fibrae tenues, subramulosae, pallidae.

Caulis ascendens, flaccidus, tertiusculus, glaber, ramosus, foliosus, 8—9 pollices longus, vix lineam crassus, fuscescens. Rami simplices.

Folia spiraliter posita, hinc inde quasi disticha, approximata, sessilia, lineari-acuminata, mucronata, pilis tenuibus, distantibus, longis a basi ad medium ciliata, planiuscula, subtus leviter striata, recurva, pollicem dimidium fere longa et semilineam lata.

Pedunculi terminales, fasciculati, inaequales, erectiusculi, debiles, subfiliformes, siccitate hinc inde spiraliter torti, subtetragoni, pilis parcis longiusculis pubescentes, tri- v. quinque-pollicares.

Vaginae angustae, glabrae, apice oblique fissae, a semunciâ ad unciam longae, albidae.

Capitula florifera hemisphaerica, albo-lanata, semine piperis nigri minora.

Squamae capituli *exteriores* involucrantes, steriles, ovato-oblongae, acutiusculae, glabrae, nervo dorsali instructae, membranaceae, flavescentes, nitidae, margine albido.

Receptaculum pilosum.

Bracteae perigonio paulo longiores, oblongae, concavae, apice acutiusculae pilisque rigidis, articulatis, albis vestitae, fuscescentes.

Flores masculi in disco dispersi, breviter pedicellati.

Perigon. exter. e duabus partibus liberis formatum; partes oblongae, obtusae, concavae, apice pilosae, nervo medio instructae, fuscescentes. Pili illis bractearum simillimi.

Perig. inter. partes duae in tubum obconicum apice bilobum coadunatae; lobulis obtusis.

Stamina duo, exserta. *Filamenta* filiormia, alba. *Antherae* ovatae, fuscae.

Flores feminei sessiles, cum masculis mixti.

Perigonii exter. partes duae, liberae, ovatae s. ovato-oblongae, concavae, subcarinatae, acutiusculae v. pl. min. obtusae, apice pilis albis ut in flore masculo obsitae, nervo medio valido percursae, fuscescentes.

Inter. perigonii partes duae, liberae, ovato-lanceolatae, apice pilis tenuioribus albis vestitae, nervo medio instructae, tenerrimae, albae.

Ovarium ovatum, medio sulcatum, glabrum.

Styli 4 interdum 2, basi coaliti, ultra medium liberi. *Stigmata* parum dilatata, obtusiuscula.

Capsula bilocularis; loculis monospermis.

Semen ellipticum, basi apiculatum, lineis longitudinalibus rugulosum, purpurascens.

Explicatio Tab. IV.

1) Squama capituli exterior. 2) Flos masculus clausus cum bracteâ. 3) Idem apertus, demtâ bracteâ. 4) Pilus perigonii exterioris. 5) Flos femineus. 6) Pistillum cum ovario submaturo. 7) Semen. — Omnia valde aucta.

Eriocaulon ciliatum. *Tab. V.*

Caulibus simplicibus; foliis radicalibus e basi latâ lanceolato-acuminatis ciliatis; pedunculis (umbellatis) facile deciduis subpubescentibus; vaginis bifidis.

Radix perrennis, fasciculata, fibrillis numerosissimis, brevissimis, albis tomentosa.

Rhizoma breve, contractum, crassum, reliquiis foliorum exarefactorum obtectum.

Caules (vel si mavis rami) pauci, in nostris speciminibus semper duo, erecti, simplices, 3—4 pollices longi, lineas vix duas crassi, foliosi, tomentosi.

Folia radicalia conferta, erecta, e basi latâ lanceolato-acuminata, obtusiuscula, submucronata (mucronis loco potius callositas videnda) pilosiuscula, margine pilis tenuibus dense ciliata, leviter striata, ad insertionem piloso-lanata, glaucescentia, pollices duos cum dimidio longa, lineas quinque basi lata.

Caulina radicalibus multo minora, subalterna, remotiuscula, sessilia, appressa, lanceolato-acuminata, mucronulata, striata, utrinque pilosa, margine ciliata, pollicem circiter longa, sursum sensim minora.

Pedunculi terminales, umbellati, erecti, facillime decidui, obscure angulati, pilis adpressis pubescentes, numero circiter triginta, pollicares.

Vaginae angustae, glabriusculae, apice bifidae, quatuor lineas longae, pallidae.

Capitula florifera subglobosa, albo-lanata, semine piperis nigri minora.

Squamae exteriores involucrantes, steriles, oblongae vel lato obovatae, obtusae, hinc convexae illinc concavae, a medio ad apicem pilis albis ciliatae, nervo dorsali instructae, fuscescentes.

Bracteae oblongae, concavae, subcarinatae, acutiusculae, apice fasciculo pilorum instructae: pilis brevibus, crassis, opacis, tuberculosis, albidis; fuscescentes.

Receptaculum pilosum.

Flores masculi cum femineis mixti, pedicellati.

Perigonium exterius ex tribus partibus liberis conformatum. Partes oblongae, concavae, subcarinatae, apice fasciculo pilorum ornatae, nervo medio percursae, fuscescentes. Pili illis in bracteis simillimi.

Perigon. interius in tubum brevem latumque concretum, apice trilobum; lobulis brevibus acutiusculis.

Stamina 3, longe exserta. *Filamenta* toro inserta, filiformia, pallida. *Antherae* ovatae, biloculares, flavae.

Flores feminei sessiles.

Perigonii exterioris partes illis floris masculi omnino similes, paulo tantum angustiores.

Perigon. interioris partes 3 liberae, lanceolatae, basi attenuatae, obtusiusculae, a medio ad apicem pilis tenuioribus longioribus ciliatae, nervo medio subtili percursae, planiusculae, albidae.

Ovarium ovatum, trigonum, glabrum.

Styli 3, breves, basi connati. *Stigmata* subclavata, obtusiuscula. *Appendices* tres, filiformes, stylis longiores et cum illis alternantes. — *Semen* non visum.

Explicatio Tab. V.

1, 2) Squamae capitulum involucrantes. 3) Flos masculus cum bracteâ. 4) Pilus perigonii exterioris. 5) Flos femineus. — Omnia amplificata.

Eriocaulon brachypus. Tab. VI.

Caulibus caespitosis simplicibus foliosis; foliis radicalibus linearibus pilosis; pedunculis (umbellatis) pubescentibus; vaginis glabriusculis.

Radix annua, fasciculata, fibrosa, fibrae in ambitu breves, crassae, tomentosae; interiores longiores, tenuiores, subglabrae, simplices.

Caules caespitosi, erecti, tenues, subteretes, simplices, pilosi, foliis paucis obsiti, inferne nudi, a semuncia ad unciam longi.

Folia radicalia dense caespitosa, erecta vel diffusa, linearia, angustissima, obtusiuscula, striata, pilosa, scabriuscula, ad insertionem lanâ longâ albâ dense obtecta, biuncialia, caulem aequantia vel superantia, canescentia. *Caulina* sessilia, parum adpressa, pilis albis basi cincta, lanceolato-longe-acuminata, acutiuscula, pilosa, planiuscula, 4—5 lin. longa.

Pedunculi terminales, umbellati, numero a 30 ad 50., basi foliis involucrati, erecti, tenues, obscure angulosi, pubescentes, pollicem circiter longi.

Vaginae breves, angustae, glabriusculae, apice oblique fissae, membranaceae, albidae, basi pilis albis cinctae, lineas 4 circiter longae.

Capitula florifera hemispherica, albo-lanata, semine piperis nigri paulo minora.

Squamae exteriores involucrantes, steriles, ovatae, acutiusculae, hinc convexae, illinc concavae, a medio ad apicem ciliatae, fuscescentes.

Bracteae oblongae, concavae, apice pilis crassis, obtusis, opacis, septatis, albis vestitae, fuscae.

Receptaculum pilosum.

Flores masculi cum femineis mixti, pedicellati.

Perigonii exterioris partes tres, liberae, bracteis omnino conformes; *interioris* in tubum obconicum coalitae, apice trilobum: lobulis acutis.

Stamina 3 exserta. *Filamenta* toro inserta, filiformia, alba.

Antherae ovatae, flavae.

Flor. feminei. Partes *perigonii exterioris* 3, liberae, illis masculi floris simillimae; *Interioris* totidem, oblongae, basi attenuatae, planiusculae, versus apicem pilis tenuibus albis obsitae ciliataeque, tenerae, albae.

Ovarium immaturum non visum. *Styli* tres, basi coaliti, ultra medium liberi. Stigmata obtusa. *Appendices* tres filiformes, cum stylis alterni illisque multo longiores.

Capsula globulosa, trigona, glabra, trilocularis: loculis monospermis.

Semen ellipticum, lineis longitudinalibus rugulosum, basi apiculatum, purpurascens.

Explicatio Tab. VI.

1) Squama capituli exterior. 2) Flos masculus cum bracteâ. 3) Flos masculus perigonio interiore abortivo. 4) Pilus perigonii exterioris. 5) Flos femineus. 6) Idem demto perigonio exteriore. 7) Semen. — Omnia aucta.

Nota. Stigmata in icone nimis globosa.

Eriocaulon repens Lam.? — *Tab. VII.*

Caule decumbente ramoso; foliis amplexicaulibus linearibus subcanaliculatis basi pilosis recurvis; pedunculis axillaribus subfasciculatis vaginisque pubescentibus.

Lamarck Encyclop. méthod. T. III. p. 264. Tab. 50 fig. 2.?

Radix fibrosa, biennis?

Caulis decumbens, basi denudatus, teretiusculus, tenuis, cicatricibus foliorum lapsorum obliquis notatus, ramosus: ramis ascendentibus, foliosus; 3—4 pollices longus.

Folia amplexicaulia, lineari-acuminata, mucronata, basi pilis parcis, valde longis, albis ciliata, striata, recurva, 8 circiter lineas longa, basi lineam et quod excedit lata, pallide viridia.

Pedunculi laterales, pauci, subfasciculati, ab uno ad quatuor, frequenter solitarii, erecti, tenues, tetragoni, siccitate parum contorti, pubescentes, 2—4 pollices longi.

Vaginae angustae, apice oblique fissae: lacinula subbifida; glabriusculae, striatae, semipollicares et ultra, membranaceae, albidae.

Capitula florifera subhemisphaerica, albo-lanata, semen piperis nigri magnitudine subaequantia.

Squamae exteriores involucrantes, steriles, ovatae vel oblongae, hinc convexae illinc concavae, acutae, a medio ad apicem dorso pilosae margineque ciliatae, nervo dorsali percursae, exteriores interioribus latiores, capitulum adaequantes, fusco-nitentes.

Bracteae oblongae, concavae, apice acutae et pilorum fasciculo vestitae, nervo medio instructae, subfuscescentes. Pili articulati, opaci, crassi, albi.

Receptaculum pilosum.

Flores masculi cum femineis mixti, pedicellati.

Perigonium exterius e tribus partibus liberis conformatum; partes oblongae, concavae, obtusae, pilis apice vestitae, nervo medio instructae, subfuscescentes. Pili ut in bracteis.

Perigonium interius in tubum obconicum apice trilobum connatum: lobulis acutiusculis et cum partibus perigonii exterioris alternantibus.

Stamina 3, exserta, ante tubi lobulos posita, receptaculo inserta. *Filamenta* filiformia, alba. *Antherae* ovatae, flavae.

Flor. feminei. *Perigonii exterioris* partes tres, liberae, oblongae, obtusae, concaviusculae, apice pilorum fasciculo vestitae, nervo longitudinali percursae, fuscescentes. Pili ut in bracteis.

Interioris partes tres, liberae, cum praecedentibus alternae, oblongae, planiusculae, a medio ad apicem pilis tenuioribus ciliatae, nervo medio tenuissimo instructae, albo-nitentes.

Ovarium ovatum, trigonum, glabrum.

Styli 3, filiformes, longi, ultra medium coaliti, apice liberi. *Stigmata* obtusa. *Appendices* tres, filiformes, stylis longiores. *Capsula* trilocularis; loculis monospermis, medio dorso longitudinaliter dehiscentibus. *Semen* pendulum, subglobosum, lineis longitudinalibus rugulosum, purpurascens.

Explicatio Tab. VII.

1, 2) Squamae capitulum involucrantes. 3) Flos masculus cum bracteâ. 4) Pilus perigonii exterioris. 5) Flos femineus. 6) Idem, perigonio exteriore ablato. 7) Semen. — Omnia magnitudine aucta.

Eriocaulon verticillatum. Tab. VIII.

Caulescens; caule erecto simplici, foliis verticillatis dense confertis linearibus subulatis pubescentibus; pedunculis terminalibus fasciculatis; vaginis pubescentibus.

Radix fasciculata, fibrosa, perennis. Fibrae simplices, fibrillis numerosis brevissimis tomentosae.

Caules saepissime plures, simplices, erecti, obscure tetragoni, ad verticillos parum incrassati, juniores albo-pilosi, demum glabriusculi, 8—9 pollices longi, pennae corvinae crassitudine, fuscescentes.

Folia radicalia dense congesta, brevia, caulinis simillima. *Caulina* dense verticillata, linearia, subulata, superne linea longitudinali sulcata, subtus striata, juniora pilosa, demum glabriuscula, ad insertionem in juvenili statu, pilis albis dense cincta, a semuncia ad unciam longa.

Pedunculi terminales, fasciculati, inaequales, erecti, tenues, rigidiusculi, tetragoni, glabriusculi, 4—5 pollices longi.

Vaginae angustae, striatae, apice oblique fissae, lacinulâ integerrimâ, subpulverulentae, pubescentes, 8—10 lineas longae, basi lanâ albâ dense cintae.

Capitula florifera hemisphaerica, glabra, semine piperis nigri paulo majora.

Squamae exteriores involucrantes, steriles, ovatae vel ovato-lanceolatae, nervo dorsali instructae, subpulverulentae, albidae, nitentes.

Bracteae oblongae, concavae, glabrae, albae.

Receptaculum pilosum; pilis albis.

Flores masculi frequentissime in disco.

Perigonii exterioris partes tres, liberae, bracteis simillimae, illis tamen parum minores. *Interioris* partes totidem in tubum conniventes, sed non coadunatae, oblongo-lanceolatae, concaviusculae, glabrae, albae.

Stamina 3, partes perigonii aequantia, toroque inserta. *Filamenta* tenuia, alba. *Antherae* ovatae, biloculares, flavae.

Flores feminei saepissime in ambitu.

Perigonii exterioris partes 3, liberae, oblongae, concavae, glaberrimae, albae, diaphanae. *Interioris* totidem, liberae, praecedentibus simillimae, sed tenuiores. *Ovarium* in statu juvenili non visum. *Styli* tres, basi coaliti, ultra medium liberi. *Stigmata* obtusa. *Appendices* tres, filiformes, stylis longiores.

Capsula trigona, trilocularis: loculis monospermis, dorso longitudinaliter dehiscentibus. *Semen* pendulum, ellipticum, rugulosum, basi apiculatum, purpurascens.

Explicatio Tab. VIII.

1) Squama capituli exterior aucta. 2) Alia valde aucta. 3) Flos masculus. 4) Idem, demto perigonio exteriore. 5) Flos femineus. 6) Semen. — Omnia aucta.

Eriocaulon paludosum. Tab. IX.

Subacaule; foliis confertis linearibus, basi lanatis, ceterum glabriusculis; pedunculis caespitosis filiformibus elongatis; vaginis ad fissarum pilosis.

Radix annua, fibrosa, albida. Fibrae tenues, ramosae.

Caulis brevissimus, saepissime nullus.

Folia caespitosa, erecta, e basi latiusculâ linearia, obtusiuscula, basi et ad insertionem lanâ fuscâ dense obsita, ceterum glabra, planiuscula, nervoso-striata, 2. pollices circiter longa, prasina.

Pedunculi caespitosi, elongati, filiformes, tetragoni pilis raris tenuibus hinc inde pubescentes, demum glabri, 4—6 uncias longi, flavo-nitentes.

Vaginae angustae, glabriusculae, apice oblique fissae pilosaeque, striatae, 8—10 lineas longae, virides.

Capitula florentia subhemisphaerica, albo-lanata, semen piperis nigri magnitudine subadaequantia.

Squamae involucrantes steriles, ovato-lanceolatae, hinc convexae illinc concavae, extimae apice obtusae, margine pilis albis ciliatae, nervo dorsali percursae, fuscae.

Bracteae ovato-oblongae, concavae, obtusae, ad apicem pilis longiusculis, articulatis, obtusis, albis vestitae, nervo medio instructae, fuscescentes.

Receptaculum pilosum: pili longi, albi.

Flores masculi cum femineis mixti, pedicellati.

Perigonii exterioris partes tres, liberae, bracteis omnino similes, paulo tantum illis minores.

Perigon. interius in tubum obconicum, trifidum, albidum connatum: lobulis lanceolatis. *Stamina* 3, receptaculo inserta, tubo vix longiora. *Filamenta* filiformia, libera, alba. *Antherae* ovatae, biloculares, fuscae.

Flores feminei sessiles.

Perigonii exterioris partes tres, liberae, oblongae, angustae, planiusculae, apice pilis albis vestitae, albido-nitentes. *Interioris* totidem, liberae, cum praecedentibus alternantes, oblongae, obtusae, basi attenuatae, a medio ad apicem pilis longis albis ciliatae, tenerrimae, albae.

Ovarium ovatum, trigonum, glabrum. *Styli* 3, basi tantum coaliti, ceterum liberi. *Stigmata* obtusa. *Appendices* 3, stylis multo longiores, apice bifidae. *Semina* non visa.

Explicatio Tab. IX.

1, 2) Squamae capituli exteriores. 3) Flos masculus cum bracteâ. 4) Pilus perigonii exterioris. 5) Flos femineus. 6) Perigonium exterius floris feminei. — Omnia lente aucta.

Eriocaulon bryoides. Tab. X. *fig.* 1.

Exiguum; cauliculis confertis ramosis dense foliosis; foliis linearibus acuminatis pilosiusculis; pedunculis terminalibus fasciculatis pubescentibus; vaginis bifidis.

Radix annua, fibrosa: fibrillis tenuibus, simplicibus, teretibus, fuscescentibus.

Caules caespitosi, conferti ramosi, dense foliosi, a semuncia ad unciam longi.

Folia linearia, acuminata, submucronulata, pilis sparsis tenuibus pilosiuscula, nervo medio percursa, pollicem dimidium fere longa, alia multo breviora, pallide viridia.

Pedunculi terminales, fasciculati, filiformes, obscure angulosi, pilis tenuibus, distantibus, albis pubescentes, demum glabriusculi, pollicem circiter longi.

Vaginae angustae, pubescentes, striatae, apice bifidae, membranaceae, albae, 4 lineas circiter longae.

Capitula hemisphaerica, albo-lanata, semine piperis nigri triplo fere minora.

Squamae exteriores involucrantes, steriles, extimae obovatae, basi angustiores; interiores lanceolatae, omnes hinc convexiusculae illinc parum concavae, versus apicem ciliatae, nervo medio instructae, nigro-fuscae.

Receptaculum pilosum. *Bractae* oblongae, concavae, apice pilis longis, acutis, septatis, albis vestitae.

Flores masculi cum femineis mixti, pedicellati.

Perigonium exterius ex tribus partibus liberis formatum, quae bracteis simillimae. *Interius* in tubum obconicum, apice trifidum connatum: lobulis acutis.

Stamina 3, exserta, libera. *Filamenta* filiformia alba. *Antherae* ovatae, flavae.

Flores feminei sessiles.

Perigonii exterioris partes 3, liberae, oblongae, basi parum attenuatae, ad apicem pilis vestitae, nervoque dorsali percursae. *Interioris* totidem partes praecedentibus simillimae, tenuiores tantum et totae albae.

Ovarium ovatum, trigonum, glabrum. *Styli* 3, basi coaliti, ultra medium liberi. *Stigmata* oblonga, obtusa. *Appendices* tres, filiformes, stylis parum longiores.

Capsula trilocularis; loculis monospermis, dorso longitudinaliter dehiscentibus.

Semen pendulum, ellipticum, basi apiculatum.

Explicatio Tab. X. fig. 1.

1) Folium. 2) Squama capituli exterior. 3) Squama involucrans interior. 4) Flos masculus cum bracteâ. 5) Pilus perigonii exterioris. 6) Flos femineus. 7) Semen. — Omnia amplificata.

Eriocaulon cuyabense. Tab. X. fig. 2.

Pusillum; caulescens; cauliculis subcaespitosis simplicibus foliosis; foliis caulinis linearibus glabris, pedunculis fasciculatis foliis involucrantibus brevioribus; vaginis nullis.

Radix annua, fasciculata, fibrosa, albida; fibrillae subsimplices, tenues, albidae.

Caules caespitosi, rarius solitarii, stricti, simplices, foliosi, glabri, pollicem circiter longi, pallidi.

Folia sessilia, erecta, linearia, acuminata, angustissima, glabra, dimidium pollicem fere longa.

Pedunculi terminales, fasciculati, obscure angulosi, basi pilis cincti, brevissimi, foliis involucrati illisque breviores, vix 4 lineas longi.

Vaginae nullae!

Capitula sub anthesi globulosa, glabra, semine piperis nigri minora, alba.

Squamae involucrantes ovato-lanceolatae, acuminatae, glaberrimae, nervo longitudinaliter percursae, albae.

Bracteae oblongae, utrinque attenuatae, concavae, glaberrimae, nervo dorsali virescente instructae, albae.

Receptaculum villosum.

Flores masculi cum femineis mixti, pedicellati.

Perigonii exterioris partes tres, liberae, bracteis simillimae, paulo tantum breviores; *Interioris* in tubum brevem, latum, trifidum concretae; lobulis acutis.

Stamina 3, exserta, lobulis opposita.

Filamenta libera, tenuia, alba. *Antherae* oblongae, fuscae.

Flores feminei pedicellati.

Perigonii utriusque partes tres, liberae; *exterioris* oblongae utrinque attenuatae, concavae, glaberrimae, albidae. *Interioris* lato-ovatae, utrinque attenuatae, glaberrimae, diaphanae, albae.

Ovarium in juniori statu non visum. *Styli* 3, usque ad medium coaliti, superius liberi. *Stigmata* obtusa. *Appendices* tres, filiformes, stylis longiores.

Capsula trigona, trilocularis, dorso linea longitudinali dehiscens: loculis monospermis.

Semen pendulum, ellipticum, longitudinaliter striatum, rugulosum, e flavo purpurascens.

Explicatio Tab. X. fig. 2.

1) Squama capituli exterior. 2) Flos masculus semiclausus cum bracteâ. 3) Idem apertus. 4) Flos femineus semiclausus. 5) Idem, explicatus. 6) Semen, — Omnia lente amplificata.

CONSIDÉRATIONS

SUR DIVERS OBJETS DE

GÉOLOGIE ET DE GÉOGNOSIE,

PAR

M. PARROT.

(Lu le 6 Avril 1831.)

Note historique sur ces considérations.

M. Adolphe Brongniard, fils du savant Académicien Alexandre Brongniard, et déjà connu par quelques travaux sur la Géologie des végétaux, avait annoncé, en 1828, dans une brochure intitulée: *Considérations générales sur la nature de la végétation qui couvrait la surface de la terre aux diverses périodes de la formation de son écorce*, la découverte que c'est à une grande quantité d'acide carbonique contenu dans l'atmosphère primordiale de notre globe que nous devons la végétation colossale qui nous a fourni les houilles de même que le humus sur lequel les plantes actuelles végètent. L'Académie de Paris accueillit cette découverte avec des applaudissemens extraordinaires.

Ne connaissant d'abord ce travail que par des annonces, je crus que l'auteur était M. Brongniard père; j'écrivis donc à ce savant Académicien pour réclamer auprès de lui-même mon droit de priorité à cette découverte, et, incapable moi-même d'un plagiat, je m'en remis à sa loyauté pour en instruire le public savant, quoique je susse que mes *Entretiens sur la Physique*, qui contiennent cette décou-

verte avec toutes les conséquences que l'on peut en tirer, se trouvent depuis 6 ans sur sa table *).

Ce ne fut qu'un an après que M. Brongniard fils, inséra une note dans les *annales des sciences naturelles*, en Août 1830 p. 427 où il reconnut mon droit. Je passe sous silence le ton dont il le fait; on peut le supposer dans un jeune homme qui fait sa réputation. Mais M. Brongniard, au lieu de s'acquitter simplement en quelques lignes du devoir que M. son père lui avait apparemment imposé, s'étend sur divers objets hétérogènes et transcrit entre autres ma théorie de la formation des houilles, espérant que, comme elle est diamétralement opposée aux idées des Géologues français, elle jetterait un faux jour sur mon système géologique entier.

Ce procédé de M. Brongniard m'a engagé à revoir les sujets qu'il a touchés, et comme les *considérations* que je livre ici sont pour la plupart neuves et concluantes, je crois devoir les publier.

Sur la formation des houilles.

Il y a 18 ans, lorsque je composais mon système géologique, on regardait les houilles comme formées de débris de plantes continentales, c'est-à-dire crues sur un terrain déjà enlevé à l'océan. Aujourd'hui c'est encore l'opinion générale. Selon moi, nous devons les houilles à la végétation primitive sous-marine, dont les produits ont été transformés par une décomposition, une espèce particulière de fermentation, qui a eu lieu sous la pression de l'océan d'alors. J'ajoute les preuves suivantes à celles que j'en ai données dans mon *Grundriss der Physik der Erde*, 1815, et dans mes *Entretiens sur la Physique*, 1824.

Dans la supposition que les houilles se sont formées sur les continens, elles seraient des tourbes arrivées à un plus haut degré de décomposition. Il s'en suivrait également que, vû les nombreux et vastes espaces tourbeux et les lits également nombreux

---

*) M. Alexandre Brongniard fut chargé, il y a 6 ans, par l'Académie de Paris de faire, avec MM. Beudant et Coquebert-Montbret, un rapport sur mon système de Géologie, et a jusqu'à présent refusé de le faire.

et vastes de charbons de terre que nous connaissons, il devrait exister presque partout des passages fréquents des uns aux autres. Ce principe des passages est général en Géologie, et c'est lui qui nous apprend si deux couches, immédiatement superposées l'une à l'autre, ont été formées sans interruption. Mais l'on n'a jamais trouvé de la houille immédiatement sous la tourbe ni de la tourbe immédiatement sous des houilles et moins encore ces nuances qui serviraient de passage de l'une à l'autre. Ainsi, quoiqu'il soit vrai que la tourbe la plus compacte semble s'approcher de la houille par ses élémens et quelque peu par sa texture, il n'en est pas moins vrai que la tourbe ne se change point en houille et que ces deux formations sont hétérogènes. Ce ne peut pas être l'âge qui manque à la tourbe; car nous exploitons tous les jours de nouvelles tourbières jusqu'à présent intactes. Nous avons même sur la terre ferme des tourbes composées de plantes marines qui ne sont point devenues houilles, malgré leur haute antiquité, parce que (dans mon système) elles ont été soustraites à la pression de l'océan, et mises à découvert par le soulèvement des roches sur lesquelles ces plantes marines croissaient au fond de la mer, avant qu'elles aient eu le tems de se transformer.

Il existe des lits de houille de 60 pieds d'épaisseur et plus; et si nous considérons qu'un certain poids de tourbe la plus compacte a un volume au moins double de celui qu'a le même poids de houille, il s'ensuit que cette épaisseur correspond à près de 200 pieds de tourbe de moyenne qualité. Or, l'on n'a trouvé nullepart des lits de tourbe d'une telle épaisseur, quoique l'on perce à tout moment des tourbières dont l'homme n'a jamais rien enlevé. Nous apprenons par de Luc que le plus épais lit de tourbière connu n'a que 30 à 35 pieds; et quoique d'un autre côté cette épaisseur extrêmement rare dépasse de beaucoup celle de la plupart des lits de houille, cependant la tourbe à cette profondeur n'est nullement de la houille, quoique certainement il ait fallu bien des siècles pour former ce lit de tourbe. En général on peut admettre que l'épaisseur moyenne des lits de houille surpasse au moins de 3 fois celle des tourbes; d'où il suit, dans l'hypothèse des Géologues, que, vû la plus grande densité des houilles, la végétation qui a produit ces lits aurait été plus de 6 fois plus considérable que celle qui a produit les tourbes. Mais les houilles ont évidemment

séjourné sous la mer, et je demande avec raison à l'hypothèse que je combats, d'expliquer comment il s'est fait que les dépôts de plantes, qui ont séjourné sous l'océan et ont été ensuite soulevés, ont dû être plus de 6 fois plus grands que ceux qui n'ont pas séjourné sous la mer, si les uns et les autres sont des produits de la végétation continentale; d'autant plus que les tourbes ont eu, en sus des houilles, encore 6000 ans pour s'accroître?

M. D'Aubuisson a prouvé que les houilles ont été autrefois liquides ou au moins presque liquides *). Mais l'on n'a jamais découvert des tourbes dans cet état ou dans un état qui en approche ou dans un état qui indiquât celui-là comme ayant précédé, quoiqu'elles naissent dans des terrains marécageux imprégnés d'eau, quoiqu'elles naissent tous les jours sous nos yeux. Les tourbes, à quelque degré de décomposition que nous les trouvions, sont toujours des substances concrètes, des composés visibles de débris de plantes. Il faut donc que la décomposition qui forme la houille soit différente de celle qui forme les tourbes. Or je trouve la cause de cette différence dans la pression de l'océan qui conserva tous les produits de la fermentation des plantes, tandis qu'une grande partie de ces produits se change en gaz et se perd, quand la fermentation se fait sous de faibles pressions. Le bitume, formé à une grande profondeur sous terre et par conséquent sous une haute pression, nous offre peut-être l'origine des houilles. Si les Géologues connaissent une autre cause que la pression pour la différence spécifique entre la houille et la tourbe, qu'ils la nomment. Jusqu'alors mon explication suffit, d'autant plus que le célèbre H. Davy l'a adoptée depuis pour la carbonisation du papyrus des manuscrits d'Herculanum.

Nous trouvons partout les houilles couvertes de terrains calcaires, argileux, sablonneux, etc. Or les terrains calcaires jurassiques, plusieurs espèces de grès, les gypses, etc. ne sont décidément pas des terrains de transport ou d'alluvion, des débris de roches dégradées, mais des masses précipitées par le grand procès chimique qui a

*) Je ne transcris pas ici ces preuves, connues de tous les géologues. Je me dispense même d'en alléguer de nouvelles tirées de l'observation des phénomènes qu'offrent les pseudo-volcans, pour ne pas donner trop d'étendue à cet article.

produit successivement tous les terrains avant, pendant et après les bouleversemens, comme je l'ai expliqué dans ma Géologie. Si donc les houilles étaient nées et formées sur les continens déjà à sec, il faudrait que ces continens se fussent abaissés sous la mer pendant que durait encore le procès de la précipitation générale, pour se couvrir de calcaires, de marnes, d'argiles, etc. et se fussent en suite relevés pour offrir à notre exploitation ces produits de l'antique végétation. J'ai, il est vrai, prouvé dans mon système la possibilité de ces soulèvemens et abaissemens successifs, soit absolus, soit relatifs; mais ne doit-on pas trouver singulier et inadmissible que ce phénomène n'ait eu lieu que là où les houilles auraient déjà été formées, et nulle part où la transformation des plantes n'aurait acquis que les degrés si variables qui constituent la tourbe? Du reste les alternations de terrains d'eau douce et de terrains marins, ne se retrouvent pas dans la région houillère, mais sont bien plus jeunes que la houille et ne peuvent être considérées que comme contemporaines des lignites.

Si, pour conserver l'origine continentale des houilles, on veut supposer qu'elles se soient formées en tourbe sur les continens et après en houille par un séjour sous la mer, ensuite d'un affaissement, on rentre dans l'essence de ma thèse qui est que les houilles n'ont pu arriver à l'état où on les trouve que sous l'influence d'une très haute pression; on noie l'hypothèse pour la sauver du naufrage, et l'on a en outre le désavantage d'avoir besoin de deux soulèvemens et d'un abaissement pour chaque couche séparée, tandis que mon hypothèse ne demande qu'un seul soulèvement pour toutes et rien de plus, postulat qu'aucun Géologue n'ose plus refuser aujourd'hui. Puis donc que nous en sommes à admettre nécessairement que les houilles ont dû séjourner à de grandes profondeurs sous la mer, pourquoi ne pas les y faire naître, puisque la végétation sous-marine nous en offre les moyens?

Enfin, si les houilles sont nées de plantes continentales décomposées, puis abaissées sous la mer par l'affaissement de leur continent, d'où vient que la couche de humus contemporain, voisin des marais où naissaient ces tourbes devenues houilles, n'a pas eu le même sort, ne s'est pas conservé comme les tourbes? L'on n'en trouve pas la moindre trace aux environs ou même dans la région entière des houilles. Ce

qui prouve que les plantes qui ont formé les houilles ne sont pas contemporaines de celles qui ont formé les tourbes, mais bien antérieures. Cette différence d'âge, jointe aux différences spécifiques qui caractérisent ces deux espèces de productions de la végétation, n'indique-t-elle pas des différences totales de formation?

Cette considération amène une autre question, une question toute nouvelle de Géologie botanique. Personne ne niera plus aujourd'hui que des portions notables de nos continens actuels n'aient été soulevés, et ne se soient couverts de végétations cryptogames et phanérogames, tandis que d'autres étaient encore sous mer et que celles-là ont été ensuite recouverts par l'océan. Qu'est devenue cette masse de végétation, et le humus qu'elle a dû produire? Je réponds *qu'elle se trouve dans les lignites*, dans ces masses mélangées de carbone qui caractérisent l'âge où le procès chimique de la précipitation générale était terminé, mais où les révolutions mécaniques continuaient encore et dévastaient les continens. Si l'on se donne la peine de comparer tous les produits si variés, connus sous le nom de lignites, l'on découvrira sûrement dans les mélanges les plus fins de carbone, de glaise et de sable notre humus, tel que l'agriculture d'aujourd'hui nous l'offre encore, dans l'anthracite pur le humus pur, et dans les mélanges plus grossiers les tourbes, les feuilles d'arbre, jusqu'aux branches et aux troncs, etc., le tout modifié par une décomposition sous une pression plus ou moins grande, et de plus ou moins de durée, soit de la part de l'océan, soit sur tout de la part des terrains qui couvrent encore ces restes de l'antique végétation.

Certains calcaires noircis par le carbone qui pénètre leur substance ne seraient-ils pas des calcaires houillers dans le sens littéral de ce mot, c'est-à-dire des masses de chaux pénétrées par de la houille lorsque celle-ci était encore à l'état de fluidité? Un examen plus approfondi de ces calcaires et autres roches qui se trouvent dans ce cas, pourra décider si cette opinion est vraie ou erronnée. Ce qu'il y a de sûr, c'est que ce phénomène sera difficile à expliquer autrement, et ce qui est encore plus certain, c'est qu'on ne trouvera pas l'origine de ce bitume dans les tourbes nées sur les continens.

Si les restes de plantes continentales qu'on retrouve encore reconnaissables dans les houilles, les feuilles, les troncs, etc. font naître des doutes, le Géologue peut s'en debarrasser bien vîte en les regardant comme des hôtes venus de près ou de loin. L'on voit encore journellement, à présent que la nature paraît être calmée et éloignée de ses révolutions de jadis, on voit les fleuves d'Amérique charrier d'énormes quantités d'arbres qui fournissent aux habitans des cercles polaires sous des longitudes très éloignées leur bois de chauffage et leurs ustensiles, sans compter les feuilles et les herbes que l'océan engloutit avant leur arrivée dans ces régions boréales. Pourra-t-il paraître difficile d'admettre que les plantes continentales, dont on trouve quelques restes dans les couches de houille, y sont parvenues des points du globe alors déjà mis à sec? Car la vraie masse des houilles n'offre aucun vestige d'une texture végétale.

Bien plus: ces restes de plantes continentales imparfaitement décomposées attestent directement que la houille s'est formée de familles ou même de classes différentes de plantes continentales, et que les échantillons de celles-ci sont par conséquent des étrangers; car comment auraient-ils résisté à la fermentation qui a décomposé tout le reste? Et si ces échantillons sont des étrangers intrus dans l'intérieur même des houilles, ne doit-on pas en conclure que les plantes houillères sont nées sur le sol de la houille et sous l'eau, tandis que les continens leur envoyaient des Josués et des Calebs, comme pour explorer ce qui se faisait là et nous en instruire? Ne doit-on pas en conclure que les houilles sont des productions entièrement sous-marines?

M. Adolphe Brongniard récuse comme preuve pour mon système l'exemple que j'ai allégué de la houille de Högenas formée évidemment sous la mer, en observant que cette houille appartient à une autre formation ou terrain que le reste des houilles. Mais que m'importe le terrain où cette houille évidemment marine se trouve? Il y a long-tems que j'ai rejeté toutes les divisions en vogue des terrains et formations, et MM. les Géologues en passeront par là, et se debarrasseront de la *lues Werneriana* qu'ils se sont laissé inoculer par le célèbre Minéralogiste de Frey-

berg. Si depuis 15 ans je n'ai pu y parvenir, M. Elie de Beaumont, qui a si parfaitement développé mes idées sur les soi-disant époques géologiques, fera la révolution. Il ne s'agit pas dans l'objection citée d'un système dans lequel on range les terrains. Il s'agit d'expliquer comment cette houille a pu se former. Or cette explication est impossible dans l'hypothèse adoptée jusqu'à présent.

Considérons de plus près le procès qui a pu produire les houilles, comparé à celui qui a formé et forme encore de nos jours les tourbes. J'accorde volontiers que celui-ci soit un composé de procès successifs qui peuvent amener une carbonisation imparfaite; c'est ce que nous démontre l'observation des tourbes de différentes qualités, dont les meilleures forment toujours les couches inférieures; ce n'est que dans celles-ci qu'on trouve du bitume, les couches supérieures n'en ayant pas, parce que le contact de l'oxigène atmosphérique produit du gaz acide carbonique, qui enlève une grande partie du carbone, et parce que le défaut de haute pression permet le dégagement de l'hydrogène carboné qui se forme par cette opération lente, comme par l'acte rapide de la décomposition par la chaleur rouge. Ce sont ces deux gaz qui rendent les contrées marécageuses si insalubres. Par contre la fermentation qui se fait sous une haute pression ne permet pas leur dégagement, et conserve par là aux houilles tous les principes des végétaux dont elle se forme. Aussi les tourbes, même les plus solides, sont des espèces de tissus qui ont évidemment perdu de leur substance primitive, tandis que les houilles sont des masses compactes d'une texture homogène, où tout est plein, et qui portent l'empreinte d'une fusion démontrée d'ailleurs.

L'on niera peut-être que cette fusion et la carbonisation aient pu être produites par la chaleur, les substances d'où sont nées les houilles ayant été (dans mon hypothèse) en contact avec la mer, qui eût enlevé rapidement la chaleur à mesure qu'elle se formerait. Mais ce n'est pas là l'idée que je me suis faite de ce procès. Les plantes qui croissaient au fond de la mer n'ont pas subi à beaucoup près toute leur transformation aussi long-tems qu'elles n'ont été couvertes que par l'océan. L'oxigène atmosphérique qui n'y arrivait point à raison de la couche de plantes vivantes qui couvrait les couches de plantes mortes, ne pouvait contribuer à la fermentation qui,

sous la haute pression de l'océan et de l'atmosphère d'alors, ne pouvait d'ailleurs qu'être très lente, l'océan enlevant le calorique qui se développait par le procès. Mais lorsqu'une couche de calcaire ou d'autre terrain eut formé une paroi entre les plantes à peine désorganisées et la mer, alors la chaleur presque insensible que produisait ce commencement de fermentation, a pu s'accroître peu à peu, parce qu'elle ne pouvait se dissiper que très lentement; et dès que le gain de chaleur eut commencé à surpasser la perte, le procès dut s'accroître rapidement, et par conséquent aussi la température. Or, comme nous voyons qu'un tas d'herbe nouvellement fauchée s'échauffe jusqu'à l'inflammation, nous devons admettre que le tas de plantes qui a fourni les houilles a pu s'échauffer jusqu'au point nécessaire à la liquéfaction et à la carbonisation, d'autant plus sûrement que, comme il ne se formait point de gaz, le procès ne perdait pas la chaleur combinée qui eût été engloutie par la formation des gaz *).

Si l'on objecte que le tas de plantes fauchées s'enflamme, quoiqu'il ne soit ni comprimé ni isolé, je répondrai d'abord que la compression est à la vérité petite, mais que l'isolement est assez parfait pour contenir une grande quantité de chaleur qui d'ailleurs s'échapperait; car dès qu'on découvre le tas déjà très échauffé en enlevant les couches supérieures, il se refroidit au point de ne plus produire la fermentation rapide; c'est ce que sait parfaitement l'agriculteur qui fait du foin de trèfle. Je répondrai en outre que cet isolement, assez considérable comme provenant d'une alternance cent fois répétée des plantes et de l'air qui se trouve autour d'elles, n'empèche pas l'oxigène atmosphérique de pénètrer dans l'intérieur du meulon, de se combiner avec les élémens des végétaux, et d'y augmenter la température. Nous devons l'existence des tourbes à la petite couche d'eau qui forme une cloison entre les végétaux et l'atmosphère, sans quoi chaque génération de plantes subirait la fermentation ou décomposition qui forme le humus là où le terrain n'est pas couvert d'eau.

---

*) Au reste, je n'entends pas ici par liquéfaction une fusion produite immédiatement par la chaleur, comme celle des métaux, et autres corps fusibles, mais une liquéfaction qui naît de la décomposition des végétaux sous l'influence de hauts degrés de chaleur.

Au reste, je regarde comme possible qu'il se soit formé des houilles sans couches minérales sur leur surface. Le cas peut avoir eu lieu lorsque les plantes, accumulées l'une sur l'autre, formaient une couche d'une grande épaisseur, comme dans l'exemple allégué de 60 pieds, cas auquel la partie supérieure formait l'isolement pour la partie inférieure. Celle-là n'ayant pas subi l'opération complète, les parties des plantes qui la formaient ne se seraient point aggrégées assez l'une à l'autre, et auraient été dispersées par les mouvemens de l'océan. Du reste, il est en ce cas d'autant plus nécessaire que le procès ait eu lieu sous une assez forte pression pour empêcher la formation des gaz.

Ainsi je crois avoir prouvé que la fermentation des substances végétales qui produit les tourbes et les houilles, est due à un isolement de ces substances, qui doit avoir été incomparablement plus parfait pour les houilles, et que la Nature nous indique ce parfait isolement, non seulement par leur plus grande compactilité, et le plus haut degré de carbonisation, mais aussi par le gite profond où elles ont été formées. Or, comme je crois avoir prouvé que cet isolement n'a pu avoir lieu que dans l'océan lorsqu'il se précipitait encore des roches, et qu'il exerçait encore une très haute pression, l'on doit en conclure que *les houilles sont des productions sous-marines*, *et les tourbes des productions continentales.*

Sur la nourriture des premiers produits de la végétation.

M. Th. de Saussure a prouvé dans son ouvrage classique: *Recherches chimiques sur la végétation*, que l'acide carbonique est le vrai aliment des plantes en ce que l'action des rayons solaires décompose cet acide aspiré soit par les racines, soit par les parties vertes de la plante, qui expire l'oxigène, et conserve le carbone. La putréfaction des plantes mortes, reproduisant de l'acide carbonique, les plantes vivantes s'en emparent en même tems que l'oxigène atmosphèrique reproduit cet acide en se combinant avec le carbone contenu dans le humus. J'ai indiqué dans ma Physique de la terre une troisième source d'acide carbonique, qui se trouve dans le gaz hydrogène carboné produit par la pourriture des plantes et des animaux, gaz qui

s'élève dans l'atmosphère, en gagne les plus hautes régions en s'avançant vers les pôles où son inflammation produit le superbe phénomène des aurores boréales, et livre pour produit de l'eau et de l'acide carbonique ramenés tous deux par leur pesanteur spécifique à la surface de la terre, et mis à la disposition de la végétation.

Avant qu'il existât de plantes, il ne pouvait exister de terreau dont le carbone eut pu fournir, par sa combinaison avec l'oxigène, l'acide carboniqne qui constitue la nourriture des végétaux, puisque, comme nous nous en convainquons tous les jours, le terreau (humus) ne naît que de la décomposition des plantes et des animaux. Il est vrai que l'art fait végéter des plantes sans humus, dans de l'eau ou dans du sable humecté; mais alors c'est l'acide carbonique qui se trouve dans l'air qui fournit la nourriture à la plante. La nature même nous offre quelque fois ce phénomène; témoin le cerastium que mon fils découvrit près de la cime du Kasbeck, à 1000 pieds au-dessus de la ligne des neiges permanentes, en pleine fluer et avec des graines, croissant dans des débris de porphyre délité où il n'y avait aucune trace de humus.

Mon système géologique statue que l'atmosphère primitive a dû contenir une très grande quantité d'acide carbonique pour précipiter les calcaires dont la base était tenue en solution dans l'océan. La même raison, fondée sur les principes que je viens d'exposer, doit faire admettre que le carbone nécessaire à la végétation a dû également se trouver dans l'atmosphère en forme d'acide carbonique. D'où il suit naturellement que la végétation a dû diminuer de plus en plus la quantité de ce gaz qui restait après la précipitation des calcaires, jusqu'à ce qu'il soit arrivé à une certaine proportion constante relativement aux autres principes constituants de l'atmosphère, proportion établie par la recette produite par la décomposition des corps organisés, et par la dépense produite par la végétation toujours renouvelée.

Il suit de ces prémisses que l'atmosphère avant l'organisation végétale avait plus de masse et pesait sur tous les corps plus qu'aujourd'hui, qu'elle offrait une autre proportion de ses parties constituantes, et qu'elle contenait une plus grande nourriture végétale. D'où nous devons conclure que la végétation primitive doit avoir été extrêmement abondante, ce que nous annoncent les immenses couches de houilles,

celles de terreau, et la grandeur colossale de plusieurs espèces que nous trouvons aujourd'hui à l'état de plantes fossiles.

Nous pouvons même pousser nos conséquences plus loin. La Botanique nous instruit que certaines classes de plantes, telles que les algues, les conferves, les fougères, les lycopodiacées, etc. croissent de préférence, les unes même exclusivement, sur des terrains où une forte putréfaction de substances végétales ou animales produit une surabondance d'acide carbonique. Nous en trouvons une preuve décisive, la plus ancienne et en même tems la plus récente dans la description du lac Solfatara que le célèbre et si justement regretté H. Davy nous livre dans ses *Consolations in Travel, or the last days of a Philosophie.* Après avoir décrit comment ce lac forme continuellement les tufs calcaires qui couvrent ses bords, il nous dépeint ce lac comme une masse d'eau saturée d'acide carbonique, qui en plusieurs endroits se dégage en telle abondance qu'on croirait presque que cette eau bout. A l'endroit le plus tranquille il a trouvé que l'eau contient plus que son volume de cet acide et une petite quantité d'hydrogène sulfuré, même après avoir été secouée, et exposée à l'air atmosphérique. Il ajoute que la température élevée *) de cette eau et l'abondance de l'acide carbonique y produisent une végétation très vigoureuse; les bords, composés de travertin, sont partout couverts de joncs, de Lichen, de conferves et autres plantes aquatiques. Il ajoute encore que cette végétation est si luxurieuse à cause du dégagement d'acide carbonique, que, même en hiver, des masses de conferves et de Lichens, mêlées de travertin qui se précipité, se détachent des bords et forment de nombreuses îles flottantes. La formation artificielle des tourbes, et les grands marais du Duché de Brême, offrent le même phénomène. Ces îles ne se soutiennent sur l'eau que par le gaz acide carbonique qui se dégage du fond, et de leur propre substance par le procès de la fermentation putride. Nous pouvons déduire a

---

*) Nous nous étonnons que Davy nomme ici la température *élevée* comme une des causes; car il dit lui-même que dans les endroits les plus chauds elle est = 80° F. ce qui fait $21\frac{1}{3}$ R. Or cette température est très ordinaire en été dans la Livonie et même à Pétersbourg. Je l'ai vue monter en Livonie jusqu'à 30° R., dans le même pays où j'ai vu le mercure geler pendant l'hiver de 1799 à 1800.

priori de ces données que ce seront ces familles de plantes d'une organisation inférieure que la nature a produites les premières, et qu'elle n'a procédé que successivement à la formation des familles d'un ordre supérieur. Ces conclusions se trouvent pleinement justifiées par la Géognosie qui nous a signalé précisément les familles d'un ordre inférieur comme de la plus ancienne formation et la gradation successive aux plantes d'une organisation plus variée, et dont nous devons le tableau extrêmement intéressant à M. Adolphe Brongniard.

Sur l'animalisation primitive.

Cette loi que la nature nous offre dans la succession de ses productions végétales, elle nous l'offre encore dans la succession des familles d'animaux. La classe la plus inférieure est celle dont les individus n'ont pas besoin de matière organisée pour se nourrir, mais qui trouvent leur nourriture dans l'eau de la mer ou des continens, soit qu'elle consiste dans l'acide carbonique dont ces eaux s'imprègnent, soit qu'elle se compose de débris désorganisés de plantes ou d'animaux décomposés. Si nous retranchons de cette grande classe les animaux purement gélatineux dont les restes n'ont pu se conserver faute de matière indestructible, les coquillages forment les familles les plus inférieures, et ce sont ces familles précisément qui nous offrent les plus antiques restes de l'organisation animale primitive. Ce n'est que dans les dernières couches de l'écorce du globe que nous commençons à découvrir des animaux vertébrés; et, ce qui est bien remarquable, c'est que les premiers animaux terrestres de cette classe appartiennent à la famille des crocodiles et hypopotames, qui ne prospère que dans les terrains marécageux où l'atmosphère a toujours une surabondance d'acide carbonique nuisible aux autres races.

Ainsi nous voyons ici, comme dans la nature végétale, les classes et les familles d'animaux gagner successivement en degrés de perfection organique à mesure que la surabondance d'acide carbonique disparaît de la surface de la terre jusqu'à l'éléphant qui, malgré sa lourdeur apparente, a de tous les animaux le plus de sens intellectuel et moral, l'éléphant qui ne se trouve que dans les dernières cou-

ches d'alluvion. Or, si c'est à juste titre que nous considérons l'homme comme l'organisation la plus parfaite de la nature, si nous sommes obligés d'avouer que les facultés intellectuelles et morales sont dans les animaux en proportion de la perfection de leurs organes, la pensée et le sentiment moral exigeant pour agir et se perfectionner des organes de plus en plus délicats formants des ensembles de plus en plus harmoniques, nous en déduirons sans peine que l'homme a été le dernier ouvrage du créateur, et nous pouvons ajouter à ces preuves d'induction que de tous les animaux, c'est celui dont l'organisation comporte le moins d'acide carbonique dans l'air qu'il respire. D'où il suit que l'homme n'a pu naître et exister que dans une atmosphère de même nature que celle dans laquelle il vit aujourd'hui. Voilà donc le grand théorème de M. Cuvier que *la race humaine est postérieure aux races d'animaux enfouïs dans les terrains de dernière formation*, et que par conséquent il ne peut exister d'hommes fossiles, prouvé en théorie. Cet illustre Naturaliste apprendra avec plaisir que la théorie géologique de l'acide carbonique, trouvée par son plus ancien ami, met sa thèse, qu'il a élevée sur des milliers d'observations et de comparaisons d'os fossiles, au dessus des fausses trouvailles d'os humains soi-disant fossiles, qu'il paraît être aujourd'hui à la mode de lui opposer.

Principes sur lesquels doivent se baser les systèmes de Géognosie et de Géologie.

J'ai déja émis dans mon *Grundriss der Physik der Erde und Geologie*, 1815, dans mes *Entretiens sur la Physique*, 1824, et ailleurs quelques idées sur la défectuosité et l'imperfection des méthodes usitées en Géognosie et en Géologie. Je vais essayer de développer ces idées, d'autant plus que l'on n'en est pas encore venu, surtout en France, à distinguer, comme on le doit, ces deux branches de nos connaissances naturelles.

Le célèbre Werner, que l'on peut nommer le fondateur de la Géognosie, a cru devoir abandonner les caractères oryktognostiques dans le système des roches qui forment l'écorce de notre globe. Il a même cru plus analogue à la science d'en

chercher les caractères géognostiques dans l'âge relatif des roches et d'en faire la base de son *système géognostique*, s'imaginant trouver, dans la suite des superpositions, des indices sûrs de cet âge. L'Europe entière a admis ce principe, et l'on a vu en très peu de tems les écoles Wernériennes naître et fleurir partout, même en Amérique. Dès lors le système a bien subi quelques changemens, forcés par les nouvelles découvertes, mais son essence a subsisté et se retrouve dans toutes les Géognosies qui ont paru en France, en Allemagne et en Angleterre jusqu'au moment où j'écris ces lignes. Personne ne sentait que traiter ainsi la Géognosie, c'était anticiper sur la Géologie. M. D'Aubuisson de Voisins paraît avoir reconnu le premier en France cette inconséquence, et c'est ce qui l'a probablement porté à traiter la Géognosie et la Géologie à la fois, intercalant les explications géologiques entre les descriptions géognostiques; et c'est ce que l'on peut faire de mieux tant que l'on ne voudra pas abandonner l'idée fondamentale du système géognostique de Werner.

Le *système géologique* de Werner ne mérite pas ce nom; car il n'explique rien. Uniquement occupé de l'idée de placer les roches les unes sur les autres et de deviner leur âge relatif, le grand Minéralogiste se contente, pour toute mécanique, de faire baisser et hausser l'océan selon le besoin imaginaire qu'il en a, sans rien dire sur les forces qui doivent avoir produit ces mouvemens gigantesques. Il oublie ou ignore que les continens déjà formés en partie, peuvent s'élever, et même s'abaisser tout aussi bien que l'océan, et recevoir par le procès continué de la précipitation générale des espèces de roches différentes de celles qu'ils eussent reçues, s'ils ne s'étaient pas élevés ou abaissés. Comme toutes les variétés de création se font dans ce système par ces oscillations gigantesques de l'océan entier, il s'en suit que les produits modifiés par ces mouvemens devraient se trouver répandus uniformément sur toute la surface du globe, et produire des couches à surfaces parallèles, d'égale épaisseur dans toute leur étendue. Mais comme l'observation nous offre partout le contraire, Werner est forcé de détruire par d'énormes courans (dont au reste il n'explique point l'origine autrement que par le retrait, et le retour de tout l'océan) sûrement plus des $\frac{9}{10}$ de sa création, sans pouvoir assigner les lieux où se trouvent

ces immenses débris. Sa dernière formation, celle du basalte, nous en offre l'exemple le plus frappant. Toutes les vallées des continens et des îles devraient être comblées de débris de roches basaltiques. Je ne parlerai pas des défauts particuliers de ce système, comme par ex: de sa théorie des filons, que Werner n'a su ni former ni remplir d'une manière satisfaisante.

Je passerai de même sous silence le système de DeLuc qui est beaucoup plus rationnel que celui de Werner, et que j'ai réduit à sa vraie valeur dans mes deux ouvrages cités. Il ne soutient pas la critique du Physicien, quoique conçu par un Physicien illustre. Il est vraisemblable que le désir d'ajuster la Géologie aux époques créatrices de Moïse a enchaîné son génie.

Entrons en matière, et commençons par bien définir les mots de *Géognosie* et de *Géologie*. La plupart des auteurs les confondent encore.

La *Géognosie* est la description des roches et autres matières qui composent l'écorce de notre globe terrestre, autant qu'on connaît cette écorce par l'observation. Or, une description ne doit point contenir d'hypothèse, mais uniquement un tableau fidèle de ce qui est. On a mêlé l'hypothèse à la Géognosie en la chargeant de divisions fondées sur l'âge relatif des roches, et cet âge est une hypothèse qui se trouve démentie par les observations de Werner même, et les observations postérieures. Donc nous n'avons pas encore de vraie Géognosie.

La *Géologie* est la Physique de la Géognosie, comme la Physique générale est celle de la matière en général. La Géognosie est un grand phénomène à expliquer. Sa solution doit se trouver dans la Physique, la Chimie et la Mécanique dont les principes doivent nous expliquer comment l'écorce de notre globe a pu se former telle que nous la voyons aujourd'hui. La Géologie doit faire sortir de ces principes la structure entière de cette écorce avec sa régularité, et ses irrégularités dans les grandes masses dont elle est composée. Dire que la Géologie est l'histoire de la terre, comme on le dit encore tous les jours, c'est parler dans les idées de Werner, c'est bannir la science de la Géologie, c'est nous donner un tableau historique, plus souvent faux que vrai, pour de la science. La Géologie doit expliquer, non raconter

et si ses explications sont justes, les narrations se feront d'elles-mêmes. De Luc, Buffon et leurs prédécesseurs ont voulu mettre de la science dans la Géologie. Werner l'en a bannie pour nous faire des contes sur les âges des roches et des métaux. Veuillons enfin ne plus être des enfans.

Qu'on ne craigne pas que la vraie Géologie devienne un roman de Physique. Cela est impossible, si on la base strictement sur les données géognostiques, et sur les principes avérés de la théorie, c'est-à-dire de la Chimie, de la Physique et de la Mécanique. Car quels moyens avons nous pour découvrir la vérité, si ce n'est une théorie sûre, appliquée aux phénomènes bien examinés? Nous ne pourrons errer, ici comme ailleurs, que lorsque nos connaissances de théorie seront insuffisantes. Alors avouons ingénument notre ignorance; ou bien, si nous ne voulons pas laisser de lacunes dans ce grand tableau scientifique, remplissons les par de petits romans que nous donnerons pour tels, et qui auront au moins l'avantage d'indiquer une marche quelconque de nouvelles considérations *), et de nouvelles expériences à faire pour compléter la théorie.

A. *Plan de Géognosie.*

Il faut commencer par bannir du dictionnaire de la Géognosie le mot de *formation* comme exprimant des groupes de roches qui ont la même date, ou qui ont été

*) Mon système géologique offre dans le premier chapitre une de ces lacunes. L'idée de placer en solution dans l'océan primordial une partie des substances des roches et l'autre partie, comme réagent pour la précipitation, dans l'atmosphère, est juste, inattaquable, puisque c'est la seule qui offre des sources d'explications pour les productions du procès général de la précipitation, et leurs formes et leurs structures. Avant que Davy eut publié sa grande découverte que les alcalis sont des oxides, et que Berzélius eut soumis à la desoxidation même la silice, le système ne laissait point de lacune. A présent il en existe deux, l'une pour la formation de la soude et de la potasse, l'autre pour la précipitation de la silice. Mais je dis aujourd'hui: Les métaux sont-ils des substances simples? Tout le monde répond: oui. Mais sur quel fondement, et n'est-il pas possible qu'un jour la Chimie nous apprenne que les métalloïdes, peut-être tous les métaux, sont, comme l'ammonium, des composés d'azote, et d'une autre substance oxidable? Toutes les subtilités par lesquelles on a voulu faire de cet alcali un oxide dont l'hydrogène est la base, et l'azote le principe oxidant, sont — des subtilités et rien d'autre. Ainsi pour faire un pas de plus en Géologie il faut commencer par analyser les métaux. Toutes les autres hypothèses sont insoutenables.

formées sous les mêmes circonstances quoiqu'elles diffèrent entr'elles. Ce mot doit exprimer un acte de la nature, non un produit de ses forces créatrices, et ne convient par conséquent qu'à la Géologie. La faute de Logique, que l'on a commise jusqu'à présent dans l'acception usitée du mot de formation en Géognosie, est un attribut du système de Werner.

Il faut exclure toute division des roches qui se fonde sur leur âge ou sur le mode de formation, et moins encore y admettre des époques distinctes et générales de formations. Car ce n'est qu'après que le tableau géognostique sera formé qu'on pourra commencer la Géologie. On évitera de même dans la nomenclature des roches tout ce qui tient à l'idée que l'on s'est faite de leur origine ou de leur âge relatif. Il importe que tous les noms soient excusés d'hypothèses.

Il faut également rejeter de la nomenclature les expressions: *terrains de transport*, *d'alluvion*, *de sédiment*, etc. parce qu'elles contiennent déjà une hypothèse sur leur formation.

La première base de la Géognosie sont les *pierres* dont les roches sont composées. Celles qui entrent dans la composition de ces grandes masses sont au nombre de cinq, le quartz, le feldspath, le mica, le phyllade et l'amphibole. Si la Géognosie moderne en découvre de nouvelles, on les ajoutera à celles-là. La Géognosie doit commencer par la description très détaillée des pierres, relativement à leur composition, leur texture, leur pesanteur spécifique, leur fusibilité et leur couleur. La texture comprendra la forme cristalline ou non cristalline, la transparence ou opacité, la dureté et l'aspect de leur cassure.

De là la Géognosie passe aux roches, et autres masses qui forment l'écorce du globe terrestre et doit naturellement faire une division générale fondée uniquement sur les caractères vraiment géognostiques, non géologiques ou historiques. La division la plus naturelle et la plus simple est celle des substances non inflammables et des substances inflammables. Nous nommerons les premières ***Roches*** et les secondes ***Phlogites.*** La première se partage en *roches cristallisées* en *roches non cristallisées* et en *roches mixtes.* La seconde se partagera en *Phlogites à base métallique* pure ou

sulfurée, et en *Philogites à base de carbone et d'hydrogène* *). Dans ces descriptions, le Géologue n'oubliera pas les débris de plantes et d'animaux encore reconnaissables qui se trouvent dans les roches et les phlogites, mais qui, quoique d'une haute importance pour la Géologie, ne peuvent fournir une base de division géognostique. La Minéralogie proprement dite, ou l'Oryctognosie nous offre déjà une classification systématique des roches ou plutôt trois genres de classification, et c'en est bien assez. La Géognosie en empruntera les caractères et les noms des genres et des espèces, et n'a pas besoin de subdivisions subordonnées aux grandes divisions que nous venons de nommer.

Jusqu'ici la Géognosie n'a fait que rassembler les matériaux de l'édifice de l'écorce de notre globe; elle sait ce qui s'y trouve; mais l'ordonnance, ce qui fait de ces matériaux un édifice, le *gisement*, manque encore, et nous prenons ici ce mot dans son acception la plus générale, contenant tout ce qui se rapporte à la position des couches.

Ce qui frappe d'abord notre vue, c'est la *superposition* des couches de roches, et de phlogites. Le Géognoste comparera entr'elles toutes les suites de superposition que l'observation a fournies sur divers points de la surface de la terre. Il trouvera d'abord que les suites inférieures offrent une bien plus grande irrégularité que les supérieures, que la régularité diminue, et cela inégalement, en divers lieux, de bas en haut. Il observera que les couches inférieures sont plus généralement étendues sur la surface de la terre que les supérieures, et que celles-ci se trouvent d'autant plus isolées qu'elles se trouvent à une plus grande élévation au-dessus des autres; tout cela au reste non sans fréquentes exceptions. Il observera que dans les suites moyennes et supérieures, qui ont plusieurs couches communes en divers lieux de la terre, les unes ont une ou plusieurs espèces de roches de plus, et que là où certaines roches

*) J'abandonne à d'autres Géologues le plaisir d'inventer de nouveaux noms longs d'une ligne pour ces subdivisions. Quant à moi, je n'aime pas ces nomenclatures où il faut, pour les comprendre, où avoir recours à un dictionnaire ou s'aviser sur le sens de ces noms beaucoup plus de tems que pour lire ou même écrire les noms composés. Je sais que c'est une hérésie; mais j'espère en bon protestant qu'il y a salut hors de l'Eglise.

semblent manquer à la suite, elles sont en quelque sorte remplacées par des couches plus ou moins parentes, que l'on a nommées les *équivalents*, et que l'on ferait mieux de nommer les *suppléans*. Il observe que par fois les mêmes espèces de roche se suivent ici dans un autre ordre qu'ailleurs, et même quelque fois dans un ordre renversé. Il observera enfin que les roches superposées (sur tout les inférieures) offrent entr'elles des roches moyennes, qui sont des *passages* de l'inférieure à la supérieure, qui tiennent des propriétés de l'une et de l'autre, tandis que d'autres couches, gisant imédiatement les unes sur les autres, sont tranchées nettement, ne laissant entr'elles qu'une surface géométrique de superposition ou qu'une lame très mince d'une autre terre qui n'a point d'analogie avec la couche inférieure et la supérieure qu'elle sépare.

Le Géognoste cherchera dans toutes ces suites celles qui sont les plus générales, et en déduira un type de la constitution de l'écorce de la terre, type qui contiendra toutes les roches es tous les phlogites connus. Pour aider au coup-d'oeil il partagera ce type entier en trois étages, dont l'inférieur pourra contenir la suite la plus régulière (celle des roches primitives de Werner); le second la suite déjà moins régulière jusqu'aux premières houilles, qui contient déjà quelques débris de plantes et des races innombrables de coquillages; le troisième les autres couches, qui offrent le moins de régularité et en outre des débris d'animaux vertébrés *).

Il ne s'en tiendra pas à ce tableau général, mais il offrira dans des tables particulières les principales suites de roches et de phlogites, telles qu'elles se rencontrent sur les points observés de la terre. Les suites des couches se trouveront dans la verticale et les lieux en direction horizontale, de sorte que ces tables puissent se ranger les unes à côté des autres selon la longitude des lieux et selon la latitude, afin que leur ensemble offre une carte géognostique du globe. En avant de ces tables se trouvera le type général dont nous venons de parler, et qui contiendra toutes les couches connues. Les couches qui manquent dans les suites réelles consignées dans

---

*) Un géognoste plus savant préférera peut-être une autre division en étages. Celle-là me paraît la plus simple, la plus marquée, et la plus utile pour la Géologie.

les tables seront indiquées par un tiret, et les équivalens par des caractères particuliers. Il pourra même, à la manière des Géographes, dessiner deux plani-globes (ou même, pour plus de clarté, quatre) sur lesquels il écrira aux lieux observés le numéro de la table qui correspond à ces lieux. Il pourra même aller plus loin. En dessinant ses plani-globes sur une grande échelle, en donnant à chacun deux ou trois pieds de diamètre, il pourra indiquer par des couleurs déterminées les espèces de suites qui règnent aux points observés, et leur extension géographique. Des numéros serviront de renvoi aux tables. Un pareil ensemble de tables et de plani-globes indiquera non seulement les contrées de la terre qui restent encore à observer, mais fournira un tableau complet de nos connaissances géognostiques actuelles, et les chaînons de la grande chaine des roches et phlogites qui forment l'écorce du globe terrestre. Chaque nouvelle observation fournira une nouvelle table et un nouveau point connu sur les plani-globes, en sorte que toute la Géognosie future ne consistera qu'en additions qui trouveront d'elles-mêmes leur place dans ce système naturel, sans que l'on soit forcé d'en faire de nouvelles éditions *).

Le gisement doit être encore considéré sous le point de vue de la *direction* et de *l'inclinaison des couches;* c'est ce que l'on nommait proprement jusqu'aujourd'hui le gisement. Ces deux circonstances du gisement doivent être notées à chaque groupe observé. Pour cet effet l'on donnera dans les tables proposées à chaque colonne géographique deux colonnes particulières, dont l'une contiendra la direction principale et l'autre l'inclinaison. Dans les cas où le groupe affecte une figure particulière, de manteau, de cave, etc. ces deux colonnes conjointes l'indiqueront. Pour cet effet cet article du gisement (dans le texte) contiendra la description exacte de toutes les formes de gisement et de superposition spéciales ou hétérogènes aux superpositions générales, traitées plus haut (en Allemand *ungleiche Lagerung*).

---

*) On peut juger de l'utilité de ces plani-globes par la belle carte géognostique de l'Allemagne et des pays adjacens, par M. Schropp, dont l'enlumination a été dirigée par M. de Buch et exécutée par M. de Dechen. Cette carte, composée de 42 feuilles, indique 48 espèces de roches exprimées par autant de couleurs. Pour les plani-globes il suffira de 18 a 20 roches, dont les couleurs et les numéros se distingueront d'autant plus facilement.

On n'oubliera pas les *filons*, qui forment un genre à part de gisement. Le texte de l'ouvrage en contiendra une description pure et simple, quoique détaillée, sans aucune indication qui ait rapport à leur origine. On les partagera en quatre espèces relativement à leur contenu. La première est celle des filons qui contiennent uniquement des matières cristallisées d'un caractère particulier, et auxquelles on a donné le nom de *gangues*. La seconde contient des métaux avec de la gangue ou (ce qui est rare) sans gangue. La troisième contient des matières entièrement semblables à celles des grandes couches, et la quatrième des matières assez semblables à celles-là, mais plus ou moins modifiées dans leur texture, en sorte que l'on reconnaît les matières premières. La considération des filons fournira dans la première colonne verticale (le type général) une ligne de plus qui aura tout simplement le nom *filons* qui dans les colonnes géographiques des tables sera remplie par le minéral contenu dans les filons.

Il est encore une relation de gisement que le Géognoste ne doit pas omettre, *l'éparpillement des masses* innombrables *de roches*, grandes et petites sur la surface de la terre, qui n'ont point leurs analogues dans les terrains sur lesquels on les trouve, et au nombre desquelles on doit ranger les sables de mer et de terre. Il décrira l'espèce de ces masses, leur grandeur, leur configuration extérieure, leur délitement plus ou moins grand, et les lieux où on les trouve, soit à découvert, soit enterrés dans le terrain, dont on indiquera le penchant. Ces données formeront une colonne particulière dans les colonnes géographiques.

Les superpositions générales des couches ne peuvent se rapporter directement aux *hauteurs absolues* au-dessus ou au-dessous du niveau de la mer, que dans les cas de gisement horizontal. Cependant il est intéressant de connaître ces hauteurs de tous les groupes, inclinés ou non. On ajoutera donc pour tous les groupes une colonne qui contiendra toutes les hauteurs mesurées.

Enfin, il est utile de noter les *épaisseurs* (*Mächtigkeit*) des couches de chaque groupe. Elles formeront la dernière colonne qui sera placée à gauche immédiatement à côté des noms des roches ou phlogites.

Je crois m'être suffisamment expliqué sur la nature de ces tables, sans en livrer un spécimen particulier, qui me paraît superflu.

Cet ensemble de connaissances géognostiques serait au reste encore imparfait si l'on n'y traitait particulièrement les substances volcaniques. Le Géognoste empruntera de la *Physique de la terre* la théorie des volcans, qui comprend la description des *matières évidemment volcaniques*, dont on sait positivement qu'elles ont été déjetées par les volcans. Les autres, présumées volcaniques, sont du ressort de la Géologie, et ne paraîtront dans la Géognosie que parmi les autres roches dans les suites et les gîtes auxquels elles appartiennent. Pour les matières évidemment volcaniques, on ajoutera aux colonnes géographiques des tables une nouvelle colonne spéciale qui indiquera les volcans encore actifs ou éteints, et les espèces de matières qu'ils livrent ou ont livrées autrefois.

L'on ne niera pas qu'une Géognosie traitée ainsi ne fournisse un tableau vrai et facile à saisir de l'écorce du globe terrestre quant à son intérieur, aussi étendu que nos connaissances le permettent et sans aucun préjugé, comme il doit être pour servir de base à une Géologie raisonnée. J'en ai retranché la description extérieure, des montagnes, des cavernes, des mers, des lacs, des fleuves, des climats, etc. comme objets appartenants à la *Physique de la terre* et supposés connus.

B. *Plan de Géologie.*

L'on me dispensera volontiers d'alléguer les idées vagues des anciens sur la Géologie et celles des modernes depuis Thomas Burnet et Descartes jusqu'à Werner, pour prouver que nous n'avions jusqu'alors aucune Géologie qui méritât ce nom. Celle de Werner est proprement encore régnante partout, hors peut-être l'Allemagne où l'on connaît le système que je publiai en 1815 dans ma *Physique de la terre*. M. Elie de Beaumont est le seul auteur français que je sache, qui se soit écarté formellement des idées Wernériennes, et cela dans un seul point qui fait partie intégrante de ma Géologie. Au reste ses *Recherches sur quelques unes des révolutions de la surface du globe* n'est pas un système géologique; mais l'idée qui fait la base de cet excellent

ouvrage, en sapant les fondemens de la Géologie de Werner, offre la clef d'un grand nombre de phénomènes, comme je l'ai détaillé il y a 15 ans dans mon système. Je me dispense également de parler du vieux système de Leibnitz et de Buffon remis de nos jours sur la scène. Je me suis déjà expliqué sur ces idées plutoniques dans un article inséré dans le *Bulletin des sciences physiques* de M. le Baron de Férussac et les ai réfutées en forme dans un mémoire particulier qui se trouve inséré dans ce même volume (page 501). Je crois donc qu'il ne sera pas inutile de livrer une esquisse des principes qui doivent guider le Géologue qui veut élever l'édifice d'un système qui satisfasse à l'idée que nous devons nous faire de la Géologie.

Admettre un Océan qui couvrait autrefois le noyau de la terre et contenait toutes les matières qui ont formé nos continens soit en solution, soit disséminés mécaniquement dans sa masse, postuler une précipitation générale sans en indiquer la cause et la marche, c'est s'interdire tout moyen d'explication des suites de couches qui forment l'écorce du globe, et cependant c'est le premier problème géologique qui s'offre à l'esprit. Admettre que tout était fait, mais en état de fusion, et qu'il n'a fallu que le refroidissement pour établir l'ordre naissant, c'est ne rien dire, et en même tems contredire tous les faits géognostiques. DeLuc, qui apparemment n'a pas cru la Physique capable d'atteindre à ce problème, a supposé que tout était mêlé primordialement à l'océan, mais que cet océan était gelé jusqu'à ce que la volonté divine le dégelât par la création du luminique, est l'antipode des Plutonistes. La guerre encore assez récente, que les Neptuniens et les Vulcanistes se sont faite, n'est pas encore oubliée. Les uns voulaient tout faire par des précipitations chimiques et des courans dans l'océan qui ont dû ravager l'ouvrage déjà tout fait, sans pouvoir assigner aucune cause ni aucun mode à ces précipitations et à ces énormes courans. Les autres, ne voyant partout que des volcans, oubliaient de former et la matière de ces volcans et la matière qu'ils leur donnaient à bouleverser et paraissaient ne vouloir pas savoir que les couches inférieures de l'écorce du globe affectent une régularité incompatible avec une formation purement volcanique.

Dans cet état des choses, l'idée de réunir les deux systèmes, le neptunisme pour l'ordre et le vulcanisme pour le désordre, doit paraître naturelle et la vraie clef du secret de la formation de l'écorce du globe. Elle offre en outre d'immenses avantages, qui en ressortent comme d'eux-mêmes dans le plan que j'esquisse. Mais elle offrait un écueil que Werner même, qui s'était facilité le travail on ne peut pas d'avantage, n'avait pas évité. C'était de supposer des époques générales de formation et de perturbation; car par là, on s'engageait à des opérations générales sur la surface de la terre, que la Géognosie dément partout. Ainsi, en réunissant comme bases du système le procès général de la précipitation avec l'action volcanique, il ne faut pas les séparer dans le système, mais considérer l'action volcanique comme s'étant fait sentir pendant que le procès chimique durait encore et après que des masses considérables de roches avaient déjà été formées.

Un autre écueil est de faire agir l'action volcanique partout en même tems; c'est établir dans les effets une uniformité de tems et de lieux que la Géognosie désavoue également. Les éruptions volcaniques de nos jours, les formations de nouvelles montagnes et de nouvelles îles, les tremblemens de terre sont des phénomènes isolés relativement aux tems et aux lieux. L'analogie doit donc nous faire supposer qu'ils l'étaient autrefois également; et si le tableau géognostique nous offre partout des effets volcaniques isolés, et des changemens de formation également partiels, cette supposition devient une vérité irréfutable. La seule différence que nous devons statuer entre les opérations volcaniques d'autrefois et celles qui ont lieu de nos jours, consiste en ce que celles-là se sont répétées bien plus souvent, sur beaucoup plus de points et dans bien des cas sur une bien plus grande étendue de terrains; ce qui est bien naturel, les grandes opérations primordiales des volcans ayant épuisé la plus grande quantité des matières qui alimentent ces procès terribles *).

---

*) Ces idées sur la nullité des époques générales et sur l'action volcanique à qui nous devons nos grandes chaînes de montagnes et beaucoup de petites, je les ai travaillées dans ma Géologie, dont elles font une partie intégrante, et sont contenues dans le mémoire cité de M. Elie de Beaumont que l'Académie des sciences de Paris a couronné des plus grands applaudissemens sur le rapport rédigé par M. Alex. Brongniard.

Il suit des ces considérations, abstraction faite de l'hypothèse, au reste très fondée, que c'est à l'action volcanique que nous devons les révolutions, que la Géologie doit se diviser en quatre grands chapîtres, dont le premier contient la théorie du procès chimique de la précipitation générale; le second la théorie des révolutions qui ont bouleversé les produits réguliers du procès chimique pendant qu'il était encore en activité; le troisième la théorie des produits de l'action chimique et révolutionnaire combinées; le quatrième la théorie des filons et des matières volcaniques autres que celles que nous voyons encore aujourd'hui éjetées par les volcans.

Ier Chapitre.

Théorie du procès général de la précipitation.

Ce chapitre n'existait dans aucune Géologie. L'on postulait tout simplement la précipitation chimique ou mécanique des substances dissoutes ou disséminées dans l'océan ou bien fondues par la chaleur innée du globe, sans aborder aucunement le problème. Naturellement on trouvait les suites de roches toute faites sans se soucier du mode de formation, et la Géologie ne s'occupait que du soin de détruire la régularité et l'horizontalisme des produits de la précipitation générale. Ainsi cette Géologie était une science de destruction, tandis qu'elle doit être une science de création. Dans le système dont je livre ici l'exposition elle est ce qu'elle doit-être, une science créatrice, même au moment où elle détruit la régularité chimique, et cela non seulement à l'intérieur, dans ses productions immédiates, connues sous le nom de productions volcaniques, mais aussi à l'extérieur et en d'autres lieux, à des distances plus ou moins grandes, surtout par les soulèvemens.

Dès que le Géologe aborde le problème de la précipitation générale, il doit se dire que, tout procès chimique consistant dans l'action réciproque des substances hétérogènes, l'océan devait tenir en solution une partie des principes qui constituent

nos roches et que l'autre partie devait se trouver ailleurs pour opérer comme réagent. Or ces réagens chimiques ne pouvaient se trouver sous l'océan, à la surface du noyau de la terre; car dès qu'ils eurent été couverts d'une couche de roches de quelques toises au plus, ils auraient cessé d'agir, ne se trouvant plus en contact avec l'océan. Ces réagens ont donc dû se trouver nécessairement dans l'atmosphère terrestre qui était constamment en contact avec la surface de l'océan, quelques changemens qui se soient passés dans l'une et l'autre. Voilà donc une vérité démontrée, qui peut et doit servir de base à la première partie de la Géologie. Reste à la Chimie à choisir, d'après ses lois, d'un côté quelles substances ont dû être primordialement dissoutes dans l'océan et quelles étaient les substances qui les y tenaient à cet état, et de l'autre côté quelles ont dû être celles qui produisirent la précipitation. C'est un problème à plusieurs inconnues et à plusieurs équations, qui serait rigoureusement soluble si le des nombre unes et des autres était égal; mais il est à présumer que, dans l'état actuel de nos connaissances, il ne le soit pas, ce qui pourrait forcer à quelque hypothèse, dont l'avenir prouvera la vérité ou l'erreur. Au reste le nombre des inconnues diminue par deux considérations. La première est que les réagens contenus dans l'atmosphère doivent nécessairement avoir la nature gazeuse à une température moyenne ou un peu au-dessus de la moyenne. La seconde est que les terres et les oxides proprement dits, comme non susceptibles d'être mis à l'état de gaz à une température moyenne ou un peu supérieure, devaient se trouver dans l'océan, joints à une autre substance pour les rendre solubles dans l'eau. Il reste donc encore à consulter les données géognostiques pour déterminer le choix. Si ce choix est heureux, le Géologue ne saura pas seulement former les espèces de roches, mais sa synthèse chimique produira les suites comme nous les trouvons dans les roches inférieures, pendant la formation desquelles le procès n'avait pas encore été influencé dans sa marche par les opérations volcaniques, et expliquera la nature des roches, au moins du plus grand nombre. Il pourra même s'essayer à construire dans les principes de la Chimie et de la Physique la structure granitique et schisteuse qui caractérisent particulièrement les plus anciennes formations.

IIème Chapître.

Théorie des révolutions de l'écorce de la terre.

Il est facile de prouver que le grand procès chimique de la précipitation générale ne pouvait pas seul fournir les forces nécessaires aux révolutions. Il pouvait au plus occasionner quelques faibles courans dans l'océan en élevant la température des couches où il travaillait avec le plus d'énergie, mais n'avait aucune prise sensible sur les roches déjà précipitées. Il faut trouver un autre agent, capable de fournir les plus grandes forces mécaniques, afin d'opérer les soulèvemens, les fracassemens et tous les désordres que la Géognosie nous offre dans l'intérieur de l'écorce de notre globe. Or nous avons encore de nos jours des effets tout-à-fait semblables dans les phénomènes volcaniques. Ces effets d'aujourd'hui sont, à la vérité, et très heureusement pour le pauvre genre humain, beaucoup plus rares et infiniment moindres que ceux d'alors; mais la théorie des volcans prouve que l'action volcanique, là où elle est active, y déploie des forces mécaniques bien supérieures à celles qu'il a fallu pour soulever nos continens et que s'il ne se fait plus de si énormes soulèvemens, c'est principalement parce que la résistance manque, les volcans encore actifs ayant tous des débouchés ou se les procurant facilement. Mais ce qui doit imprimer le sceau d'une vérité physique démontrée, c'est que nous ne connaissons dans toute la nature aucune force physique égale à celle que déploie l'action volcanique, l'élasticité de la vapeur à de très hautes températures.

Ainsi le Géologue a toute l'immensité de l'action volcanique à sa disposition, et son usage est justifié non seulement par le défaut de toute autre force égale dans la nature, mais surtout par les nombreux volcans actifs et éteints que nous connaissons et par la grandeur des masses que ces effets partiels de l'action volcanique a élevés au-dessus du niveau des mers et des continens. L'Antisana, le Cotopaxi, de 3000 toises d'élévation au-dessus de la mer ont vomi par leur sommet des masses énormes de matières volcaniques; l'Ararat, le dernier des grands volcans observés par des Physiciens, offre un cône de 2700 toises de hauteur au-dessus de la mer, couvert

d'un manteau non interrompu de laves, depuis son sommet jusqu'à sa base, qui a 24 lieues ou près 15 milles géographiques en-diamètre. La théorie des volcans prouve que la force élastique qui a élevé et fait écouler les masses de l'Ararat a dû pouvoir supporter une colonne de laves au moins de 8700 T. de hauteur, et la mécanique des fluides prouve que la même force qui élève une colonne de fluide, peut élever un terrain entier de même pesanteur spécifique, de même épaisseur, et d'une surface indéterminée. Elle prouve même que ces gigantesques effets ne sont qu'une très petite partie de ceux dont l'action volcanique est capable par la production de la vapeur d'eau à la température qui règne dans les volcans.

La source des forces étant donnée, le Géologue doit d'abord expliquer pourquoi ces forces n'ont pas agi de tout tems, même avant que la précipitation générale ait commencé. Il doit nous dévoiler les causes qui ont en quelque sorte endormi ces forces colossales jusqu'à ce que le procès chimique eût produit des couches de 1000 toises d'épaisseur et plus; et quand il les aura fait agir à son gré, il doit nous dire pourquoi elles sont retombées dans leur première léthargie *).

La Mécanique doit nous révéler l'origine des montagnes. Mais le Géologue se tromperait fort s'il s'imaginait qu'il suffit de soulever la croute à moitié formée du globe et de la fracturer pour composer ces hautes et longues chaînes de montagnes qui sillonnent la surface de la terre en tant de directions, et moins encore les monticules attenants à ces chaînes ou formant des grouppes isolés. Il doit faire intervenir le procès chimique dans sa mécanique, comme il a fait intervenir la mécanique dans

---

*) Nous sommes encore incertains sur la profondeur à laquelle nous devons placer les foyers volcaniques. J'ai supposé (guidé par la mécanique seule) cette profondeur égale à au moins 6000 toises. Mais au moment où j'écris ces lignes, il me vient une idée qui fournira cette profondeur avec assez d'exactitude pour la théorie géologique. Cette profondeur doit être égale au moins à la somme des épaisseurs des couches soulevées et rompues, dont les surfaces de superposition sont à peu près parallèles entr'elles, jusqu'à ce que l'on arrive aux couches subséquentes qui couvrent les surfaces de rupture. Car ce sont ces roches parallèles qui ont dû avoir existé avant les soulèvemens. Le maximum d'épaisseur observée de ces couches est le minimum de profondeur qu'on doit admettre pour les foyers volcaniques. — Au reste cette idée a besoin d'être travaillée plus soigneusement, relativement aux couches de roches subséquentes et au niveau de l'océan d'alors et d'aujourd'hui. Je me contente de la signaler ici.

le procès chimique. S'il s'entend à manier ces deux agens, il trouvera que celui-ci non seulement forme et dépose des matières étrangères à la surface soulevée, mais que ces nouveaux dépôts changent la forme des masses soulevées, donnent aux montagnes de nouvelles formes, et il expliquera par là l'inégalité d'épaisseur de la même couche de roche qui se rencontre souvent, et cette inégalité deviendra à son tour une source d'explication du mode de formation des lieux où on l'observe.

Il offre en outre une nouvelle force à sa disposition, celle des courans plus ou moins rapides, causés par les soulèvemens et les affaissemens, et surtout (les plus violens) par les énormes abîmes que les voûtes soulevées et brisées offrent à l'engloutissement de la mer. Il peut encore disposer des immenses détonnations qui ont lieu dans ces engloutissemens par le contact immédiat de l'eau qui se précipite, avec le fond des cavernes volcaniques qui est à la chaleur rouge ou même à l'incandescence. Il mettra de même en ligne de compte les inflammations de plusieurs milliers de lieues cubes de gaz hydrogène à la même température au moment où il se mêle à l'atmosphère, et dont les colonnes de feu du Vésuve ne nous offrent qu'une faible miniature. Car ces incendies changent non seulement la nature de l'atmosphère du lieu en lui enlevant une si grande quantité d'oxigène, mais ils produisent des courans énormes en direction verticale et horizontale qui mélangent les couches de l'atmosphère qui offraient de bas en haut des suites hétérogènes par l'action du procès chimique qui soustrayait des couches inférieures leurs divers élémens en proportions différentes selon l'affinité de ces principes avec l'eau à la surface de l'océan. Les soulèvemens purs et simples produisaient déjà de ces courans atmosphériques, mais avec une moindre énergie. Ce conflit de toutes les forces physiques, chimiques et mécaniques nous offre le tableau le plus vivant du chaos.

L'océan ne resta pas neutre dans cet orage des forces les plus violentes de la nature. Il fut également bouleversé partiellement, et ses couches, qui affectaient auparavant, ici encore plus que dans l'atmosphère, des suites régulières successivement variées par le procès chimique tant qu'il ne fut pas troublé par les opérations volcaniques, se confondent dans ces lieux tourmentés, et doivent y engendrer de nouvelles

roches très différentes des précédentes. Qui pourrait détailler toute la variété d'effets que tant de causes réunies peuvent opérer? Mais la Géognosie nous offre dans l'irrégularité des couches de roches le sceau de ces opérations, dont la multiplicité ne nous laissera que rarement en peine d'expliquer le local géognostique des lieux observés. Mais il faut pour cela une Géognosie comme je viens d'en donner le plan.

IIIème Chapître.

Des productions dues à l'action simultanée du procès chimique et des opérations mécaniques.

Le Géologue doit commencer ce chapître par une considération de l'état de l'océan après qu'il eut déposé les masses qui ont précédé les révolutions. Cet état est variable dès le commencement du procès chimique; car, à mesure que les roches se formaient, l'océan perdait des substances qu'il tenait en solution et perdait non en proportion des quantités existantes; ce qui se constate par la proportion des quantités des parties constituantes des roches qui, par exemple, deviennent de plus en plus pauvres en silice et plus riches en alumine et en chaux, plus elles s'élèvent au-dessus des premières couches.

Cette loi est très souvent violée à la suite par les grands mouvemens partiels que subissent de grandes masses de l'océan (et aussi de l'atmosphère) par les révolutions mécaniques. Elle l'est encore, de même que la suite des couches, par les simples soulèvemens, quelque lents ou rapides qu'ils soient, parce que le terrain se trouve alors dans des couches de l'océan qui contiennent les élémens des roches en d'autres proportions; l'on peut même admettre que plus les passages d'une roche à une autre sont brusques, plus les roches immédiatement superposées l'une à l'autre sont hétérogènes, et plus les soulèvemens ont été rapides. Ainsi le Géologue, s'il veut donner une idée satisfaisante de ces modifications des roches, doit étudier l'état de l'océan dans les tems où les opérations volcaniques ont commencé. Il trouvera un travail difficile, à raison de la quantité d'élémens chimiques primordiaux et composés

ou décomposés pendant le procès chimique lui-même, lorsqu'il n'était pas encore troublé. Pour se tirer de ce dédale il faut qu'il étudie avec soin le phénomène de la *marche spontanée des substances chimiques*, qu'il ne trouvera que dans mes ouvrages *). Sans ce guide, il échouera presque toujours contre les écueils de ce dédale obscur, nommément contre la grande variété des suites qui va quelquefois jusqu'au renversement.

Nous commençons par une classe de productions très variées, celle des *conglomérats*, composés de débris de roches déjà formées, mais divisées et disséminées par les actions mécaniques des volcans et des courans, tandis que le procès chimique se continuait et formait de nouvelles roches qui enveloppaient ces débris. Le caractère de ces produits est l'irrégularité, relativement aux espèces de débris et au mélange. D'autres conglomérats, composés uniquement de débris et d'une pâte alumineuse ou autre qui s'annonce également comme débris, appartiennent aux formations de sédiment.

Nous passons aux *amphibolites*, dont il est difficile de savoir si quelques-uns d'entre eux sont antérieurs aux soulèvemens ou non, la chaux se trouvant déja précipitée en grandes masses dans les calcaires que Werner regarde comme primitifs et disséminée à environ 4 p.C. dans les phyllades. La Géognosie traitée dans le sens indiqué, pourra décider la question.

Les *porphyres* se distinguent des conglomérats par la régularité, en ce que chaque formation de porphyre ne contient dans une seule espèce de pâte qu'une espèce de cristaux disséminés assez également, quoique sans symétrie dans la pâte. Le Géologue doit expliquer par la Physique ce mélange de petits corps cristallins nés au même lieu et au même tems que la pâte non cristallisée qui les enveloppe.

Les *calcaires* appartiennent pour la plupart aux formations que nous traitons à présent; mais comme on les trouve aussi dans les formations qu'on range encore

---

*) Je ne donne ce travail que comme une ébauche. J'espérais toujours que La Place y appliquerait son génie analytique et qu'ensuite Berthollet le reprendrait où je l'avais laissé.

dans la classe des primitives, le jeu de la Nature, qui les a produits sous tant de formes et à tant d'époques différentes, est difficile à déchiffrer, et cela ne peut se faire que par la contemplation de l'océan d'alors, relativement aux ingrédiens qu'il tenait en solution dans différens tems et à différentes hauteurs. La consultation de l'atmosphère ne devra pas être négligée non plus.

Les *gypses* sont des calcaires modifiés. Au lieu de l'acide carbonique c'est de l'acide sulfurique qui est combiné à la chaux. Or comme nous ne pouvons nullement admettre que l'océan primitif ou l'atmosphère ait contenu de l'acide sulfurique, et comme les volcans sont encore aujourd'hui les grandes usines où la Nature produit cet acide en abondance, nous devons admettre que les gypses se sont formés par des débordemens volcaniques d'acide sulfurique sur une couche calcaire. Il en est de même des roches d'*alun*. Les caractères géognostiques cadrent parfaitement avec cette théorie.

La formation du *sel-gemme* a de tout tems offert de grandes difficultés au Geologue, et cependant cette formation peut avoir eu deux modes très distincts, qui tous deux se rapportent à des opérations volcaniques. L'écoulement de l'acide sulfurique a produit, comme nous venons de le voir, le gypse. La chaleur rouge avec laquelle il est sorti de la fournaise volcanique et la chaleur qu'il a produite par sa réunion avec la chaux, ont dû mettre sur tout l'espace de l'épanchement l'eau de la mer dans une violente ébullition qui en a précipité les sels que cette eau contenait et qui furent bientôt recouverts par des couches de gypse ou d'autres roches qui se formaient alors. L'analogie entre la formation des bancs de sel et du gypse est confirmée par la Géognosie qui nous offre presque sans exception le gypse et le sel-gemme comme compagnons l'un de l'autre. Le second mode de formation est une éjection d'eau de mer hors de la caverne d'un volcan. Enfermée dans cette usine, et quoique élevée au degré de la chaleur volcanique, cette eau n'a pu s'évaporer. Mais dès qu'elle fut arrivée à la surface du volcan, où elle n'était plus chargée que de la pression de la mer et de l'atmosphère, elle a dû bouillir avec violence, et la vapeur écartant l'eau ambiante, le sel a pu se cristalliser. Des dépôts calcaires ou

argileux succédant bientôt à cette opération, le sel a été soustrait à l'action corrosive de la mer.

Les *grès* et les sables sont du ressort des formations mixtes que nous traitons. Leur formation n'offre que peu de difficultés après ce qui a précédé. Le Géologue ne tombera pas dans l'erreur de Werner, de regarder tous les sables comme des débris de roches triturées, erreur qui se réfute par tant de raisons palpables.

Les *débris de roches*, épars sur la surface des continens et sur des terrains étrangers ou non à la nature de ces débris, ne sont pas un problème difficile de Géologie. L'on distinguera facilement les débris roulés par leur seul poids sur un terrain incliné, de ceux que les courans de la mer ont charriés. Ceux du premier genre offriront les plus grosses masses aux plus grandes distances d'après les lois très connues du mouvement. Ce sera le contraire pour les masses charriées, les petites masses offrent plus de surface à proportion de leur grosseur à l'impulsion mécanique de l'eau. Dans le cas où l'origine de ces blocs est connue, ces observations serviront à déterminer si les débris sont arrivés à la place qu'ils occupent uniquement par roulement, ou s'ils ont été charriés. Au contraire, si l'on ne connaît pas leur origine, mais si l'on s'est assuré qu'ils ont été charriés, on découvrira leur origine en suivant la direction qu'offrira la succession des petites masses aux grandes. Si le Géologue trouvait même des ornières encore existantes frayées par ses courans comme M. Alex. Brongniard les a trouvées en Scandinavie, alors toute difficulté cesse. Mais il s'en présente souvent une de grande importance, et dont la solution peut mener à de grands résultats. C'est le cas ou une grande vallée ou même une mer se trouverait entre ces débris et le point dont ils sont partis. La plus considérable que je connaisse est celle qu'offre la mer baltique au Nord de laquelle se trouve l'origine des innombrables masses de granite qui sont parsemées sur les pays qui avoisinent sa rive méridionale. L'origine de ces débris étant bien démontrée, de même que l'impossibilité qu'ils aient été lancés au-dessus de la mer à ces énormes distances ou qu'ils aient balayés le fond de cette mer, mus par un agent quelconque, pour arriver de l'autre côté et s'y étendre encore sur une si grande surface, le Géologe

peut et doit trancher le noeud gordien en prononçant que ces débris sont antérieurs à la Baltique, qu'ils ont été transportés par des courans du Nord au Sud et que ce n'est qu'après cela que s'est formée par un enfoncement le grand bassin que nous nommons la mer Baltique.

Quant aux autres terrains de transport et de sédiment, le Géologue mettra beaucoup d'attention à les distinguer des roches analogues précipitées par le grand procès chimique aux lieux où on les trouve encore.

Le *délissement des roches* est un objet que la Géologie ne doit pas négliger. Elle doit s'efforcer à déterminer les effets du délissement continué à travers les siècles et même d'en déterminer la quantité. Pour le granite, l'on trouvera peut-être les meilleurs renseignemens sur les sommités du Fichtelberg en Franconie où l'on voit de grandes masses brisées de couches de granite, dont quelques unes offrent encore leur antique superposition jusqu'à 50 et 60 pieds de hauteur perpendiculaire, et attestent par là que les ruines qui sont à leurs pieds n'ont pas bougé depuis l'instant de leur bouleversement. Ces piliers carrés ressemblent à des matelas régulièrement entassés, dont les bords et les angles sont délissés et offrent de profondes et larges entailles. Il est important de distinguer par des caractères sûrs l'effet du délissement de l'effet mécanique des eaux ou du roulage et broiement des masses de roches. La Géologie peut en certains cas en tirer de grands avantages.

De là, la Géologie passera aux *débris d'animaux et de végétaux fossiles* que la Géognosie nous offre dans ses tableaux. Honneur aux Naturalistes célèbres qui ont voué à cette partie de nos connaissances une sagacité rare et une constance exemplaire. Leurs travaux innombrables nous ont déjà mis à même de former des suites de ces êtres organiques d'antique formation qui livrent des rapports à-peu-près constans avec les formations minérales. Et si des travaux postérieurs, tels que les recherches précieuses de M. Pander en Crimée et dans les environs de Pétersbourg offrent des anomalies importantes dans ces suites, ce ne sera qu'un aiguillon de plus pour continuer ce travail important.

Le Géologue ne doit pas oser tenter d'expliquer la formation des germes de ces productions organiques (l'expérience a toujours prouvé que ces essais ne font qu'engager l'esprit humain dans l'erreur) mais il trouvera dans l'atmosphère d'alors l'acide carbonique qui par sa décomposition dans l'organisation végétale, a fourni le carbone nécessaire à leur développement et dans la même atmosphère d'alors l'oxigène indispensable à cette opération *); il y trouvera de même les principes du humus des continens actuels et des plantes qui reproduisent le humus qu'elles dépensent pour leur accroissement et de celles qui ont produit les houilles qui ne se régénèrent plus et des tourbes qui se forment encore journellement sous nos yeux. Il ne s'étonnera pas que la Géognosie lui offre des roches composées en entier de coquillages, où l'immense abondance d'acide carbonique qui a dû se trouver dans l'atmosphère pour précipiter les calcaires, et qui fournissait à l'animal le carbone nécessaire à sa substance, médiatement ou immédiatement, en même tems qu'il servait à précipiter la chaux dont le même animal formait sa coquille. Il ira même jusqu'à présumer que quelques roches calcaires, très riches en coquillages, doivent la pâte qui unit celles-ci en une seule masse, à quelques genres de coquilles délissées. Guidé par la Géognosie et la Chimie, il tâchera de découvrir les conditions sous lesquelles ce délissement peut avoir eu lieu.

Enfin, le système fondé sur l'existence d'une grande abondance d'acide carbonique dans l'atmosphère primitive, consumé petit à petit par la formation colossale d'êtres organisés des deux règnes, expliquera comment les animaux vertébrés ont enfin pu prendre naissance, et la race humaine la dernière de toutes, comme supportant le moins d'acide carbonique dans l'atmosphère et ne pouvant avoir existé que lorsque la proportion d'acide carbonique aura eu atteint celle qu'elle a aujourd'hui dans l'atmosphère.

---

*) Nous ignorons encore absolument quelle a pu être la nourriture des premiers animaux qui ont peuplé notre globe déjà au tems du procès de la précipitation générale, des coquillages et d'autres sans vertèbres et sans coquille qui, comme classe inférieure, ont vraisemblablement précédé les genres à coquilles.

IVème Chapitre.

Des filons et des roches volcaniques.

La Géognosie a dû, pour s'interdire toute hypothèse, ne signaler comme substances volcaniques, que celles qui ont évidemment été déjetées des volcans éteints ou encore actifs. La Géologie va plus loin; elle signale nombre d'autres minéraux, même des roches entières, comme appartenant aux productions volcaniques, c'est-à-dire aux produits *du procès général de la précipitation chimique*, *modifiés par l'action de la chaleur rouge et de l'eau sous une très haute pression;* car telle est la vraie définition des productions volcaniques.

Le Géologue commence ce chapitre par expliquer la *formation des filons*, qu'il doit distinguer des *fentes* ou *fissures* que l'on rencontre dans toutes les roches, et qui ne sont vraisemblablement que la suite du retrait, lorsque celles-ci arrivèrent à une température plus basse que celle qui règnait pendant leur formation, température supérieure produite par cette formation même. Il doit encore distinguer les filons des *crevasses* plus ou moins larges qui se sont formées dans les voûtes des cavernes volcaniques par une explosion qui n'a fait que soulever et fendre cette voûte et dont les parties n'ont pu se remettre tout-à-fait à leur ancienne place. Ces crevasses, qui se sont ensuite remplies, soit par des matières précipitées chimiquement, soit par des débris de roches, ont été prises par Werner pour des filons et ont séduit le célèbre géognoste à admettre l'hypothèse que les filons ont été remplis de haut en bas, d'où il a tiré tant de conséquences insoutenables concernant les métaux, les gangues, etc. et ses hypothèses inconcevables sur l'infiltration.

Les vrais *filons* sont des crevasses produites, non dans les voûtes des cavernes volcaniques, mais dans les flancs de ces cavernes et dans la région inférieure, où se

---

Nous ignorons si ces deux classes pouvaient, à l'instar des plantes, se nourrir immédiatement d'acide carbonique et formaient par là le vrai chaînon par lequel la Nature a passé du règne végétal au règne animal. Nous ignorons même comment les mollusques et les coquillages, dont les familles vivent encore sous nos yeux, se nourrissent, comment elles s'approprient le carbone pour leur coquille. Quand viendra le *Théodore de Saussure* pour le règne animal?

trouvent les laves et autres matières travaillées par l'action volcanique. Les canaux des volcans et leurs cratères, d'où découlent les laves, sont des espèces de filons.

La même force qui déchire les flancs des cavernes est celle qui remplit les filons, comme la théorie des volcans le prouve. L'élasticité des vapeurs presse sur les matières liquides ou liquéfiées et les force de s'élever dans le filon et même de s'écouler au dehors. De là les *lits* de matières volcaniques qu'on retrouve indistinctement intercalés dans les suites de roches, sans qu'il soit possible d'indiquer la moindre analogie de formation entre ces lits et les roches qu'ils séparent. Le Géologue détaillera soigneusement ces premiers principes, et trouvera au reste qu'il peut exister des filons vides qui, par là, se rangent dans la classe des crevasses, ou que (du point de nos observations à la surface de la Terre) nous croyons devoir prendre pour telles.

Le Géologue expliquera comment la même action volcanique a pu produire les cavernes que nous regardons comme non volcaniques, que nous trouvons dans les calcaires et dans les grès, et qui nous offrent tant d'autres phénomènes géognostiques. Cette action volcanique est secondaire et consiste dans un dégagement de gaz par une crevasse sous des terrains nouvellement formés.

Il passera de là aux minéraux qui remplissent les filons, et les partagera en quatre genres: La *gangue*, masse siliceuse, pure ou impure, mais toujours cristallisée, la patrie de tous ces superbes cristaux parfaits que nous admirons dans les cabinets minéralogiques; les *métaux*, natifs, oxidés ou sulfurés, quelquefois seuls, le plus souvent joints à la gangue en forme de bandes ou de rubans, quelquefois en forme de nids; des *roches de plusieurs espèces, modifiées* plus ou moins par l'action volcanique; enfin des *roches naturelles*, qui n'ont subi aucune modification sensible, en tout semblables aux roches connues analogues, mais différentes de la roche dans laquelle elles se trouvent renfermées. Cette dernière espèce de filons est difficile à distinguer des crevasses. Quelques débris de gangue ou d'autres minéraux modifiés sont les seuls caractères distinctifs, qui même ne sont pas toujours au-dessus de toute objection.

La *gangue* offre quantité de phénomènes spéciaux. Le Géologue en considérera d'abord la formation par l'action volcanique, et pourra conclure de sa propriété émi-

nemment siliceuse et de la grande quantité de cristaux de roche qu'elle contient, qu'une formation de silice presque pure a devancé celle du granite, conclusion qu'il a déjà dû tirer de la théorie du procès chimique de la précipitation générale. Il expliquera la situation régulière qu'offrent les filons métalliques dans la gangue qui leur sert de matrice, et les stries également régulières de la gangue elle-même. Cette symétrie surprenante n'existerait pas si elle n'était le fruit d'une action mécanique toute simple. Il expliquera la formation des *géodes* avec toutes les singularités qu'elles offrent. Enfin, il examinera et expliquera l'influence réciproque de la gangue et des surfaces des roches qu'elle traverse.

Mais toutes ces considérations ne nous instruiraient pas encore sur la vraie nature des gangues, si l'on ne recherchait les principes de ces cristallisations. Le vulgaire des Géologues n'y a vu que des masses fondues par de hauts degrés de chaleur, et cristallisées par le refroidissement. Mais quoique nous soyons parvenus à fondre la silice pure, ou au moins le cristal-de-roche au soufflet de Newmann *), cependant nous n'avons jamais produit un seul cristal de cette substance si éminemment cristalline. Le Feldspath fondu au feu de fourneau n'affecte aucune forme cristalline, et le Mica, liquide comme l'eau, ne reprend pas au refroidissement lent ou subit, sa texture lamelleuse. Ainsi *les gangues sont des matières liquéfiées par de l'eau à la température rouge ou blanche et sous la haute pression volcanique* qui équivaut à au moins 4600 atmosphères **). Cette définition rammène ce genre de cristallisations au principe général de la cristallisation aqueuse, et si l'on réfléchit que la solution des corps dans l'eau, l'esprit de vin, les acides et les alkalis sont proprement des fusions dont le calorique requis était contenu dans le liquide dissolvant (comme

*) J'ai fondu à ce soufflet plus de cinquante fois du cristal de roche en boules de plusieurs lignes de diamètre (mon appareil étant sûrement le plus puissant que je sache avoir été exécuté) et je n'ai jamais obtenu que des masses arrondies et parsemées de bulles à l'intérieur.

**) Les parcelles d'eau découvertes dans les cristaux par Davy, susceptibles d'une grande dilatation sans cesser d'être liquides, et d'une propriété réfringente différente de celle de l'eau commune, ne seraient-elles pas de l'eau ordinaire dont l'attraction moléculaire a été modifiée par la haute température et la haute pression?

je l'ai prouvé ailleurs) l'on trouvera cette définition des gangues très naturelle. Dans tous les cas, c'est le calorique qui produit la liquidité. Au reste il ne paraît pas invraisemblable que la cristallisation ordinaire ou froide se distingue de la cristallisation volcanique par des caractères qui nous sont encore inconnus.

Les autres *substances modifiées* qu'on trouve dans les filons, ont subi une moindre transformation; les modifications qu'elles ont éprouvées concernent principalement la texture et la couleur, et sont rarement accompagnées de vraie fusion, et quand celle-ci a eu lieu, comme c'est le cas pour quelques laves, le refroidissement ne produit pas des cristaux, mais des verres. Les degrés de transformation se règlent sur les degrés de chaleur que les matières ont subi, sur le tems qu'elles ont séjourné dans la fournaise volcanique et sur la quantité d'eau présente dans ces procès.

Le Géologue observera enfin que les matières travaillées dans le sein des volcans ne sont pas toutes originaires de ce lieu comme les laves qu'ils vomissent aujourd'hui, mais que plusieurs d'entr'elles y ont été précipitées du dehors soit au moyen des crevasses refermées ensuite, soit au moyen des cratères mêmes des volcans encore couverts par l'océan, dans le tems qu'il produisait encore de nouvelles roches ou ravageait par ses courans les produits de ses propres travaux.

Ce n'est qu'après avoir traité dans ces principes la théorie de la gangue et des autres matières travaillées dans les usines volcaniques que le Géologue pourra tracer d'une main sûre les caractères des substances et roches auxquelles on doit donner le nom de volcaniques. Avec un peu d'attention il en trouvera aisément 7 ou 8, qui, s'ils ne suffisent pas un à un pour caractériser en toute sûreté un fossile comme volcanique, suffiront deux à deux ou trois à trois. Muni de ces caractères il pourra décréter, sans aucun risque de se tromper, que les roches suivantes sont de nature volcanique, quoique leurs filons ne soient pas encore découverts et qu'on ne les trouve qu'en lits ou strates de grande étendue; et d'après ce qui vient d'être dit sur les roches entrainées du dehors dans les volcans, l'on ne sera pas étonné d'y trouver des coquillages, des houilles et autres productions végétales.

Nous nommons d'abord les *roches cornéennes*, telles que la pierre à fusil, la chalcédoine et ses variétés, la carnéole, l'agathe, l'onyx et toutes les substances gangueuses.

Puis les *pierres précieuses* après lesquelles se rangent les augites, les mélanites, etc., que nous découvrons dans les laves et les basaltes.

Le *Mandelstein* dont les noyaux et la pâte portent les caractères les plus décisifs de l'action volcanique.

Les *Jaspes* de toute espèce, dont le rayé offre la même symétrie que la gangue, un composé de masses diversement colorées par les oxides de métaux.

Plusieurs espèces de *Porphyres volcaniques* qui se rapprochent des jaspes et des roches cornéennes. Ils sont faciles à distinguer des porphyres naturels.

La *Craie*, qui s'annonce comme ayant fait un séjour peu long dans quelque volcan, par la pierre à fusil qui se trouve dans son intérieur soudée au calcaire, et offrant plus ou moins des passages de l'une à l'autre, et par sa structure et son gisement. Si l'on avait reconnu il y a vingt ans la volcanité de la craie, nous n'aurions pas des formations crayeuses, et les Géologues se seraient épargné la peine qu'ils auront aujourd'hui de réformer ces terrains.

Les *Basaltes*, autrefois pomme de discorde entre les volcanistes et les neptuniens, qui réunissent la plupart des caractères volcaniques.

Le lecteur me demandera peut-être pourquoi je ne présente que ce cadre des systèmes géognostique et géologique, au lieu de me charger moi-même de ce travail? Ma réponse est simple: Je ne crois pas posséder assez de connaissances de détail pour entreprendre d'écrire un système de Géognosie. Quant à la Géologie, je l'ai ébauchée dans l'âge où je n'avais encore rien perdu de mes forces. On trouve ce système dans mes ouvrages cités, et je n'en aurais pas livré ici le cadre, si je n'avais eu plu-

sieurs idées nouvelles à y ajouter. Vouloir le retravailler pour profiter des recherche faites depuis 20 ans, ce serait me charger d'une tâche de plusieurs années qu'il est douteux que la Providence veuille m'accorder encore. Tout auteur doit bien consulter le *quid valeant humeri.* Je me tiendrai heureux si je réussis à faire encore quelques travaux détachés utiles à la science, et qui témoignent que je n'ai pas passé mes vieux ans dans l'oisiveté.

BULLETIN SCIENTIFIQUE.

Extrait d'une lettre de M. Knorre à M. Kupffer.

(Lu le 8 Décember 1830.)

M. Knorre à Nicolaïeff m'a communiqué plusieurs remarques sur le rapport, que je viens de publier relativement à mon dernier voyage à l'Elbrouz, remarques parmi lesquelles il y en a une, qui me paraît être d'un intérêt assez général, pour trouver une place dans notre bulletin scientifique, consacré à toute pensée ou remarque trop isolée et trop serrée, pour remplir un mémoire particulier. Cette remarque concerne une erreur dans laquelle je suis tombé relativement à l'emploi de la méthode des moindres carrés, erreur d'autant plus dangereuse, qu'elle a été commise par plusieurs calculateurs distingués.

Il s'agissait de combiner, par la méthode des moindres carrés, les équations suivantes, fournies par l'observation (voyez p. 85 de mon rapport):

$$a = 25'', 6041 - 33, 97 \cdot x$$
$$a = 25, 6140 - 35, 27 \cdot x$$
$$a = 25, 6343 - 36, 00 \cdot x$$
$$a = 25, 6175 - 34, 30 \cdot x$$
$$a = 25, 5860 - 32, 22 \cdot x.$$

Maintenant, pour abréger le calcul, j'ai successivement retranché la dernière équation des quatre premières, ce qui m'a donné les équations suivantes:

$$0'', 0181 = 1^{\circ}, 75 \cdot x$$
$$0, 0280 = 3, 05 \cdot x$$
$$0, 0483 = 3, 78 \cdot x$$
$$0, 0315 = 2, 08 \cdot x.$$

et c'est à ces dernières équations que j'ai appliqué la méthode des moindres carrés, pour trouver la valeur la plus avantageuse de x.

Mais M. Knorre démontre, comme il suit, que cette simplification des équations précédentes n'est point admissible.

Soient en général:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\omega + b_1x + X_1 = o \\ a_2\omega + b_2x + X_2 = o \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n\omega + b_nx + X_n = o \\ a\omega + bx + X = o \end{array}\right\} \text{(I)}$$

plusieurs équations, dans lesquelles les valeurs de X, X_1, X_2, X_3, etc. ont été fournies par l'observation, et qu'il s'agit de combiner selon la méthode la plus avantageuse. Si l'on multiplie les n premières équations par a, et la dernière successivement par a_1, a_2, a_3, etc., et si l'on retranche ces produits deux à deux les uns des autres, on obtient:

$$\left.\begin{array}{l} (ab_1 - a_1b)\, x + aX_1 - a_1X = o \\ (ab_2 - a_2b)\, x + aX_2 - a_2X = o \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (ab_n - a_nb)\, x + aX_n - a_nX = o \end{array}\right\} \text{(II)}$$

Il est maintenant aisé de démontrer que, lorsqu'on combine les équations (II) selon la méthode des moindres carrés, on obtient la même valeur de x, qu'on obtiendrait, par la même méthode, des équations (I), en attribuant aux n premières équations un poids égal, et un poids infini à la dernière.

Pour le démontrer, appelons p le poids de la dernière des équations (I), ou bien, ce qui revient au même, donnons à cette équation un tel poids, comme si elle était le résultat de p observations. Selon les règles établies par la théorie des moindres carrés, il faut multiplier cette équation par $\sqrt{p}$. Pour les autres équations, nous supposerons, que les coëfficiens $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$, $\sqrt{p_3}$, etc. sont déjà contenus dans les valeurs de a_1, b_1, etc. Nous aurons donc maintenant les équations suivantes:

$$\begin{array}{c} a_1\omega + b_1x + X_1 = o \\ a_2\omega + b_2x + X_2 = o \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n\omega + b_nx + X_n = o \\ a\omega\sqrt{p} + bx\sqrt{p} + X\sqrt{p} = o. \end{array}$$

Ces équations, combinées selon la méthode des moindres carrés, donnent les deux équations suivantes:

$$(\Sigma a^2 + ap)\ \omega + (\Sigma ab + abp)\ x + \Sigma aX + apX = o$$
$$(\Sigma ab + abp)\ + (\Sigma b^2 + bp)\ \ x + \Sigma bX + bpX = o$$

d'où l'on tire:

$$x = \frac{aX\Sigma ab + ab\Sigma aX - a^2\Sigma bX - bX\Sigma aX + \frac{\Sigma ab\Sigma aX - \Sigma a^2\Sigma bX}{p}}{a^2\Sigma b^2 - 2ab\Sigma ab + b^2\Sigma a^2 + \frac{\Sigma a^2\Sigma b^2 - (\Sigma ab)^2}{p}}.$$

Il est inutile de remarquer, que

$$\Sigma a^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + \cdots a^2_n,$$
$$\Sigma ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n, \text{ etc.}$$

Voyons maintenant ce que nous donneront les équations (II) traitées par la même méthode. On obtient d'abord:

$$(a^2b^2_1 + 2aba_1b_1 + b^2a^2_1)\,x + a^2b_1X_1 - aXa_1b_1 - aba_1X_1 + bXa_1X_1 = 0$$
$$(a^2b^2_2 + 2aba_2b_2 + b^2a^2_2)\,x + a^2b_2X_2 - aXa_2b_2 - aba_2X_2 + bXa_2X_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a^2b^2_n + 2aba_nb_n + b^2a^2_n)\,x + a^2b_nX_n - aXa_nb_n - aba_nX_n + bXa_nX_n = 0;$$

dont la somme est:

$$(a^2\Sigma b^2 - 2ab\Sigma ab + b^2\Sigma a^2)\,x + a^2\Sigma bX - aX\Sigma ab - ab\Sigma aX + bX\Sigma aX = 0$$

d'où l'on tire:

$$X = \frac{aX\Sigma ab + ab\Sigma aX - a^2\Sigma bX - bX\Sigma aX}{a^2\Sigma b^2 - 2ab\Sigma ab + b^2\Sigma a^2}$$

Si l'on compare ces deux valeurs de x, on s'aperçoit facilement, que la douzième n'est égale à la première, que lorsque $p = \infty$.

Je profite de cette occasion pour relever une faute d'impression et une erreur, qui se sont glissées dans le même rapport. Page 79, ligne 7, il faut lire $\frac{r}{p} = q$ au lieu de $\frac{p}{r} = q$; et page 86, ligne 6, j'ai mis 25″, 6 pour 2°, au lieu de 25″,6 pour $\frac{1}{2}$°, ce qui porte la correction pour 1° C. à 0,023 au lieu de 0,0058. Il est facile à voir, que cela ne change rien aux conclusions que j'ai tirées de nos observations; au contraire, si cette valeur de x, qui découle des dernières observations de M. Lenz, est exacte, le décroissement de l'intensité des forces magnétiques selon la verticale devient encore plus considérable. Je m'abstiens ici de toute discussion relative à la probabilité de cette valeur: M. Knorre, dans les mains duquel se trouve actuellement l'aiguille que nous avons observée, s'occupera prochainement à déterminer directement la valeur de cette correction.

BULLETIN SCIENTIFIQUE.

M. Ostrogradsky annonça à l'Académie dans sa séance du 16 Septembre qu'il a résolu le problème sur la propagation des ondes à la surface d'un liquide renfermé dans un vase ayant la forme d'un secteur cylindrique. Le problème sur la propagation des ondes à la surface des fluides renfermés dans des vases de forme invariable a été résolu par l'illustre auteur du calcul des résidus dans le cas du vase rectangulaire; M. Ostrogradsky l'a traité dans le cas du vase cylindrique. Ses recherches relatives à cet objet seront imprimées parmi les Mémoires des Savans étrangers, publiés par l'Académie des Sciences de Paris. Le problème dont M. Ostrogradsky annonce actuellement la solution est plus général que celui qu'il a résolu dans son Mémoire antérieur. Il détermine l'état de la surface fluide au bout d'un tems quelconque, non pas en supposant que le bassin soit de forme de cylindre, mais bien de celle d'un secteur cylindrique. En sorte, qu'en admettant que l'angle du secteur devienne égal à 400°, on retrouve la solution du problème présenté à l'Académie de Paris.

Dans la séance du 23 Septembre M. Ostrogradsky annonça à l'Académie qu'il croit avoir trouvé l'équation aux différences partielles relative à la propagation de la chaleur dans l'intérieur des liquides. En appelant v la température d'une molécule liquide déterminée par les coordonnées x, y, z; p, q, r les vitesses de la même molécule respectivement parallèles aux coordonnées, on aura au bout d'un temps t, écoulé depuis une époque fixée,

$$\frac{dv}{dt} + p\frac{dv}{dx} + q\frac{dv}{dy} + r\frac{dv}{dz} = \frac{1}{c\varrho}\left[\frac{d(K\frac{dv}{dx})}{dx} + \frac{d(K\frac{dv}{dy})}{dy} + \frac{d(K\frac{dv}{dz})}{dz}\right];$$

c étant la capacité pour la chaleur, ϱ la densité et K la conductibilité intérieure du liquide.

M. **Ostrogradsky** dit dans sa note présentée sur cet objet: „Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la théorie analytique de la chaleur a trouvé, depuis long-tems, l'équation à laquelle la température dans l'intérieur d'un liquide doit satisfaire, mais cette équation n'est pas connue jusqu'à présent. Son auteur en a réservé la publication au second volume de la théorie mathématique de la chaleur."

„J'ai pensé que, comme le rayonnement intérieur dans les liquides ne s'étend qu'à des distances insensibles comme dans les solides, on peut calculer la quantité de chaleur qu'une molécule dans l'intérieur du liquide reçoit de toutes les molécules voisines, par une analyse analogue à celle qui sert à trouver la même quantité dans les solides, mais que dans la différentielle $\frac{dv}{dt}$, par rapport au tems, il faut considérer les coordonnées x, y, z, comme fonctions du tems et avoir égard à leur variabilité. On néglige les différentielles $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ dans les solides où elles sont en effet très petites, mais il est nécessaire de les conserver dans le cas des liquides, et même dans le cas des solides si l'on veut tenir compte du déplacement de leurs molécules par la chaleur."

„Je n'ose pas affirmer que j'aie pris en considération tout ce qu'il fallait considérer relativement à la température dans les liquides et que, par conséquent:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{1}{c\varrho}\left[\frac{d(K\frac{dv}{dx})}{dx} + \frac{d(K\frac{dv}{dy})}{dy} + \frac{d(K\frac{dv}{dz})}{dz}\right]$$

soit la véritable équation à laquelle la température v doit satisfaire, et par cette raison je ne donne aucune suite à mes recherches sur cette matière."

Dans la séance du 30 Septembre M. **Kupffer** communiqua à l'Académie quelques positions géographiques de la Sibérie, déterminées par M. **Hansteen**, et qui lui ont été adressées par ce célèbre voyageur dans deux lettres consécutives, datées d'Irkoutsk et de Krasnoïarsk. Les voici:

1) à l'Oural:

	Latitude.	Longitude de Catherinebourg, en arc	
Nijni-Taguilsk	57°, 54′, 18″.	0°, 40′, 50″	occid.
Kouchva	58, 19, 56.	46, 30	——
Werkhotourié	58, 51, 26.	17, 11	orient.
Bogoslofsk	59, 44, 55.	27, 27	occid.

NB. Les longitudes ont été déterminées par le moyen d'un seul chronomètre, et ne sont guère sûres qu'à 1′ près.

2) en Sibérie.

	Latitude.			Longitude de Yénisseïsk.			
Village Maloï Contchat .	56°,	57′,	54″.	1°,	0′,	2″	orient.
Ville Yénisseïsk . . .	58,	27,	19.	0,	0,	0	——
Village Anziferova . . .				0,	13,	17	occid.
—— Nasatovskoïé . .	59,	30,	18.	1,	15,	36	——
—— Serebrenikova . .	60,	1,	52.	1,	37,	49	——
—— Doubtcheskoïé .	61,	1,	35.	2,	34,	53	——
Embouchure de l'Elotchikha	61,	29,	51.	1,	59,	59	——
Village Somorocovo . .	61,	39,	33.	2,	28,	9	occid.
Village Lébédévo . . .	62,	6,	33.	3,	7,	25	——
—— Tchoulcovo . . .	62,	46,	19.	3,	45,	45	——
—— Cantchalovo . .	63,	27,	0.	4,	54,	51	——
—— Falionskoïé . .	64,	3,	45.	4,	39,	35	——
—— Novotchernostrova	64,	36,	41.	4,	38,	30	——
—— Balkhanskoïé . .	64,	59,	48.	4,	22,	28	——
Ville Touroukhansk . .	65,	54,	56.	4,	38,	34	——

Les longitudes ont été déterminées également par le transport du temps, mais avec deux chronomètres et avec beaucoup de soin.

La longitude de Yénisseïsk a été trouvée, par les méthodes directes, égale à 109°, 50′, 34″ à l'est de l'île de Fer.

La foule d'observations magnétiques très importantes, que M. Hansteen a aussi communiquées dans les lettres citées, ne sont pas de nature à être communiquées dans une note, parce qu'elles demandent des développemens détaillés qu'il faut d'ailleurs réserver à l'auteur.

Dans la même séance M. Kupffer communiqua une lettre de M. Berzelius à Stockholm qui contient les notices suivantes sur quelques minéraux de l'Oural, que M. Kupffer lui avait envoyés:

1) Le minéral rouge, cristallisant en octaëdres, qui a été découvert par M. Herrmann à Zlato-oust dans la syénite zirconifère de Miask, et que M. Kupffer avait pris pour une spinelle, est le *pyrochlore* de M. Wöhler. Comme on avait envoyé à M. Berzelius, quelques semaines auparavant, le même minéral de Norvége, il a pu les comparer au chalumeau, et il n'y a aucun doute que ce ne soit la même espèce, même la syénite des deux endroits se ressemble. Le pyrochlore Norvégien est cependant noir; mais lorsqu'il est chauffé au rouge, il présente le même aspect que celui de Miask, chauffé de même.

2) La substance bleue, qui se trouve dans la même syénite de Miask, et qu'on a appelée Cancrinite est de la lazulithe ou Haüyne, comme M. Kupffer l'avait déjà supposé. La syénite Norvégienne en contient aussi.

3) Les petits prismes rhomboïdaux noirs, que M. **Kupffer** a découverts dans le granite des rives de la Toura, près de Werkhotourié, paraissent être de l'Orthite cristallisé ou du moins une combinaison analogue.

4) Le minéral de Miask, qu'on a pris jusqu'ici pour de la Gadolinite, est un minéral nouveau, composé pour la plus grande partie de Zircone et d'acide titanique. M. **Berzelius** l'appele Aeschynite, de *αισχυνομαι confondre*, parce qu'il confond les chimistes qui veulent déterminer sa composition, aucune méthode de séparer d'une manière précise ces deux corps, n'étant connue.

5) Un minéral rouge, que M. **Anossow** à Zlato-oust avait remis à M. **Kupffer**, comme ayant été nouvellement trouvé à Kychtim, est du Rutile.

Il est connu que beaucoup de salines, qui se trouvent dans l'étranger, contiennent dans leurs eaux-mères du brome, substance halogène découverte par M. **Balard**. M. **Hess** annonça à l'Académie, dans sa séance du 9 Décembre qu'il a fait plusieurs expériences sur les eaux-mères des salines de Staraïa-Roussa pour savoir si elles contenaient aussi du brome, et qu'il a trouvé qu'effectivement cette substance s'y trouvait en grande quantité, et pourrait en être retirée avec plus de facilité et en plus grande quantité que cela n'a lieu en Allemagne. C'est surtout le procédé de **Desfosses** qu'il croit appliquable.

Extrait d'une lettre adressée au Secrétaire perpétuel par M. **Haüy**, membre correspondant de l'Académie, lue le 13 Janvier.

Odessa, ce 22 Novembre 1829.

— Le $\frac{14}{26}$ Novembre au matin, nous avons ressenti un tremblement de terre assez fort, et comme quelques détails à ce sujet ne peuvent qu'intéresser Messieurs les membres de l'Académie Impériale des sciences, je regarde comme un devoir de vous transmettre tout ce que j'ai pu recueillir, laissant de côté comme de raison, ces *dit-on*, dont la multitude s'occupe à l'occasion de tout évènement remarquable, pour ne vous entretenir que des circonstances positives, les seules qui puissent véritablement mériter quelqu'attention de la part d'une société savante.

A $3^h. 58'$, (tems vrai, déterminé à $\frac{1}{2}$ minute au plus d'erreur) j'ai été réveillé par de légères vibrations, qui m'ont paru devoir être à fort peu près le commencement du tremblement. Elles ont été en croissant pendant à-peu-près $\frac{2}{3}$ de minute; alors nous avons éprouvé une secousse assez forte, qui s'est prolongée pendant quelques secondes. L'amplitude des vibrations a diminué, pour augmenter de nouveau pendant le cours d'une minute environ, après laquelle on a ressenti une seconde secousse très forte et bien plus prolongée que la première; un nouveau décroissement, suivi d'un accroissement s'est encore manifesté,

mais n'a duré que 12 à 15 secondes, alors la troisième secousse a eu lieu; elle était moins forte que la première et n'a duré que quelques instants: enfin un nouvel intervalle, pendant lequel il y a eu diminution et augmentation dans le mouvement oscillatoire, a succédé: sa durée a été à peu près d'un quart de minute, après quoi, une quatrième et dernière commotion, qui m'a paru égale en intensité à la troisième, et qui n'a duré que trois ou quatre secondes, s'est fait sentir, et a été suivie à son tour d'un tremblement décroissant qui a duré $1\frac{1}{2}'$ environ. Tout est rentré dans le calme à $4^h. 2' 2''$; pendant les quatre minutes qu'a duré le tremblement, il s'est fait sentir sans la moindre interruption.

Une cloison de bois qui se trouve dans ma chambre à coucher, m'a fourni, par un craquement continuel, une suite de pulsations très distinctes, au moyen desquelles j'ai compté 152 oscillations complètes dans le cours de $30''$. J'ai plusieurs fois observé le baromètre pendant la durée du phénomène, et il m'a été impossible d'y découvrir la plus petite trace d'oscillation. M. le Consul de France CHALLAYE, qui de son côté l'a examiné presque sans relâche, n'a pas remarqué non plus le moindre mouvement dans la colonne de mercure. J'ai voulu observer la boussole; mais devant compter le temps, compter les oscillations, noter, et aller d'un moment à l'autre voir le baromètre, je me suis trouvé en retard, et il m'a été impossible de rien obtenir des oscillations de l'aiguille magnétique.

Pendant une bonne partie de la nuit, le temps était très calme, couvert et la température à zéro. L'un de mes amis, M. HENNAU, docteur en médecine, qui est sorti dans sa cour vers le commencement du phénomène, m'a dit avoir vu du côté de l'ouest, une clarté très distincte et assez forte, analogue à la lumière boréale, voilée cependant par les nuages qui couvraient l'atmosphère; le maximum visible d'intensité de cette lueur était à l'horison: 5 ou 6 minutes après la fin du tremblement, elle a disparu presque subitement.

Une observation fort intéressante, que le hasard a fournie, m'a été communiquée par un ingénieur de ma connaissance, M. CHATILLON, qui a mis un soin scrupuleux à en déterminer tous les élémens.

Une caraffe à moitié pleine d'eau était restée sur une table dans sa chambre à coucher: un abaissement de température ayant eu lieu pendant la nuit, une partie de la vapeur d'eau s'est précipitée sur le verre, en produisant cette teinte blanchâtre qu'on remarque souvent, fort analogue à celle d'un verre dépoli. Il est résulté de là, que pendant le tremblement de terre, l'eau ayant oscillé dans la caraffe, toute la partie de la surface qu'elle a touchée, a repris la transparence habituelle, de sorte que le repos ayant succédé, on a pu observer avec la plus grande exactitude les deux positions extrêmes où la surface de l'eau est parvenue pendant son mouvement oscillatoire. Voici les résultats que M. CHATILLON m'a donnés.

Au moyen d'une règle et d'un niveau à bulle d'air, les deux points culminans où l'eau est parvenue de part et d'autre ont été marqués avec soin sur la surface du verre: à l'aide d'un fil à plomb et d'un alignement vertical, ces deux points ont été projetés et marqués sur la table: on a fait de même pour les deux points où les plans extrêmes des oscillations se sont coupés, sur la surface du verre. Cela a donné deux nouvelles projections; enfin, le cercle du fond de la caraffe a été tracé. Voici maintenant les relations de positions que possédaient tous ces points entr'eux.

La ligne passant par la projection des points culminans s'est trouvée perpendiculaire à la projection de celle qui était donnée par l'intersection des deux plans limites des oscillations. Le point d'intersection de ces deux lignes s'est trouvé sur le centre de la projection du fond de la caraffe: la projection de la droite passant par les points culminans faisait un angle de 12° à l'Est avec le méridien magnétique. Il faut encore remarquer que la ligne d'intersection des deux plans limites des oscillations coïncidait parfaitement avec le plan de l'eau en repos; ainsi, l'axe de rotation autour duquel la surface de l'eau oscillait, n'a pas changé de position.

Il résulte delà, que les vibrations ou la résultante des forces qui les ont produites, ont été dirigées constamment dans le même sens et qu'elles étaient parallèles à un plan vertical dont l'azimuth à l'Est est de 2°. (J'ai pris avant-hier la déclinaison magnétique; je l'ai trouvée de 10° 5′ Ouest.)

Une chose assez singulière, c'est que la hauteur à laquelle l'eau s'est élevée de part et d'autre n'est pas la même. Le diamètre de la caraffe à la ligne d'eau en repos, était de 97 millimètres; vers le bord, le point culminant était de 8^{mm}, 25 de la surface de l'eau, tandis que du côté opposé, l'eau ne s'est élevée au-dessus de son niveau primitif que de sept millimètres.

Le tableau suivant donne les observations météorologiques de la semaine qui a précédé et de celle qui a suivi le tremblement de terre. Je le dois à l'amitié de M. Challaye, qui s'occupe avec suite de ce genre de travail.

Relevé des observations météorologiques depuis le 19 Novembre jusqu'au 2 Décembre N. S.

Quantième.	Baromètre.	Thermomètre.	Quantité d'eau	Vents.	Etat de l'atmosphère.
19 Novbr.	29°, 9′.	— 1	—	N.	Beau tems.
—	29°, 9½′.	0	—	N. E.	Couvert.
—	29°, 9′.	— 2	—	N. E.	Neige.

Quantième.	Baromètre.	Thermomètre.	Quantité d'eau	Vents.	Etat de l'atmosphère.
20 Novbr.	29°, 9'.	— 2½	—	N. E.	Neige abondante.
—	29°, 9½'.	— 1	—	N. E.	Il neige moins.
—	30°,	— 4	—	N. E.	Un pen couvert.
21	30°, 1'.	— 5½	—	N. E.	Beau tems.
—	30°, 1'.	— 4	—	N. E.	Beau tems.
—	30°, 1½'.	— 6½	—	N. E.	Beau tems.
22	30°, 1½'.	— 6	—	N. E.	Couvert.
—	30°, 1'.	— 5	—	N. E.	Couvert, neige.
—	30°,	— 6	—	N. E.	Couvert.
23	29°, 9'.	— 5	—	N. E.	Couvert.
—	29°, 8'.	— 3	—	N. E.	Couvert, neige.
—	29°, 8'.	— 3½	—	N. E.	Neige abondante.
24	29°, 8'.	— 3½	—	N. E.	Couvert.
—	29°, 8½'.	— 2	—	N. E.	Beau tems.
—	29°, 9'.	— 3½	—	N. E.	Sombre, légèrem. couvert.
25	30°,	— 2	—	N. E.	Couvert.
—	30°,	— ½	—	N. E.	Un peu couvert.
—	30°, ½'.	0	—	N. E.	Couvert, calme.
—	30°, ½'.	0	—	— —	Calme parfait.
		Tremblement de terre.			
26	30°,	+ 1	—	S. E.	Couvert.
—	29°, 9½'.	+ 1½	—	E. S. E.	Pluie mêlée de neige.
—	30°,	0	*) 4mm.	E. N. E.	Neige très épaisse.
27	30°,	— 1½	—	E. N. E.	Couvert.
—	30°, ½'.	— 1	—	E.	Couvert.
—	30°, ½'.	— 1½	—	N. E.	Neige épaisse, vent violent.
28	30°,	— ½	—	S. E.	Très couvert, brouillard.
—	29°, 9½'.	— 2½	—	S. O.	Un peu couvert.

*) Une partie de cette eau était due à de la neige restée dans l'instrument.

Quantième.	Baromètre.	Thermomètre.	Quantité d'eau	Vents.	Etat de l'atmosphère.
28 Novbr.	29°, 9′.	— 2	—	S. O.	Couvert, calme.
29	29°, 8½′.	— 2½	—	S. O.	Calme.
—	29°, 8′.	+ 3	—	E. N. E.	Pluie fine.
—	29°, 8′.	+ 1	3^{mm}.	N. E.	Couvert, calme.
30	29°, 8′.	— 1½	—	N. E.	Couvert.
—	29°, 8½′.	+ 1	—	N. E.	Couvert, pluie et grésil.
—	29°, 9′.	0	—	N. E.	Couvert.
1 Decbr.	29°, 9½′.	— 2	—	N. E.	Couvert.
—	29°, 9½′.	— 2½	—	N. E.	Beau tems.
—	30°,	— 5½	—	N. E.	Beau tems.
2	30°,	— 7	—	N. E.	Beau tems.
—	30°, ½′.	— 6	—	N. O.	Couvert.
—	30°, 1′.	— 7	—	N. E.	Couvert.

Les observations sont faites à 9^h. du matin, à 3^h. et à 9^h. après midi: le baromètre est gradué en pouces anglais, avec la division décimale; le thermomètre est celui de Réaumur, et les hauteurs d'eau toutes comptées en millimètres.

Je vous aurais envoyé beaucoup plutôt toutes ces observations; mais j'ai voulu absolument corriger l'heure à la quelle j'ai trouvé que le phénomène avait fini, vous donner quelques détails sur l'état météorologique après et avant le tremblement de terre, et enfin, j'ai regardé comme indispensable de déterminer la déclinaison magnétique.

M. Kupffer communiqua à l'Académie le 10 Février une lettre de M. Hansteen, datée d'Orenbourg, du 1 Janvier 1830. Les observations qu'elle contient sur la déclinaison magnétique dans l'est de la Sibérie, prouvent qu'il y a des déclinaisons occidentales considérables à l'est de la ligne sans déclinaison, qui passe près d'Irkoutsk. Cette ligne sans déclinaison, dont l'existence a déjà été établie depuis long-tems par les observations de Schubert, a été retrouvée par M. Hansteen. M. Kupffer s'appuyant sur les observations de M. le Capitaine Wrangel, avait pensé, que les déclinaisons ne changent pas de signe d'un coté à l'autre de cette ligne sans déclinaison; mais les observations très précises de M. Hansteen prouvent qu'elles changent de signe, et que par conséquent, la ligne sans déclinaison, qui traverse la Sibérie, jouit des mêmes propriétés que celles qui passent près de Kasan et par les Etats-Unis de l'Amérique.

Voici encore quelques déterminations géographiques

	Latitude.			Longitude de l'île de Fer.		
Werkholensk	54°.	6'.		123°.	20'.	12".
Osmolovskaïa	56.	27.	40",4	123.	55.	54.
Sukhovskaïa	57.	2.	6, 8	124.	21.	23.
Kirensk	57.	47.	0, 0	125.	15.	45.
Moutinskaïa	58.	37.	21, 5	127.	35.	26.
Iwanoughinowskaïa	58.	40.	8, 5	128.	4.	56.
Witimskaïa	59.	26.	50, 6	130.	13.	44.
Krestowa	59.	44.	24, 0	130.	43.	17.
Kentinskaïa	60.	25.	39, 0	132.	3.	41.
Nokhtouiskaïa	59.	55.	44, 6	135.	22.	2.
Olekminsk	60.	22.	16, 3	137.	59.	48.
Markhinskaïa	60.	35.	52, 5	141.	8.	39.
Jourinskaïa	60.	56.	35, 2	143.	32.	3.
Iakoutsk	62.	1.	14, 3	147.	19.	41.
Catingari	62.	47.	30			
Tchemetchaïskoï	63.	48.	50			
Bogadiakh	64.	1.	57			
Wilouisk	63.	45.	22, 5	139.	9.	52.
Besourakh (à l'emb. de la riv. Olekma)	59.	36.		139.	8.	
Krestiakh	58.	55.	36	139.	17.	31.
Daban	59.	17.	30			
Barnaoul	53.	19.	50, 8	101.	47.	1.
Plotawskaïa Griva	51.	47.	4, 4	100.	27.	40.
Zmeïnogorsk	51.	9.	18, 2	100.	14.	22.
Choulbinskoï	50.	23.	6, 9	99.	10.	55.
Semipalatinsk	50.	24.	2, 3	98.	19.	15.
Semiïarskoï	50.	53.	9, 1	96.	23.	49.
Yamichewskaja	51.	50.	15, 6	95.	30.	3.
Pestchanoi redoute	53.	1.	11, 7	94.	26.	0.
Jelésinskaïa krepost	53.	32.	18	93.	38.	10.
Isilbageskoï	54.	29.	6	92.	28.	49.
Pserowskoï	54.	33.	22, 7	92.	14.	52.
Omsk	54.	59.	16, 8	91.	29.	46.

BULLETIN SCIENTIFIQUE.

Extrait d'une lettre de M. de LUETKE, *Capitaine de 1^r rang, à M.* FUSS, *secrétaire perpétuel de l'Académie.*

Le 19 Avril (1 Mai) 1830.

Les observations du pendule invariable occupent la première place parmi les recherches scientifiques auxquelles nous nous sommes livrés durant la circonnavigation du Séniavine. Toutes ces observations sont déjà calculées; mais comme je ne suis pas encore parvenu à leur donner la forme dans laquelle il leur convient de paraître devant le public, et qu'une nouvelle nomination m'arrache pour quelque tems aux travaux du cabinet, je crois qu'une notice sommaire sur ces observations, avec leurs résultats, ne laissera pas d'être de quelque intérêt pour l'Académie Impériale des Sciences et pour le monde savant en général.

L'appareil qui nous a servi dans ces expériences est le même qui, avant nous, a suivi le Capitaine Basil Hall aux stations de l'Amérique du Sud. Il est absolument de la même construction que celui employé par le Capitaine Sabine dans son voyage au Spitzberg. Avant de quitter l'Angleterre on a fait une série d'expériences à l'observatoire de Greenwich; on les a répétées au retour, et cette seconde suite a donné un résultat qui différait du premier d'à peu près $\frac{6}{10}$ d'oscillation en plus, ce que j'attribue à un petit émoussement du couteau. On devrait peut-être distribuer cette différence sur l'intervalle entier en progression arithmétique; mais je me suis contenté, pour le moment, de prendre le milieu entre les deux résultats.

Les autres stations sont: Valparaiso; Sitka; Pétropavlofsk, au Kamtchatka; les îles Ualan, Guahan, Bonine, St. Hélène; et en dernier lieu, l'observatoire de St.-Pétersbourg. Ici les expériences ont eu pour but tant la longueur du pendule, que les changemens de ses dimensions avec la température. Les deux suites, dont l'une fut faite par une température moyenne de 31°,5 Far. et l'autre par 82°,5 Far., ont montré une différence de 0,458 d'oscill. en 24 h. pour chaque degré de cette échelle. Ce résultat est de 0,033 plus fort que celui trouvé par le Cap. Sabine par un procédé semblable, quoique les deux pendules aient été faits de la même espèce de métal de cloche (Bell metal) et ont à peu près les mêmes dimensions. Mais je ne trouve rien dans nos expériences qui puisse faire supposer une autre cause de cette différence, qu'une moindre densité de métal dans notre pendule.

Les relâches, dans de pareils voyages, sont ordinairement de courte durée, et le tems qu'on peut donner à telle ou telle branche d'observations naturellement très borné; il en résulte que l'on dépend beaucoup des circonstances fortuites, qui ne laissent pas d'exercer une grande influence sur le succès des travaux. De là vient que, quoique nous ayons porté toujours la même attention à tout ce qui peut contribuer à la précision des expériences, elles ne sont pas toutes d'une égale valeur. Celles qui méritent le plus de confiance sont celles de Greenwich, de St.-Pétersbourg, de Pétropavlofsk, de Valparaiso et des îles Bonine; à ces 5 stations je crois pouvoir répondre pour $\frac{1}{10}$ d'oscill. Viennent ensuite Sitka et l'île d'Ualan; ici l'incertitude dans le résultat moyen peut aller jusqu'à $\frac{1}{4}$ d'oscill. Les expériences les moins favorisées sont celles des îles Guahan et de St. Hélène, où je ne prétends pas à une précision au dessus de $\frac{1}{2}$ d'oscill.

Les latitudes furent déterminées par les hauteurs circonméridiennes du soleil et des étoiles, observées avec un sextant de Troughton, un cercle à 3 alidades du même artiste, et un cercle répétiteur à réflexion de Dollond. Nous n'avions pas de cercle répétiteur astronomique; mais nous tâchions, en multipliant les observations et en variant les circonstances, d'égaliser ce que cet instrument a de préférence sur ceux à réflexion.

Je passe aux résultats. Ils sont réunis dans la table suivante, dont la 3ème colonne contient le nombre d'oscillations faites par le pendule à chaque station en 24 heures moyennes solaires, réduit à la température normale de 62° F., au vide et au niveau de la mer. La 4me contient les longueurs correspondantes du pendule à secondes, fondées sur la mesure faite à Londres par le Cap. Kater. Pour cet objet on a dû réduire les expériences de Greenwich à la station de Portland Place, par la différence d'oscillations entre ces deux endroits, trouvée par le Cap. Sabine.

Stations	Latitudes	Nombre d'oscillations	Longueurs du pendule à secondes
Ualan	5°·21′·16″ *N.*	86112, 83	39^p, 02756
Guahan	13·26·21· *N.*	117, 98	, 03242
St. Hélène	15·54·59· *S.*	125, 63	, 03933
Bonine	27·04·12· *N.*	159, 24	, 06980
Valparaiso	33·02·30· *S.*	165, 33	, 07533
Londres	51·31·08· *N.*	235, 80	, 13929
Pétropavlofsk	53·00·53. *N.*	245, 83	, 14838
Sitka	57·02·58· *N.*	257, 44	, 15810
St.-Pétersbourg	59·56·31· *N.*	269, 08	, 16950

Pour trouver le résultat moyen de l'aplatissement, correspondant à l'ensemble des expériences, il est convenable de les combiner par la méthode des moindres carrés. Désignant par x et y la longueur du pendule à l'équateur et la différence d'avec

celle au pôle, par E', E'', E''', etc. les erreurs de chaque résultat partiel, et nous rappellant, que dans l'hypothèse de la figure elliptique de la terre, la longueur du pendule pour chaque latitude $L = x + y \cdot \mathrm{Sin.}^2\, L$, nous aurons les équations de condition suivantes :

Ualan . . .	$39{\cdot}02765 - x - 0{\cdot}0087080 \cdot y = E'$.
Guahan . .	$39{\cdot}03242 - x - 0{\cdot}0540157 \cdot y = E''$.
St. Hélène .	$39{\cdot}03933 - x - 0{\cdot}0752045 \cdot y = E'''$.
Bonine . .	$39{\cdot}06980 - x - 0{\cdot}2070967 \cdot y = E^{IV}$.
Valparaiso .	$39{\cdot}07533 - x - 0{\cdot}2972962 \cdot y = E^{V}$.
Londres . .	$39{\cdot}13929 - x - 0{\cdot}6127966 \cdot y = E^{VI}$.
Pétropavlofsk	$39{\cdot}14838 - x - 0{\cdot}6380657 \cdot y = E^{VII}$.
Sitka . . .	$39{\cdot}15810 - x - 0{\cdot}7041567 \cdot y = E^{VIII}$.
St.-Pétersbourg	$39{\cdot}16950 - x - 0{\cdot}7491220 \cdot y = E^{VIIII}$.

L'équation du minimum par rapport à l'inconnue x sera la somme de ces mêmes équations divisée par leur nombre; donc l'équation du minimum par rapport à x sera

$$39{\cdot}095532 - x - 0{\cdot}3718291 \cdot y = 0.$$

Pour prendre l'équation du minimum par rapport à y, nous multiplions chaque équation par le coéfficient de y, dans cette équation; ce qui donne les résultats suivants:

$$
\begin{array}{l}
-\ \ 0{\cdot}3398532 + x \cdot 0{\cdot}0087080 + y \cdot 0{\cdot}0000758. \\
-\ \ 2{\cdot}1083632 + x \cdot 0{\cdot}0540157 + y \cdot 0{\cdot}0029177. \\
-\ \ 2{\cdot}9359321 + x \cdot 0{\cdot}0752045 + y \cdot 0{\cdot}0056557. \\
-\ \ 8{\cdot}0912268 + x \cdot 0{\cdot}2070967 + y \cdot 0{\cdot}0428890. \\
-11{\cdot}6169468 + x \cdot 0{\cdot}2972962 + y \cdot 0{\cdot}0883850. \\
-23{\cdot}9844280 + x \cdot 0{\cdot}6127966 + y \cdot 0{\cdot}3755198. \\
-24{\cdot}9792400 + x \cdot 0{\cdot}6380657 + y \cdot 0{\cdot}4071279. \\
-27{\cdot}5740089 + x \cdot 0{\cdot}7041567 + y \cdot 0{\cdot}4958368. \\
-29{\cdot}3427299 + x \cdot 0{\cdot}7491220 + y \cdot 0{\cdot}5611894. \\
\hline
-14{\cdot}5525254 + x \cdot 0{\cdot}3718291 + y \cdot 0{\cdot}2199552 = 0.
\end{array}
$$

La somme divisée par 9 est l'équation du minimum par rapport à y.

Éliminant entre ces deux équations nous aurons $y = 0{\cdot}091787$; $x = 39{\cdot}02422$; l'aplatissement $= 0{\cdot}00865052 - \frac{y}{x} = \frac{1}{267{\cdot}7}$.

Substituant les valeurs trouvées de x et de y dans chacune des équations, nous aurons les valeurs respectives de E', E'', E''', etc. ou les écarts de chaque résultat partiel sur celui qui correspondrait à l'ensemble des expériences, comme on le voit dans la table ci-après:

Stations.	Longueurs du pendule par expér.	Longueurs du pendule calculées $x + y.\sin.^2 L.$	Expérience en excès ou en défaut sur le calcul.	Les écarts en nombre d'oscill.
Ualan	39^p·02765	39^p·02589	+ 0·00176	+ 1, 94
Guahan	·03242	·03458	+ 0·00216	— 2, 38
St.-Hélène	·03933	·03864	+ 0·00069	+ 0, 76
Bonine	·06980	·06394	+ 0·00586	+ 6, 46
Londres	·13929	·14175	— 0·00246	— 2, 71
Valparaiso . . .	·07533	·08124	— 0·00591	— 6, 52
Pétropavlofsk . . .	·14838	·14659	+ 0·00179	+ 1, 97
Sitka	·15810	·15927	— 0·00117	— 1, 29
St.-Pétersbourg . .	·16950	·16789	— 0·00161	+ 1, 77

Les plus grands écarts tombent sur Valparaiso et les îles Bonine. Heureusement ces deux stations sont du nombre de celles, où les expériences ont été les plus satisfaisantes; de sorte qu'il ne peut pas être question d'erreurs d'observation dans la recherche des causes de ces écarts, qui doivent conséquemment être attribués aux anomalies d'attractions locales.

Si pour nous borner à l'hémisphère du N. nous excluons Valparaiso, comme la seule station située par une latitude australe un peu élevée, nous trouverons $y = 0 \cdot 191100$; $x = 39 \cdot 02522$; et l'aplatiss. $= \frac{1}{266,4}$.

Si, enfin, nous excluons encore les îles Bonine, où on remarque un grand excès d'attraction, nous aurons $y = 0 \cdot 192535$; $x = 39 \cdot 023923$; et l'aplat. $= \frac{1}{269}$; et c'est à ce résultat que nous nous arrêtons, comme représentant l'ensemble de nos expériences pour l'hémisphère boréale. Dans ce cas les écarts des résultats partiels sur le calcul seront comme il suit:

Stations.	Expér.	Calc.	Écarts.
Ualan	39·02765	39·02560	+·00205
Guahan	·03242	·03442	—·00200
St.-Hélène	·03933	·03840	+·00093
Londres	·13929	·14191	—·00262
Pétropavlofsk	·14838	·14677	+·00161
Sitka	·15810	·15950	—·00140
St.-Pétersbourg	·16950	·16816	+·00134

Les aplatissemens que nous avons trouvés sont à peu près identiques avec les résultats moyens des expériences des Capitaines Freycinet et Dupperey; mais ils

sont plus forts que ceux du Cap. Sabine. Pour déterminer si c'est à des causes locales, à une irrégularité dans la forme du sphéroïde, ou bien à des erreurs d'observation qu'il faut attribuer ces discordances, il faudrait faire beaucoup d'autres combinaisons, en réunissant les expériences tant des navigateurs mentionnés, que celles faites dans les voyages des Cap. Parry, Kotzebue et Hall; travail qui passerait les bornes que j'ai dû me prescrire ici, et qui est réservé pour la publication détaillée de nos travaux.

Note sur l'inclinaison magnétique à St.-Pétersbourg.

(Lue par M. Kupffer le 5 Mai 1830.)

Il y a dans ce moment peu de points sur la surface de notre globe, dont l'inclinaison magnétique soit si bien déterminée, que celle de St.-Pétersbourg. Les observations suivantes, exécutées successivement par MM. de Humboldt, Hansteen et moi en donneront la preuve:

En 1828, au mois de juin, M. Hansteen trouva, dans le jardin botanique sur l'île des Apothicaires, l'inclinaison magnétique de

St.-Pétersbourg égale à	71°·12′, 2	moy. 71°·17′, 9
Après avoir retourné l'axe de l'aiguille de 90°	71 ·23, 6	
Une autre observation lui donna		71°·20′, 0
Après avoir attaché un petit poids à l'aiguille, selon la méthode de M. Meyer, il trouva		71 · 14. 1
Moyenne de toutes les observations de M. Hansteen, en juin 1828		71°·17′, 3

On voit par les deux premières observations que l'axe de l'aiguille de M. Hansteen, quoique exécutée par un excellent artiste, n'était par exactement cylindrique.

En 1829, au mois de décembre, M. de Humboldt obtint, dans le même jardin, les résultats suivans

Avec l'aiguille *A*	71°·3′, 4
Avec l'aiguille *B*	71·10, 0.

Au mois de mai, de la même année, le même observateur avait trouvé:

Avec l'aiguille *A*	71°·6′
Avec l'aiguille *B*	71·13.

Les deux aiguilles de l'instrument de M. de Humboldt, ayant toujours donné, sur d'autres points, le même résultat, à 1′ au 2′ près, je soupçonnais, qu'une d'elles pouvait bien avoir quelque défaut à l'axe qui n'altérait les résultats, que lorsque l'inclinaison était fort grande. Pour nous en convaincre, nous résolûmes, M. Han-

STEEN et moi, d'observer en même temps avec l'instrument de M. DE HUMBOLDT et celui de M. HANSTEEN, après les avoir placés à une distance convenable l'un de l'autre.

L'aiguille de M. HANSTEEN me donna . . . 71°·16′, 6 } moy. 71°·11′,5.
Après avoir retourné l'axe de l'aiguille de 90° 71 · 6, 4 }

Les deux aiguilles de M. DE HUMBOLDT donnèrent à M. HANSTEEN . . . . l'aiguille *A* . . . 71°· 9′, 5
l'aiguille *B* . . . 71 · 3, 2

L'aiguille *A* de M. DE HUMBOLDT, donna avec un poids . . . 71°·11′, 2

Enfin, une autre observation, exécutée par moi avec une excellente boussole de Gambey, faisant partie de la belle collection d'instrumens pour le magnétisme terrestre, qui appartient à notre petit observatoire magnétique, donna . . . 71 ·11, 0.

On voit, que la véritable inclinaison de ce jour était très probablement 71°·11′,0 et qu'entre les deux résultats, que donnèrent les aiguilles de M. DE HUMBOLDT, le premier, qui donne 71°·9′,5, s'approche le plus de la vérité, il n'est en erreur que de 1′ ½ *).

Ces observations nous font voir en même temps, que l'inclinaison diminue constamment à St.-Pétersbourg d'une année à l'autre. Effectivement cette inclinaison à été:

au mois de juin 1828, . . .	71°·17′, 3
au mois de mai 1829, . . .	71 ·14, 5
au mois de décembre 1829, . .	71 ·11, 5
au mois de mai 1830, ...	71 ·11, 3.

Le décroissement annuel de l'inclinaison à St.-Pétersbourg peut donc être evalué à 3′.

Sur un Mammouth semblable à l'éléphant actuel d'Afrique.

On sait que M. CUVIER dans ses savantes *Recherches sur les ossemens fossiles* n'a pas trouvé de preuves assez fondées pour admettre plus d'une espèce d'éléphant fossile, c'est-à-dire celle que tout le monde connaît sous le nom de Mammouth, et que les Zoologistes méthodiques de nos jours ont appelée: *Elephas primigenius* ou *Ele-*

---

*) Quiconque connaît les soins et l'exactitude extrêmes, avec lesquels M. DE HUMBOLDT à observé l'inclinaison magnétique pendant son voyage en Russie, conviendra avec moi, qu'il faut attribuer cette erreur a l'instrument et non à l'observateur: aussi l'ai je regardée, dans ce qui suit, comme une erreur constante, dont il faut corriger toutes les observations exécutées à St.-Pétersbourg avec l'aiguille *A* de M. DE HUMBOLDT. Après avoir examiné avec soin toutes les parties de la boussole de M. DE HUMBOLDT, j'ai découvert que les deux petites pièces en agathe, sur lesquelles l'aiguille repose, ne sont pas exactement dans le même plan: c'est peut-être la cause de l'erreur trouvée.

phas jubatus. Nous n'irons pas examiner, si M. FISCHER DE WALDHEIM, infatigable observateur des animaux fossiles de Russie, a raison de distinguer parmi les Mammouths cinq espèces selon les dents mâchelières et les mandibules. (Conf. *Nouveaux Mémoires de la société Impériale des naturalistes de Moscou, Tom. I. p.* 281). Nous nous bornerons seulement à remarquer que les dents de tous ces Mammouths diffèrent peu de celles de l'éléphant actuel de l'Asie, et que M. CUVIER est fort indécis relativement à l'existence d'une espèce fossile dont les dents aient une très grande ressemblance avec celles de l'éléphant d'Afrique, attendu qu'il ne trouve pas toute la précision nécessaire dans les témoignages de MM. DE HUMBOLDT, AUTHENRIETH et EBEL sur une telle espèce fossile. (*Recherches sur les oss. foss. 2. edit. Vol. I. p.* 166).

Après avoir publié cette partie de la seconde édition de son ouvrage, M. CUVIER a reçu de la part de M. SCHLEIERMACHER le dessin d'une dent que l'on croyait fossile, et qui était absolument semblable à la dent de l'éléphant d'Afrique. (*Cuv. Recherches, Vol. V. partie seconde p.* 496). Puis on annonça de telles dents dans les Archives pour la connaissance du monde primitif (*Archiv für die Urwelt* et dans la *Géologie de BREISLACK, Tome II.*) sans cependant donner une description suffisante ou un dessin instructif. M. GOLDFUSS fit représenter deux dents de forme absolument semblables à celles de l'éléphant d'Afrique, dont l'une était d'origine incertaine et l'autre déterrée aux bords de la Roer. M. GOLDFUSS ajouta que l'on prétendait que ces dents se déterraient quelquefois dans la vallée du Rhin. (*Nov. Act. Acad. Caesar. Leopold. Nat. Cur. Vol. XI. p.* 485). M. BAER a également décrit deux dents mâchelières à losanges (*De fossilibus mammalium reliquiis in Prussia repertis, p.* 19). L'une de celles-ci, que l'on prétendait être déterrée aux environs de Tilsit, n'était certainement pas fossile, car on n'apercevait que trop distinctement une partie assez considérable du tissu cellulaire adhérent à l'état desséché. L'autre dent venait du cabinet de KLEIN, et cet illustre naturaliste l'avait marquée dans son catalogue comme trouvée dans une colline de sable près de Dantzig. Elle avait cependant l'air bien frais et était même d'une blancheur étonnante. M. BAER ne pouvait donc se décider à regarder cet échantillon comme fossile.

M. CUVIER, en rendant compte de ces observations dans un article additionnel de l'an 1824 (*Recherches Vol. V. l. c.*), semble encore moins disposé qu'auparavant d'admettre cette seconde espèce de Mammouth, puisque la dent de M. SCHLEIERMACHER était d'origine incertaine, l'une des dents décrites par M. GOLDFUSS ne montrait pas assez distinctement les losanges à la surface, et une autre qu'on avait envoyée à M. CUVIER, semblait si peu altérée, qu'il doutait de son origine fossile. Quant aux observations de M. BAER, M. CUVIER y trouve des preuves qui justifient ses propres doutes.

Aprésent M. BAER, qui dans le mémoire allégué ne pouvait se décider à reconnaître une seconde espèce d'éléphant fossile, ne doute plus de son existence. Il vient de trouver parmi les dents de Mammouth ordinaires que possède l'Académie,

une dent assez endommagée à losanges si distincts, qu'il ne peut être question de l'identité de cette dent avec celle du Mastodonte ou du Mammouth ordinaire. Cette dent, que M. Baer a mise sous les yeux de l'Académie, n'est malheureusement pas d'une origine constatée, et la seule chose qui puisse porter à croire qu'on l'a déterrée, c'est qu'elle se trouvait parmi la collection des fossiles de l'Académie. Il faut même avouer que la substance corticale, quoique divisée par de larges fissures, comme dans la dent représentée par Goldfuss (*Nova Acta Acad. Caesar. Leopold. Carol. Nat. Curios. Vol. X. Tab. XLIV*), est assez solide, et qu'on y distingue très bien ce que M. Cuvier nomme tissu soyeux de la substance dite osseuse. Mais l'examen de notre grande collection de dents de l'*Elephas primigenius* prouve que le tissu soyeux ne disparaît pas toujours dans les dents sans contredit fossiles. Il semble même que les dents de cette seconde espèce de Mammouth sont toujours moins altérées que celles de l'espèce ordinaire, car c'était le même cas dans la dent décrite par Goldfuss au Vol. XI. des *Nova Acta* et qui doit être regardée comme fossile, puisqu'elle a été déterrée.

L'origine de la dent mentionnée de notre cabinet ne pouvant être constatée, M. Baer fait part, à cette occasion, d'une observation décisive que M. Nitzsch a bien voulu lui communiquer. Ce savant a examiné il y a une vingtaine d'années, une dent déterrée aux environs de Wittenberg, qui ressemblait à la dent de l'éléphant d'Afrique. Si les observations de M. Nitzsch ont été negligées, il faut en attribuer la cause à ce que ce naturaliste publia ses recherches dans quelques éphémérides peu connues du monde savant.

Comme la seconde espèce de Mammouth, à laquelle nous conserverons le nom d'*Elephas priscus*, proposé par M. Goldfuss, semble être constatée, il restera à examiner si la diversité qui s'observe parmi les défenses fossiles ne tient pas à la diversité des espèces.

Sur les larves de diverses espèces d'Oestrus.

M. l'Académicien Hamel a lu un mémoire ayant pour objet de démontrer l'utilité dont il serait pour la science et l'industrie manufacturière d'examiner avec plus de précision, qu'on ne l'a fait jusqu'ici, les différentes espèces d'*Oestrus* dont les larves parasites sont logées sous la peau de divers quadrupèdes et parviennent à leur entier développement dans des abcès purulents, qui occasionnent dans le cuir des trous et autres défauts, auxquels les tanneurs et chamoiseurs russes donnent le nom de petite vérole (воспина).

M. Hamel a fait observer, que les chamoiseurs de Moscou préparent avec les peaux de la chèvre sauvage des steppes de la Russie méridionale, appelée Saigak et Saiga (*Antilope Saiga*), une peau de gants d'un moëlleux qui surpasse celui de toutes les autres peaux chamoisées. Mais très souvent la plus grande et la meilleure partie, celle du milieu, de ces peaux est perdue à cause des nombreux trous prove-

nant des larves de l'*Oestrus Antilopum Pall.* Une collection de peaux crues et chamoisées de Saiga, présentées à l'Académie par M. Hamel, ont fait voir, que dans l'animal vivant les trous dans la peau se ferment presqu' immédiatement après la sortie des vers de leurs nids et se cicatrisent si bien, qu'on ne peut guère en voir des traces surtout après le foulage des peaux avec l'huile. Comme il est à présumer, que chez tous les Saiga la parfaite maturité de ces larves et leur sortie ont lieu à peu près à la même époque de l'année, la connaissance exacte de cette époque pourrait servir de base à un réglement qui défendrait, avant sa venue, la chasse de ces antilopes. Ces remarques pourraient s'appliquer aux élans et aux rennes de la Sibérie, dont les peaux, reçues quelquefois en paiement du tribut ou Iassak, sont détériorées par l'*Oestrus Tarandi.* L'insecte qui gâte les peaux de nos boeufs et de nos vâches, est, comme on sait, l'*Oestrus Bovis.* Cette dernière espèce d'Oestrus a été observée avec un soin particulier par Réaumur (voyez ses Mémoires pour servir à l'histoire des insectes, Tome IV, page 503—572); cependant il reste encore beaucoup à examiner, même la manière dont la mouche perce la peau et dépose ses oeufs n'a pas été bien observée. Il serait à désirer que des Naturalistes de l'intérieur de la Russie à portée des endroits propres à ces recherches, voulussent bien, dans l'intérêt de la science et de l'industrie manufacturière, se vouer à une étude approfondie de ces insectes parasites.

E R R A T A.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
142.	5.	$\frac{p \cdot p' \cdot p'' \cdots}{N}$	$\frac{(p-1)\ (p'-1)\ (p''-1) \cdots N}{p \cdot p' \cdot p'' \cdots}$
205.	12.	*Hyatea.*	*Hyalea.*
208.	19.	*Aetinea.*	*Actinia.*

BULLETIN SCIENTIFIQUE.

Note relative à une aurore boréale, observée à St.-Pétersbourg, dans la nuit du 5 au 6 Mai 1830; par M. A.-T. KUPFFER.

(Lu le 2 Juin 1830.)

Le 5 Mai, vers 11^h du soir, étant précisément occupé à observer les variations horaires de la déclinaison magnétique, je fus surpris de voir tout d'un coup l'aiguille osciller très sensiblement, et dévier en même tems vers l'Est d'une manière remarquable. Convaincu par une longue expérience de l'influence des aurores boréales sur la direction de l'aiguille aimantée, je me mis à examiner le ciel, pour voir si je ne découvrirais pas quelque aurore boréale, qui fût la cause de ces irrégularités et effectivement, après quelques jets d'une lumière blanche, qui s'élevaient perpendiculairement vers le zénith, dans la contrée septentrionale du ciel, je vis se former un arc de la même lumière, dont la partie culminante était dirigée dans le méridien magnétique. Des rayons blancs, qui partirent de cet arc, en se dirigeant vers le zénith, couvraient presque toute la moitié nord du ciel; deux colonnes d'une teinte rougeâtre terminaient cette apparition vers la gauche et la droite. Le ciel était parfaitement serein, et il faisait un beau clair de lune; j'attendais envain la formation d'une couronne au-delà du zénith; elle n'eut pas lieu. Dans le commencement, on pouvait distinguer un banc noir qui reposait sur l'horizon, au-dessous de l'arc blanc; mais bientôt ce banc disparut, l'arc baissa peu à peu, et finit enfin par disparaître aussi, ce qui arriva vers les deux heures du matin.

Pendant tout ce tems, j'observais soigneusement la marche de l'aiguille; elle a été observée en même tems à Nicolaïeff, Kazan, Berlin et Freyberg: car le 5 Mai est précisément un des jours de l'année que nous avons fixés, à l'invitation de M. DE HUMBOLDT, pour nos observations correspondantes sur les variations horaires de la déclinaison*). Le tableau suivant contient les observations de St.-Pétersbourg, Nikolaïeff et Kazan**). celles de Berlin et de Freyberg ne m'étant pas encore parvenues.

---

*) Ces jours sont: le 3 et 4 Février, le 20 et 21 Mars, le 4 et 5 Mai, le 21 et 22 Juin, le 6 et 7 Août, le 23 et 24 Septembre, le 5 et 6 Novembre et le 21 et 22 Décembre (nouveau style) depuis quatre heures du matin (tems moyen) du premier jour, pendant deux jours et deux nuits de suite, de 20′ en 20′.

**) Les observations de Nicolaïeff sont de M. KNORRE, celles de Kazan de M. SIMONOFF.

Le 5 Mai 1830.

Heures.	Variations de l'aiguille a St.-Pétersb.	à Nicolaïeff.	à Kazan.
0^h,00	40′, 00″	23^{mm},21	13^{mm},495
20	40, 30	13	575
40	41, 15	10	675
1, 00	41, 45	04	795
20	43, 00	13	835
40	45, 00	11	815
2, 00	45, 15	07	845
20	46, 00	11	875
40	46, 30	22, 97	765
3, 00	45, 00	23, 04	845
20	44, 30	05	935
40	45, 20	02	905
4, 00	45, 00	09	935
20	44, 15	12	805
40	43, 00	19	845
5, 00	41, 30	23	805
20	40, 45	26	705
40	40, 30	30	615
6, 00	40, 00	30	575
20	41, 45	30	545
40	41, 00	30	555
7, 00	42, 00	30	555
20	42, 00	30	585
40	42, 00	26	585
8, 00	42, 15	24	565
20	42, 00	30	605
40	40, 15	31	575
9, 00	32, 30	59	645
20	32, 30	63	575
40	32, 00	80	615
10, 00	26, 15	77	435
20	22, 30	24, 00	195
40	23, 00	06	275
11, 00	24, 45	23, 96	12, 825
20	17, 15	24, 03	805
40	9, 00	16	545

Le 5 Mai 1830.

Heures.	Variations de l'aiguille.		
	à St.-Pétersb.	à Nicolaïeff.	à Kazan.
$12^h,00$	(l'aiguille oscille fortem.) $4', 45''$	$24^{mm},23$	$12^{mm},475$
8	6, 00		— —
20	20, 30		12, 525
22	15, 00		
27	18, 15		
38	12, 30		
40	7, 00		
45	10, 30		
13, 00	(l'aiguille oscil-		
5			
20	le fortement.)		
40	30, 00		
14, 00	16, 15		

Les nombres indiqués dans ce tableau ne donnent que les variations de la déclinaison magnétique et n'ont aucun rapport avec la déclinaison absolue. Dans les observations de St.-Pétersbourg et de Kazan, un accroissement du nombre de minutes ou de millimètres désigne une déviation vers l'ouest; c'est le contraire à Nicolaïeff; un millimètre équivaut à $14',5$.

On voit, par ce tableau, que l'aiguille aimantée a éprouvé, dans la nuit du 5 au 6 Mai des déviations considérables de sa position ordinaire, tant à Nicolaïeff et Kazan, qu'à St.-Pétersbourg. Ces irrégularités ont commencé à St.-Pétersbourg et à Nicolaïeff vers 9^h du soir, à Kazan, vers $10^h\ 20'$; c'est à dire, elles ont eu lieu *dans le même instant* sur les trois points; car, à cause de la différence des longitudes, il est $10^h\ 16'$ à Kazan, lorsqu'il est 9^h à St.-Pétersbourg, et $9^h\ 7'$ à Nicolaïeff.

Pour faire ressortir davantage la simultanéité de ces phénomènes, j'ai composé le tableau suivant, où l'on trouve à côté des variations de l'aiguille de St.-Pétersbourg, celles de Nicolaïeff et de Kazan, qui ont eu lieu *dans le même instant* que celles de St.-Pétersbourg; les observations de Nicolaïeff et de Kazan ont été de plus réduites en arcs. Je suis parti de la même déclinaison pour tous les trois points, ce qui était permis de faire, parce que les nombres contenus dans le tableau précédent, ne se rapportent pas au véritable méridien, mais à une position tout-à-fait arbitraire de la boussole. Un accroissement dans le nombre de minutes et secondes désigne encore ici une déviation vers *l'ouest*.

Heures de St.-Pétersbourg.	Déviations de l'aiguille.		
	à St.-Pétersb.	à Nicolaïeff.	à Kazan.
7^h,00	42′, 00″	42′, 00″	42′, 00″
20	42, 00	42, 00	41, 35
40	42, 00	42, 35	42, 35
8, 00	42, 15	42, 52	41, 35
20	42, 00	42, 00	42, 20
40	40, 15	41, 52	39, 32
9, 00	32, 30	37, 48	36, 03
20	32, 30	37, 13	37, 13
40	32, 00	34, 45	30, 41
10, 00	26, 15	35, 11	30, 24
20	22, 30	31, 51	26, 38
40	23, 00	31, 00	25, 37
11, 00	24, 45	32, 26	26, 21
20	17, 15	31, 25	
40	9, 00	29, 32	
12, 00	4, 45	28, 32	

Dans ce tableau, les variations irrégulières qui ont eu lieu à Nicolaïeff et à Kazan sont tout-à-fait conformes à celles qu'on à observées à St.-Pétersbourg. On voit en même tems, que les écarts ont été plus considérables à St.-Pétersbourg, qu'à Nicolaïeff. Si l'on prend, pour ces deux endroits, les écarts respectifs que l'aiguille y a eprouvés depuis 7^h du soir, on trouve les valeurs suivantes:

	à St.-Pétersb.	à Nicolaïeff.
à 9^h00′	9′, 30″	4′, 12″
10,00	15, 45	6, 49
11,00	17, 15	9, 34
12,00	37, 15	13, 28
Sommes	1°, 19′, 45″;	44′, 3″

Ce qui fait voir que les écarts irréguliers de St.-Pétersbourg et de Nicolaïeff sont à très peu de chose près dans le rapport de 2 à 1. *) Une aiguille horizontale qui fait à St.-Pétersbourg 300 oscillations en 1108″, en fait autant à Nicolaïeff en 964″. Le rapport des carrés de ces deux nombres est 1,32; c'est

*) Le rapport des écarts réguliers est beaucoup moindre le même jour, l'aiguille de St.-Pétersbourg s'est avancée de $17'\frac{1}{4}$ vers l'ouest depuis $7h\ 40'$ du matin, jusqu'à $2h\ 40'$ après midi, tandis qu'à Nicolaïeff elle s'est avancée, dans le même intervalle, de $14'\frac{1}{2}$.

là le rapport des résultantes horizontales des forces magnétiques terrestres à St.-Pétersbourg et à Nicolaïeff: or, ce rapport est beaucoup plus petit que celui des écarts respectifs; la force qui produit ces écarts, doit donc agir avec plus d'intensité à St.-Pétersbourg qu'à Nicolaïeff. Ces mouvemens irréguliers et brusques de l'aiguille aimantée ont souvent, comme M. DE HUMBOLDT l'a fait voir le premier, des retours périodiques; ils se répètent quelquefois à la même heure pendant deux ou trois jours consécutifs. Les phénomènes dont je viens de donner les détails, m'ont déjà été annoncés le jour d'avance, par les écarts très irréguliers que l'aiguille a éprouvés dans la nuit du 4 au 5 Mai, et dont voici le tableau.

Le 4 Mai 1830.

Heures du lieu d'observation, soir.	Variations de la déclinaison.		
	à St.-Pétersb.	à Nicolaïeff.	à Kazan.
8^h,00	39',30''	23^{mm},47	13^{mm},555
9, 00	39, 15	45	615
10, 00	39, 30	48	615
20	37, 45	77	625
40	30, 00	81	615
11, 00	28, 45	81	645
20	31, 45	80	465
40	33, 00	79	195
12, 00	33, 00	78	175
20	26, 15	96	295
40	26, 15	24, 00	245
13, 00	24, 15	00	125
20	24, 15	23, 96	155
40	23, 15	24, 03	12, 900
14, 00	21, 45	10	905
20	22, 00	02	925
40	20, 15	04	925
15, 00	28, 00	05	765
20	32, 45	23, 84	890
40	37, 45	76	890
16, 00	35, 30	60	815
17, 00	39, 45	57	13, 495
18, 00	41, 15	58	13, 425

Dans la séance du 25 Août, M. KUPFFER présenta à l'Académie une nouvelle boussole exécutée selon ses idées par M. GAMBEY à Paris, et qui sert exclusivement à observer les variations de l'inclinaison magnétique. C'est une aiguille d'inclinaison d'un demi-mètre de longueur, dont l'axe est formé par un couteau qui repose, comme à l'ordinaire, sur deux petits plans d'agathe. Par une construction particulière, ce couteau, dont le tranchant passe exactement par le centre de gravité de l'aiguille, est équilibré de sorte, que le centre de gravité de tout le système se trouve amené sur le fil du couteau. L'aiguille est munie à ses extrémités de deux petits anneaux, portant des fils tendus dans la direction de l'aiguille dont on observe le déplacement (qui a lieu en vertu des variations de l'inclinaison) par le moyen de deux microscopes, fixés à l'appareil, dont les fils croisés glissent le long d'une division. La position du couteau étant invariable, cet instrument ne peut servir que pour une inclinaison déterminée, et pour laquelle on l'a fait; l'instrument présenté était réglé sur une inclinaison de 71°, qui est celle de St.-Pétersbourg.

M. KUPFFER donnera une description détaillée de cet instrument dans le recueil de ses observations magnétiques, qu'il publiera prochainement. C'est aussi dans ce recueil qu'on trouvera une série d'observations exécutées avec cette boussole, sur les variations horaires de l'inclinaison à St.-Pétersbourg.

Note relative à un baromètre d'une nouvelle construction, par **M. A.-T. KUPFFER.**

(Lu le 25 Août 1830.)

Le plus grand inconvénient de la construction ordinaire du baromètre, l'un des instrumens les plus utiles et les plus simples dont la physique se soit enrichie, est sans doute celui de le rendre difficile à transporter. Il est vrai qu'on parvient aisément, avec quelque attention, à éloigner presque toutes les chances de sa dégradation, aussi long-tems qu'on le maintient dans la position renversée, ou même horizontale; mais si par malheur on le retourne, les oscillations du mercure, s'il n'est pas enfermé, ou le changement de volume qu'il éprouve par les variations de sa température, si le baromètre est muni d'un robinet, ne donnent que trop souvent une occasion facile à l'air extérieur de pénétrer dans le vide barométrique: il est donc impossible d'envoyer des baromètres par le roulage ou par une expédition publique quelconque, comme par les messageries de poste, qui offrent pour la Russie, une si grande facilité de transport pour tous les objets qui ne sont pas trop sujets à se casser.

Ce sont particulièrement les soins qu'il faut mettre à faire bien bouillir le mercure dans le tube barométrique, qui rendent difficile le rétablissement d'un baromètre endommagé; en route, sur une montagne, même dans une petite ville, il serait difficile de réunir tout ce qu'il faut pour cette opération; et les personnes

qui n'y sont pas habituées, ne le tenteront même pas, lorsqu'elles seront munies de tout ce qui est nécessaire. Même pour des observations sédentaires, les baromètres ordinaires offrent plusieurs sources d'erreurs; il peut s'introduire, sans qu'on s'en aperçoive de suite, une petite quantité d'air; l'adhésion du mercure au verre peut diminuer avec le tems et augmenter sa dépression capillaire: il me paraît certain que même les baromètres à siphon ne donnent jamais ou rarement la véritable hauteur barométrique, parce que la dépression du mercure dans le vide, diffère sensiblement de la dépression du mercure qui a été pendant long-tems en contact avec l'air atmosphérique; cette différence peut même changer avec le tems, de sorte qu'il ne servirait à rien de l'avoir déterminée: aussi sait-on depuis long-tems que souvent des baromètres sortis du même atelier, et construits avec le même soin, offrent après quelque tems des différences de niveau assez considérables.

On peut obvier facilement à tous ces inconvéniens, si l'on ne tient pas à faire bouillir le mercure dans le tube barométrique; mais alors il faut avoir un moyen pour déterminer la pression de la petite quantité d'air, enfermé dans l'espace vide du baromètre, et qui s'y est introduit avec le mercure même. Un tel moyen a déjà été indiqué dans les Annales de Chimie et de Physique par M. Arago: il consiste à réduire le volume de l'espace vide dans le tube barométrique; la pression de l'air qui y est enfermé, augmentera dans la même proportion; il est évident, qu'on peut de cette manière, par deux observations consécutives, déterminer cette pression. Effectivement, soient e le volume de l'espace vide à la première observation A, et e' le volume du même espace à la deuxième observation B, on aura, par la loi de Mariotte, si l'on désigne par p et p' les pressions de la petite quantité d'air enfermé dans le vide, correspondantes aux volumes e et e':

$$\frac{p}{p'} = \frac{e'}{e},$$

et puis

$A + p = B + p' =$ à la hauteur barométrique corrigée, d'où l'on trouve

$$p = \frac{A - B}{\frac{e}{e'} - 1},$$

$$p' = \frac{A - B}{1 - \frac{e'}{e}}.$$

Pour effectuer la réduction de l'espace vide, la cuvette du baromètre, que j'ai fait construire dans l'atelier académique par M. *Girgensohn*, est un cylindre creux en fer, dont le fond mobile peut être monté et descendu à volonté par le moyen d'une vis, comme dans les baromètres de M. *Fortin*; dans ce réservoir sont implantés deux tubes de verre, le tube barométrique et un autre tube du même diamètre, mais

plus court, qui représente la branche courte du siphon. Le mercure, dont le réservoir est tout-à-fait rempli, s'élève dans ce petit tube, lorsqu'on trouve la vis qui fait monter le fond du réservoir; on peut de cette manière élever les deux niveaux du mercure jusqu'à tel point qu'on voudra. L'échelle de ce baromètre est mobile et finit à son extrémité inférieure, où se trouve le zéro de l'échelle, par une pointe en acier qui descend jusque dans l'intérieur de la branche courte du siphon. Lorsqu'on veut observer, on fait monter le mercure dans les deux branches, par le moyen de la vis adaptée au fond mobile de la cuvette, jusqu'à ce que la sommité de la surface du mercure enfermé dans la branche courte est en contact avec la pointe en acier; un index à vernier, qui glisse le long de la partie supérieure de l'échelle, donnera maintenant immédiatement la hauteur du mercure dans le tube barométrique. A cette première observation, on fait descendre la pointe presque jusqu'au fond du tube; on fait une seconde observation, après avoir fait monter considérablement l'échelle et le mercure: on peut encore en faire une troisième, après avoir poussé la pointe presque jusqu'à l'ouverture supérieure du tube; toutes ces observations donneront des hauteurs barométriques différentes et d'autant plus petites, que l'espace vide au-dessus du mercure dans le tube barométrique sera plus resserré. On peut s'arranger de manière, que dans la deuxième observation, cet espace se trouve exactement réduit à la moitié: dans ce cas, la différence des deux observations donnera inmédiatement la correction qu'il faut faire à celle qui donne la plus grande hauteur barométrique.

Voici un exemple.

Iière	observation:	$\overset{mm}{758,15}$	—	espace	correspondant:				$\overset{mm}{53}$
IIième	—	—	758, 5	—	—	—	—	—	62
IIIième	—	—	758, 8	—	—	—	—	—	81
IVième	—	—	759,05	—	—	—	—	—	101

Calculons seulement la 1ière et la 4ième observation: nous avons: $A = 759{,}05$, $B = 758{,}15$, $e = 101$, $e' = 53$; et partant:

$$p = 1^{mm}{,}00$$

Donc la hauteur barométrique corrigée $= 759^{mm}{,}05 + 1^{mm}{,}00 = 760^{mm}{,}05$.

BULLETIN SCIENTIFIQUE.

Lettre de M. le Dr. Erman *à M. l'Académicien* Wisniewsky.

(Lu le 11 Août 1830.)

Rio Janéïro le 13 Mai 1830.

Vous avez eu la bienveillance de lire à l'Académie Impériale de St.-Pétersbourg, un mémoire que j'avais osé lui présenter au sujet de quelques observations faites dans la capitale, en Juin 1828, et devant servir de point de départ à une expédition en Sibérie, que j'allais entreprendre conjointement avec M. le Professeur Hansteen. Je suis entré alors dans quelques détails sur le maniement des instrumens à employer, et leurs corrections, pour faire apprécier par là le degré de sûreté dont jouiraient les résultats à obtenir. Bien que je me proposasse alors de faire parvenir à l'Académie par des communications faites sur les lieux mêmes, les résultats de mes observations ultérieures, cependant je me vis obligé de me désister de ce projet; car dans le pays absolument nouveau pour moi, telle était la foule des objets géognostiques, météorologiques et autres, qui, outre le but principal du voyage, demandaient une attention toujours fixée sur eux, qu'il ne paraissait guères raisonnable de sacrifier à des communications épistolaires, un tems déjà trop restreint par d'autres circonstances. J'use du loisir que me fournit un retour par mer, pour m'acquitter d'un devoir que je crois avoir contracté envers l'institut, dépositaire des sciences dans un pays où l'on m'a partout honoré de la plus généreuse coopération dans tout ce qui me semblait pouvoir contribuer à l'avancement des sciences naturelles.

Parti de St.-Pétersbourg, je suis allé avec M. Hansteen jusqu'à Tobolsk: de manière qu'il existe pour cette partie de la route une double série d'observations faites par deux individus, avec des instrumens différens, et l'une indépendamment de l'autre. Nous suivîmes la grande route par Moscou et Kazan jusqu'à Catherinebourg, d'où nous fîmes un voyage au Nord, longeant la chaîne de l'Oural jusqu'au 60ème degré de latitude, et ayant en vue tant la continuation de la série d'observations magnétiques vers le Nord, que l'étude des caractères géognostiques de cette intéressante partie des montagnes Asiatiques. De Tobolsk M. Hansteen se rendit droit à Irkoutsk où je le rejoignis après m'être rendu en traîneau à Bérésov et Obdorsk, et y avoir visité le prolongement de l'Oural sous le cercle polaire. Nous fîmes conjointement un tour à Kiachta, endroit qui aussi sous le point de

vue magnétique n'est pas sans intérêt, puisque la ligne sans déclinaison passe actuellement à quelques dixaines de verstes de ce lieu. De retour à Irkoutsk, nous nous séparâmes vers la fin de Février 1829: M. Hansteen se proposant d'atteindre de hautes latitudes sous le méridien de Touroukhansk, comme étant plus oriental que celui d'Obdorsk. Je pris la route d'Okhotsk par Iakoutsk, passant par les montagnes escarpées connues sous le nom de *chaîne de l'Aldan*, et très remarquables par une formation de Traumate qui porte l'empreinte d'une origine volcanique qu'on n'est pas accoutumé de voir dans cette espèce de roche. Le séjour forcé de plus d'un mois que je fis à Okhotsk, me permit entr'autres de pourvoir à un besoin très essentiel pour la continuation des observations magnétiques; c'était un appareil pour l'établissement de la boussole d'inclinaison à bord d'un vaisseau, appareil dont je comptais me servir pendant le trajet d'Okhotsk à Tigil, et que je voulais emporter avec moi jusqu'au port de *Pétropavlovski*, pour le cas d'un embarquement ultérieur. On me permit de faire exécuter cet appareil dans l'atelier mécanique du port d'Okhotsk, et il ne laissa pas de faire tout l'effet que je m'en étais promis. J'ai traversé la presqu'île du Kamchatka depuis le 59ème jusqu'au 51ème degrè de latitude; continuant la série de déterminations magnétiques, et m'occupant à la fois de la géognosie de cette contrée infiniment intéressante. J'y vis des *formations de terrains tertiaires* border la mer d'Okhotsk et les fleuves qui s'y jettent: je passai par les montagnes de roches pour la plupart *augitiques*, qui constituent le système connu sous le nom de *chaîne de Sedanka*. Bien que d'une origine évidemment ignée, il n'y a pas un seul point dans ce système de montagnes où l'action volcanique s'exerçât jusqu'à nos jours. Il s'établit par là un contraste frappant de ces formations avec les roches *trachytiques* (c. a. d. contenant du Feldspath) que je vis composer les vrais Volcans le *Chivéloutch*, ceux de *Klioutchi*, de *Tolbatchá* et d'*Avatcha*. Je possède des données barométriques et trigonométriques pour les hauteurs totales des trois premiers, et pour la hauteur de la *limite des neiges* et de celle *des arbres* sur leurs penchans. Le Volcan de Klioutschi, pendant le tems que j'y montais, lançait par son sommet un jet de ponce ardente, formant pendant la nuit un nuage d'étincelles semblables à celles qui sortiraient de la cheminée d'une forge immense, et pendant le jour prenant l'aspect d'un nuage noir dont une continuation en bande rectiligne paraissait atteindre l'horizon du côté qui était sous le vent, et en effet couvrait le pays à plusieurs *centaines* de verstes d'une ponce réduite en poudre et connue sous le nom de *cendres volcaniques*. Par une fente à son penchant occidental, non loin du sommet sortaient un torrent de laves et d'immenses masses globuleuses d'une vapeur aqueuse.

J'eus le bonheur de rencontrer encore au port de Pétropavlovski le vaisseau Impérial le *Krotkoï*, sous les ordres de M. le Capitaine de Hagemeister; accueilli à son bord pour retourner en Europe, j'ai joui de l'avantage inappréciable et long-tems désiré de lier par une comparaison immédiate les intensités de la force magnétique observées en Sibérie, à celle qui existe sous l'équateur

magnétique. On est convenu de regarder comme unité de force, l'intensité que M. de Humboldt observa au Pérou, l'inclinaison étant à zéro, et l'on suppose alors la force être constante dans tous les points de la ligne sans inclinaison. On verra par les observations que je me fais un devoir de communiquer ici, de combien il s'en faut que cette constance ait lieu.

L'appareil dont je me suis servi pour placer la boussole d'inclinaison à bord du vaisseau répond si bien à son but, que les observations faites en mer ne le cèdent guères en sûreté à celles que l'on peut exécuter à terre, soit pour l'inclinaison, soit pour les oscillations qui servent à mesurer la force. Cet appareil ne consiste qu'en une planche ronde d'un diamètre assez grand pour qu'on puisse y placer les vis de support de l'instrument, et suspendue à la manière des boussoles marines. Les trois pieds de bois que j'adaptai d'abord à l'anneau extérieur, de manière à pouvoir démonter la machine pour en faciliter le transport par terre, furent dans la suite remplacés, à bord du vaisseau, par un support plus solide. Un moyen aussi simple et aussi naturel ne mériterait pas, sans doute, que j'en parlasse ici, si je ne croyais entrevoir dans l'imperfection de l'établissement des boussoles d'inclinaison, la cause qui depuis long-tems nous a privé, pour les Océans, de séries d'observations de cette espèce, tout aussi nombreuses et tout aussi sûres que celles qu'on possède déjà pour les continens.

Le tableau ci-joint contient toutes mes observations magnétiques en Sibérie, et leur continuation dans le grand Océan et l'Océan atlantique jusqu'au Brésil; toutes ont été faites avec les instrumens décrits dans mon rapport antérieur, à l'exception cependant des *déclinaisons déterminées en mer*, que M. le Capitaine Hagemeister a bien voulu me permettre d'extraire du Journal astronomique rédigé à bord du vaisseau qui est sous ses ordres. Pendant notre station au Kamtchatka, j'ai comparé l'instrument de déclinaison employé à bord, avec la boussole dont je me suis servi à terre. Vérifiée avec la dernière exactitude pour la ligne de collimation et pour l'angle existant entre l'axe magnétique de l'aiguille et son axe de figure, ma boussole donne des résultats auxquels on peut se fier, et il ne s'est pas manifesté de différence constante entre les indications de ma boussole et celles de la boussole marine. — Quant aux longitudes et aux latitudes des lieux d'observation en Sibérie, je les ai préalablement empruntés des Cartes de M. Maximovitsch; j'espère pouvoir communiquer à l'Académie les résultats des déterminations géographiques que j'ai faites moi-même après avoir combiné d'une manière suivie toutes les données de mes observations. Je n'ai fait usage de mes propres observations, que pour les endroits situés entre Iakoutsk et Okhotsk, et pour ceux du Kamtchatka, parce que les premiers n'étant souvent que des campemens d'hiver de Tongouses Nomades, ils ne se trouvaient pas sur les cartes que je fus à même de consulter, et que pour les seconds, les longitudes indiquées sur ces cartes se trouvaient trop inexactes pour en faire usage.

Je crois encore devoir ajouter que la place choisie pour les observations sur le vaisseau est telle, que tous les essais que j'ai faits jusqu'à présent pour déterminer l'influence que pouvaient exercer sur l'inclinaison, les masses de fer faisant partie du vaisseau, n'ont donné pour résultat qu'une influence très petite ou nulle: Comme j'espère continuer ces essais pendant notre séjour au Brésil, je trouve plus convenable de n'en présenter l'exposition qu'après la fin de mon voyage.

Les observations magnétiques qui doivent concourir au perfectionnement de la théorie du magnétisme terrestre, peuvent en général avoir un double emploi: l'un *prealable*, ou servant à comparer préalablement les conséquences d'une hypothèse quelconque sur le nombre et la disposition des pôles de l'aimant terrestre avec les observations, c'est à dire sans tâcher encore d'obtenir les quantités numériques qui doivent entrer en considération pour compléter la théorie; l'autre *définitif* ou servant à déterminer numériquement les quantités constantes qui sont nécessaires pour établir la théorie qu'on a cru devoir adopter, en se laissant guider par le travail préalable que nous venons d'indiquer. Je me bornerai ici à la représentation graphique de mes résultats. Cette méthode, qui consiste à lier, par des courbes continues, tous les points où les élémens du magnétisme terrestre sont les mêmes, offre non seulment le moyen le plus prompt et le plus élégant d'exécuter la première partie du travail mentionné, mais encore l'avantage de faire découvrir d'un seul coup d'oeil, si certaine relation qu'on a déduite comme conséquence nécessaire d'une théorie quelconque établie *à priori*, est ou n'est pas d'accord avec la nature.

Sur les cartes ci-jointes, les lignes d'égale inclinaison et d'égale déclinaison, sont marquées, les premières en rouge, et les secondes en bleu; les jaunes sont les lignes isodynamiques.

Lignes d'égale inclinaison.

On voit qu'à partir du méridien de Berlin, ou de 14° à l'Est de Greenwich, ces lignes, en se prolongeant vers l'Orient, s'élèvent d'abord assez rapidement vers le Nord, et atteignent un maximum de latitude boréale fort près du 42ème degré de longitude orient.; de là, elles s'inclinent de nouveau vers le Sud-Est avec une rapidité sensiblement égale, et forment de cette manière deux branches symétriques des deux côtés du maximum. Près du 110ème degré de longitude orientale, ou non loin du méridien d'Irkoutsk, elles atteignent un minimum de latitude. L'abaissement depuis le maximum jusqu'au minimum est de 5°, 5. Les lignes s'élèvent ensuite très rapidement vers le Nord pour atteindre un peu à l'Ouest du méridien moyen du Kamtchatka, ou à 155° de longitude orient. un second *maximum de latitude*, égal au premier. Les observations faites pendant le trajet du Kamtchatka en Californie et aux ports de *Saint-François* et de *Sitka*, démontrent d'une manière très satisfaisante que les lignes d'égale inclinaison éprouvent ici un abaissement vers l'équateur encore beaucoup plus considérable; car sous le méridien de St.-François, en Californie, les lignes d'égale inclinaison

sont de 15° plus rapprochées de l'équateur, que sous le méridien du Kamtchatka où elles atteignent un maximum de latitude. La suite de nos observations prouve qu'entre le 218ème et le 237ème degré de longitude à l'Est de Greenwich, l'équateur magnétique, et par conséquent aussi les lignes d'égale inclinaison sont horizontales, mais qu'à l'Orient de ce point elles continuent de nouveau à s'abaisser de manière à ne parvenir au minimum que près du méridien du Cap-Horn. J'espère obtenir la détermination ultérieure de la longitude de ce minimum par des observations que j'ai l'intention d'instituer pendant le trajet du Brésil en Europe. — Je me permets d'entrer dans quelques détails sur le cours de la partie de *l'équateur magnétique* que j'ai pu déterminer par des observations immédiates, et faites sur les lieux-mêmes, attendu que les résultats obtenus s'éloignent très considérablement, non seulement de ceux des calculs de la théorie, mais encore de celui qu'ont fourni certaines observations.

Lorsque nous partîmes de la Californie pour nous diriger vers le Sud, nous avions l'espoir de rencontrer l'équateur magnétique en un point très important pour la théorie, et nommément dans le voisinage *des deux noeuds* ou points d'intersection des deux équateurs que M. Hansteen a supposés à 15° l'un de l'autre, ou bien près du *noeud tangent* par lequel M. *Morlet* a depuis remplacé l'hypothèse de son illustre prédécesseur. M. le Capitaine Hagemeister promit même, pour le bien de la science, de longer l'équateur terrestre dans l'espace de dix ou vingt degrés de longitude de côté et d'autre de l'endroit qui paraîtrait le plus important. Le rapport fait à l'Académie de Paris sur le voyage de M. le Capitaine Duperrey (voyez: Connaissance des tems pour l'an 1829.) me porta à conclure que des observations d'inclinaison exécutées entre les méridiens de 255° et 230° de longitude orientale comptés depuis Greenwich, seraient d'une grande importance; car il faut se rappeler que M. Hansteen, guidé par des observations faites en 1780, plaça le premier de ces noeuds sous le méridien de 254°, et qu'en 1819 M. de Freycinet crut retrouver ce même noeud sous le méridien de 230°. — Les vents alizés du SE que nous reçûmes déjà au 5ème degré de latitude boréale, ne permirent pas d'avancer à l'Est du méridien où nous nous trouvions alors: nous coupâmes néanmoins l'équateur terrestre encore à l'Est du méridien où le noeud devrait se trouver actuellement d'après les résultats de M. Freycinet, et nous avançames à l'Ouest jusqu'au 216ème degré. Les observations que j'exécutai pendant ce trajet, me conduisirent au résultat remarquable que *la partie de l'équateur magnétique comprise entre les degrés 237° et 217° à l'Est de Greenwich, ne touche ni ne coupe nulle part l'équateur terrestre, mais passe par le 1°55′ latitude australe, affectant un cours à fort peu près parallele à l'équateur terrestre.* Les inclinaisons observées entre 5° de latitude boréale et le 6° et 7° latitude australe, satisfont rigoureusement à l'équation

$tg. i = 2tg. \varphi$ (où i désigne l'inclinaison, et φ la latitude magnétique) de façon, que par mes observations répétées de 4 en 4 heures, je pus souvent m'apercevoir de l'effet de quelque courant ou autre cause semblable, qui avait fait dévier le vaisseau de la route estimée, avant que ce changement de place eût été avéré par des observations astronomiques.

Après avoir remplacé, pour plus de simplicité, l'équation précitée par la suivante $\varphi = \frac{i}{2}$ qui, pour les inclinaisons ne surpassant pas 10 à 12°, est aussi rigoureuse que la précédente, j'ai déterminé comme il suit, le cours de l'équateur magnétique le plus conforme à l'ensemble des observations. Plaçant sur une carte, tous les points d'observation, et décrivant autour de chacun de ces points un cercle d'un rayon égal à la moitié de l'inclinaison observée, la ligne qui passera le plus près de tous ces cercles remplira les conditions exigées pour l'équateur magnétique. Si les observations étaient sans erreurs, la ligne demandée devrait être tangente à tous les cercles, mais à cause des erreurs inévitables, on doit se contenter de mener la ligne d'après les principes connus du calcul des probabilités, de telle sorte que la somme des carrés des distances comprises entre cette ligne et la circonférence de chaque cercle, devienne un minimum. Pour simplifier cette opération, j'ai supposé que la partie de l'équateur magnétique que nous considérons est rectiligne; ce qui revient à la représenter sur le globe même par une portion de grand cercle *). On trouve de cette manière l'équation suivante pour représenter la ligne demandée:

$$i = -2 \left[(x - 174°, 42) \sin. 40' 2'' - y \cdot \cos. 40' 2'' \right],$$

où i désigne *l'inclinaison de l'aiguille* dans un endroit situé à $[218° + x°]$ à l'Orient du méridien de Greenwich et à $y°$ de latitude.

Cette expression nous montre que la portion de l'équateur magnétique qui nous occupe, peut être représentée par une ligne droite qui suffisamment prolongée couperait l'équateur terrestre par les 32°,42 de longitude à l'Est de Greenwich, et qui à partir de ce point d'intersection, fait un angle de 0° 40′ 2″ avec l'équateur terrestre. Il suit de là que,

sous les 236° longit. orientale, l'équateur magnét. passe par 1° 49′,2 lat. aust.
et — — 218° — — — — — — — par 2° 1′,8 — —

---

*) Comme l'éloignement des deux lignes (l'équat. magnétique de l'équat. terrestre) dans les limites où nous nous proposons de les considérer ne surpassera pas deux degrés, la représentation d'un *grand cercle* par une ligne droite ne s'éloignera pas sensiblement de la vérité, quelle que soit la projection dont on fera usage pour la carte.

Cette hypothèse donne le tableau que voici:

Observation.	Calcul.	Différence.	Observation.	Calcul.	Différence.
+ 13°02′,60	+ 12° 48′, 0	+ 14′, 6	+ 0°16′,20	+ 0° 7′,46	+ 8′,80
+ 9 18, 30	+ 9 3, 76	+ 14, 6	— 0 42, 60	+ 0 7, 48	— 50, 10
+ 7 21, 10	+ 6 47, 66	+ 33, 5	+ 0 0, 40	+ 0 9, 80	— 10, 20
+ 5 15, 40	+ 5 14, 00	+ 1, 4	+ 0 46, 70	+ 0 56, 10	— 9, 40
+ 3 30, 40	+ 4 1, 04	— 40, 6	+ 1 5, 40	+ 0 59, 48	+ 5, 90
+ 3 8. 50	+ 3 19, 82	— 11, 3	+ 0 43, 16	+ 0 57, 40	+ 14, 2
+ 3 45, 30	+ 3 59, 24	— 13, 9	+ 0 03, 70	+ 0 21, 56	— 25, 3
+ 3 46, 00	+ 4 6, 88	— 19, 1	— 0 21, 80	— 0 23, 16	+ 1, 3
+ 4 19, 30	+ 4 3, 12	+ 16, 2	+ 0 14, 90	+ 0 13, 72	+ 1, 2
+ 3 49, 50	+ 3 48, 30	+ 1, 2	— 0 39, 40	— 0 37, 40	— 2, 0
+ 2 38, 20	+ 2 49, 84	— 11, 6	— 1 45, 56	— 2 22, 76	+ 37, 20
+ 2 16, 80	+ 2 27, 60	— 10, 8	— 2 50, 22	— 3 1, 80	+ 11, 60
+ 2 10, 90	+ 2 3, 04	+ 7, 9	— 5 3, 90	— 4 55, 80	— 8, 10
+ 1 32, 80	+ 1 35, 90	— 3, 10	— 7 29, 80	— 7 3, 00	— 26, 80
— 0 14, 60	+ 0 15, 28	— 29, 90	— 8 5, 90	— 7 38, 20	— 27, 70

La différence moyenne entre la formule et l'observation est de ± 14′, ce qui fait 7′ pour la latitude magnétique. J'avoue que cette quantité me paraît beaucoup trop grande pour pouvoir être attribuée aux erreurs de l'observation, qui, d'après la discussion à laquelle j'ai soumis les différentes sources d'erreurs qui peuvent accidentellement influencer les résultats, ne devraient pas excéder 6′ à 8′ terme moyen. On représenterait peut-être plus exactement l'ensemble des observations en donnant à l'équateur magnétique une forme différente de celle que nous lui avons supposée. Je ferai encore remarquer que la formule $tg \cdot i = 2 \cdot tg\, \varphi$ ne peut satisfaire aux observations que dans le voisinage de l'équateur magnétique; car plus on s'en éloigne plus le résultat de l'équation sera excédé par la réalité, comme les observations suivantes le démontrent pour le méridien de 218° et de 236° à l'Est de Greenwich.

Latitudes		*Inclinaison d'après*	
terrestres	*magnétiques*	*la formule*	*l'observation*
0° 0′	1° 55′	3° 49′	3° 49′
10 0	11 55	22 53	23 19
20 0	21 55	38 49	40 11
30 0	31 55	51 15	53 55
40 0	41 55	60 53	64 0
50 0	51 55	68 36	70 50
57 3	58 58	72 3	75 43

Cette comparaison est faite en supposant les deux équateurs absolument parallèles, sous les méridiens mentionnés, si l'on veut avoir égard à l'angle de 0° 40′ que ces deux lignes font entre elles, la latitude magnétique et l'inclinaison diminueront et l'excès de l'observation sur la formule sera d'autant plus grand.

Lignes d'égale déclinaison.

En traversant la Sibérie, j'ai coupé quatre fois la ligne sans déclinaison, et nommément près de *Nijni-Novgorod* par { 56° 17′ latit. boréale, 44° 15′ long. orient. de Greenw.

près de *Kiachta* par { 50° 40′ latit. boréale. 106° 15′ long. orient. de Greenw.

sur la route d'*Irkoutsk à Iakoutsk* par { 59° 50′ latit. boréale. 114° 0′ long. orient. de Greenw.

et enfin sur la mer d'*Okhotsk* vers { 58° 30′ latit. boréale. 150° long. orient. de Greenw.

Ces données seules, ne suffiraient pas pour se former une idée précise ni de la ligne sans déclinaison elle-même, ni de quelqu'autre ligne d'égale déclinaison; c'est plutôt en consultant les changemens que la déclinaison éprouve sur un des parallèles qui traversent l'Asie, qu'on parvient aux résultats suivans. Sous les méridiens qui de part et d'autre avoisinent celui de 44° long. orient. les lignes en question contenues entre 55° et 60° latit. boréale, coïncident à fort peu près avec les méridiens terrestres, ou pour mieux dire sont inclinées du NNO au SSE. Plus on avance vers l'Est, et plus les tangentes de ces branches descendantes des courbes d'égale déclinaison, sont inclinées sur les méridiens terrestres, jusqu'à ce qu'enfin vers le 78ème degré de longitude orientale, elles deviennent horizontales: les courbes y atteignent un minimum de latitude: car sous ce méridien (entre Tobolsk et Irkoutsk non loin de la ville de Tara) on *rencontre à égalité de latitude, la plus grande déclinaison orientale.* S'avançant au-delà de ce point sur le même parallèle terrestre, on rencontre de nouveau toutes les déclinaisons orientales depuis 9° jusqu'à zéro, mais en ordre inverse: c'est qu'on rencontre ici les branches ascendantes des courbes d'où l'on a coupé les branches descendantes entre les 44ème et 78ème degrés. Nous avons plus particulièrement étudié la branche ascendante de la ligne sans déclinaison dont la partie qui est contenue entre le 50ème et le 60ème degré de latitude s'élève très rapidement vers le nord. — La suite de nos observations nous autorise à supposer que cette ligne (et toutes celles qui répondent à des déclinaisons entre 0° et 6°), atteint un maximum de latitude sous le 132ème degré de long. orientale, ou à peu près sous celui de la ville d'Iakoutsk, c'est là en effet qu'*à egalité de latitude on rencontre la plus grande déclinaison occidentale*, qui sous le 60ème degré de latitude nommément ne dépasse pas 6°: il est plus que vraisemblable que sous ce méridien

la déclinaison augmente si l'on avance vers le Sud, mais on ne saurait dire jusqu'à quel point. La route d'Iakoutsk à Okhotsk passe par les branches descendantes des lignes à déclinaison occidentale: la déclinaison diminue constamment et devient enfin nulle sur la mer d'Okhotsk, qui est traversée par une ligne sans déclinaison. Cette ligne et celles qui l'avoisinent de part et d'autre (les lignes de déclin. occidentale du côté d'Okhotsk et celles de déclinaison orientale dans la péninsule du Kamtchatka) suivent ici presque la direction des méridiens. La ligne sans déclinaison conserve long-tems cette direction, car on la fait passer par la Nouvelle Hollande mais les autres s'infléchissent vers l'Est dans leur prolongement austral. On voit sur les cartes ci-jointes, la ligne de 4° de déclinaison orientale, que nous avons vu traverser tout le Kamtchatka, s'éloigner vers l'Est jusqu'au méridien de 235°,5 de longit. orientale et puis revenir vers l'Ouest.

Quant aux lignes qui offrent une déclinaison orientale de 20 jusqu'à 30 degrés, et que nous avons rencontrées entre le Kamtchatka et l'île de Sitkha, elles affectent évidemment la figure de courbes fermées ayant apparemment, pour centre de figure, le grand pôle Nord de l'aimant terrestre, dont la position a été déterminée par les observations directes et faites sur les lieux mêmes par M. le Cap. Parry. Des courbes de déclinaisons orientales correspondantes à celles-ci et sensiblement de même nature, se trouvent dans l'hémisphère austral, près du Cap-Horn.

Lignes à égale intensité ou lignes isodynamiques.

Espérant encore compléter mes observations relativement à ces lignes intéressantes, pendant mon passage du Brésil en Europe, je me borne ici à en relever quelques particularités frappantes et nommément celle, qu'en Sibérie les lignes isodynamiques ne sont rien moins que parallèles aux lignes d'égale inclinaison nous voyons au contraire sous le méridien d'Obdorsk et de Tobolsk, les premières avoir des branches descendantes presque verticales ou légèrement infléchies du NO au SE, tandis que les lignes à inclinaison égale y sont presque horizontales.

Ce n'est qu'à l'Est de l'Asie et sous des latitudes moindres de 40°, que les lignes isodynamiques deviennent de nouveau parallèles aux lignes d'égale inclinaison. Elles conservent cette propriété sous le méridien de 225° de part et d'autre de l'équateur magnétique. Sous ce méridien la force atteint son minimum à l'équateur magnétique même: l'intensité dans ce point s'est trouvée égale à 0,998. — Néanmoins la suite de nos observations exécutées pendant le trajet d'Otaheiti au Brésil, démontre que même à de petites latitudes ou, ce qui revient au même, dans le voisinage de l'équateur magnétique il se rencontre dans le cours des lignes isodynamiques, de fortes anomalies dont les lignes à inclinaison égale ne se ressentent point dans les mêmes endroits: c'est ainsi qu'on rencontre sur la ligne à 20° d'inclinaison Sud, une intensité de 0,85 seulement (comparez intensité et inclinaison sous le méridien de Rio Janéiro). Ces indications préliminaires suffiront

pour prouver que l'ancienne théorie, développée par Euler et Krafft et plus tard par MM. de Humboldt et Biot et qui ne suppose qu'un *seul axe magnétique* est absolument en défaut pour les loix de l'intensité de la force magnétique.

En effet l'intensité n'étant d'après cette théorie, qu'une fonction de l'inclinaison, les lignes qui représentent l'un et l'autre de ces phénomènes devraient conserver une marche toujours parallèle. On peut en tirer la conséquence intéressante, que la position des deux pôles magnétiques n'est pas la seule qui règle les phénomènes de l'inclinaison et de la déclinaison dans les différentes parties du globe, mais qu'il existe encore une cause secondaire qui, n'affectant toutefois que très faiblement la déclinaison et l'inclinaison (et la dernière d'autant moins qu'on l'observe plus près de l'équateur), exerce cependant sur les loix de l'intensité une influence si puissante qu'elle en efface presque tous les caractères déduits par la théorie.

Je vous prie, Monsieur, de vouloir bien ne regarder ces lignes que comme un rapport fait à la hâte.

Note ajoutée par M. Erman, à St.-Pétersbourg le 8 *Octobre* 1830.

Comme les lignes magnétiques pour le Grand-Océan s'arrondissent d'avantage par l'emploi des observations que j'ai faites depuis Rio Janeiro jusqu'à Cronstadt (où la Corvette le Krotkoï mouilla le 28 Sept. 1830) je préfère de n'acompagner pour le moment le présent rapport que des trois premières feuilles de ma carte; d'autant plus que les valeurs numériques que contient le tableau ci joint, mettront le lecteur en état de compléter lui même l'idée que j'ai tâché de donner ci-dessus du cours des lignes magnétiques.*)

---

*) Quant au tableau des valeurs numériques, je préviens le lecteur qu'une nouvelle discussion de différentes corrections pourra encore modifier en quelque chose les *intensités observées* et les *minutes en longitude* pour les places du vaisseau.

Résultats d'observations sur le magnétisme terrestre, obtenus pendant les années 1828, 1829 *et* 1830.

Dates 1828.	Noms des endroits	Latitudes.	Longitudes orientales du méridien de Greenwich.	Inclinaisons. de la force magnétique. + = incl. du pôle N. — = incl. du pôle S.	Intensités. de la force magnétique de l'aiguille.	Déclinaisons. + = déclinaison occid. — = déclinaison orient.
Juillet 2.	Pétersbourg.	59° 56',0 N.	30° 19',15	+71°12',4	1,4105	+ 6°47'20"
„ 11.	Poméranïé.	59 13,0	31 23,5	71 0,4	1,4270	
„ 12.	Nowgorod.	58 31,5	31 19,5	70 26,1	1,4119	6 19 22
„ 14.	Valdaï.	57 55,0	33 10,0	70 0,12	1,4162	
„ 15.	Vichny Volotchok	57 35,4	34 39,7	69 51,5	1,4175	
„ 17.	Twer.	56 51,7	35 57,0	68 31,4	1,3984	
„ 20.	Moscou.	55 45,8	37 32,5	68 58,75	1,4078	3 1 40
„ 29.	Bogorodsk.	55 50,5	38 28,25			3 23 58
„ 30.	Plotava.	55 44,0	38 44,25	68 44,60	1,4114	
„ 31.	Dmitrewskoïé.	56 0,0	40 7,50	68 8,67	1,4628	
Aout. 1.	A dix verstes de Soudogda.	55 55,0	41 4,50			0 21 0
„ 2.	Mourom.	55 34,0	41 36,0	67 58,0	1,4531	
„ 3.	Osablikovo.	55 54,5	43 1,0	68 15,28		
„ 4.	Doskino.	56 13,7	44 2,25	68 52,40	1,4339	0 16 26
„ 8.	Nijny Nowgorod.	56 19,7	44 28,0	68 43,67	1,4424	— 0 45 0
„ 10.	Tchougouny.	55 58,0	46 4,5	68 23,92	1,4351	1 23 28
„ 12.	Antchikova.	56 0,0	48 47,75	68 35,22	1,4504	1 35 21
„ 13.	Kasan.	55 47,8	49 20,75	68 23,83	1,4404	2 22 4
„ 20.	Méteski.	56 13,0	50 27,70	68 45,37	1,4594	2 39 52
„ 21.	Méletskaïa.	56 41,4	50 58,50	68 42,22	1,4734	
„ 22.	Kojilskaïa.	57 8,0	62 15,0	69 17,74	1,4877	
„ 23.	Zurinskaïa.	57 34,0	53 40,0	70 21,62	1,4764	
„ 24.	Doubrovskoïé.	57 39,0	54 41,0	69 48,53	1,4821	6 5 9
„ 25.	Perm.	58 1,2	56 26,0	70 1,71	1,4888	6 26 0
„ 28.	Krilasovo.	57 35,0	56 42,0	70 5,84	1,5352	6 4 53
„ 29.	Bykova.	56 49,0	57 37,0	69 49,99	1,5140	7 13 40
„ 30.	Kirguichanskaïa.	56 55,1	59 7,0	69 44,93	1,5090	
„ 31.	Caterinebourg.	56 50,6	60 39,75	69 23,96	1,5220	7 24 56
Sept. 9.	Kouchva.	58 18,4	60 45,0	70 50,87	1,5024	7 46 57
„ 12.	Verkhotourié.	58 50,25	61 12,5	71 0,87	1,5476	8 48 52
„ 15.	Bogoslovsk.	59 49,20	60 25,5	71 23,57	1,5236	
Octbr. 1.	Béléïka.	56 50,0	61 48,5	69 31,06	1,5094	
„ 2.	Sougatskaïa.			69 35,31	1,5014	8 18 20
„ 3.	Tioumén.	57 4,1	65 7,5	69 45,19	1,5049	9 7 38
„ 5.	Jouganovskaïa.	57 26,3	65 33,0	70 21,56	1,5164	9 15 4
„ 6.	Koutarbitskaïa.	57 57,0	66 39,0	70 22,24	1,5139	
„ 15.	Tobolsk.	58 11,7	68 5,5	71 3,15	1,5510	9 56 23
Novb. 22.	Ouvatskaïa.	58 56,7	68 43,0	71 12,81	1,5643	
„ 23.	Tongalovskoïé.	59 18,4	69 43,0	72 26,20	1,5740	
„ 24.	Denjikovskoié.	59 40,0	70 5,0			10 47 55

*

Dates 1828.	Noms des endroits.	Latitudes.	Longitudes orientales du méridien de Greenwich.	Inclinaisons de la force magnétique. + = incl. du pôle N. — = incl. du pôle S.	Intensités de la force magnétique de l'aiguille.	Déclinaisons. + = déclinaison occid. — = déclinaison orient.
„ 24.	Savodinskié Iourti.	60° 13 ,2 N.	69° 40′,0	+72°43′,93	1,5732	
„ 25.	Samarova.	60 43,2	68 57,0	73 6,78	1,5844	
„ 26.	Iélisarova.	61 15,0	68 45,0			— 11°44′35″
„ 26.	Kovachinskié Iourti.	61 19,6	68 34,0	73 27,17	1,5850	
„ 27.	Kondinskoïé.	62 22,0	68 0,0	73 41,81	1,5956	
„ 28.	Schorkal.	63 0,0	67 22,5			11 9 22
„ 28.	Kunduvanskié Iourti	63 24,0	67 11,25	74 3,06	1,5845	
Decbr. 1.	Beresov.	63 56,2	67 21,00	74 52,34	1,5802	1 16 20
				75 0 87	1,5813	pend. une Aurore boréale.
„ 4.	Katchegatskié Iourti.	65 8,2	68 23,00	75 15,06	1,5680	
„ 6.	Wandiaski.	66 16,0	68 30,0	75 58,81	1,6093	
„ 11.	Obdorsk.			76 6,84	1,5804	14 28 52
1829.						
Janr. 5.	Kototchikovo.	57 52,0	68 45,75	70 20,41	1,5642	
	Ajevski Volok.	57 10,0	71 32,0			9 12 48
„ 13.	Tara.	56 54,5	74 4,75	70 27,22	1,5753	9 40 15
„ 15.	Pokrovskoïé Selo.	55 48,0	76 47,00	69 42,55	1,6174	
„ 17.	Tchoulume.	55 23,0	80 44,0	69 52,62	1,5781	
	Ojasch.	55 27,0	83 40,0			8 12 30
„ 18.	Kolyvan.	55 7,0	82 37,0	69 48,15	1,5986	
„ 21.	Tomsk.	56 29,6	85 9,25	70 58,7	1,6182	8 34 54
„ 23.	Podiélnichna.	56 18,1	87 10,00	71 4,62	1,6266	
	Kosoulskaïa.	56 10,0				7 3 12
„ 29.	Krasnoïarsk.	56 1,0	92 57,25	70 51,57	1,6520	6 41 49
	Kansk.	55 37,0 N.	96 57,50	71 35,12	1,6702	
	Alsalevsk.	55 15,0	98 45			4 51 2
Fevr. 3.	Koursan.	54 12,0	100 0,0	70 5,00	1,6523	
„ 4.	Savaria.	53 28,0	101 53,0	69 16,62	1,6574	
„ 11.	Irkoutsk.	52 16,7	104 11,0	68 6,50	1,6324	2 4 40
„ 26.	Kadilnaïa.	52 3,6	104 47,0	67 34,43	1,6345	
	Sur la glace du Baïcal à 10 verstes de Posolskoïé	52 0,0	106 15,0			1 24 8
„ 25.	Tarakanova.	52 14,2	106 37,0	68 22,67	1,6640	
„ 14.	Werkhné-Oudinsk.	51 49,25	107 44,5	67 58,05	1,6264	
„ 24.	Arsentchevskaïa.	51 16,00	106 43,5	67 15,68	1,6357	0 10 25
„ 22.	Monakhonova.	50 58,1	106 22,0	66 58,96	1,6382	0 28 21
„ 18.	Troizko-Savsk.	50 21,4	106 31,5	66 13,96	1,6275	+ 0 34 34
Mars 19.	Olsonskaïa.	52 59,3	104 47,0	68 43,95	1,6732	
	Mansourskaïa.	53 25,0	105 15.0			— 1 14 0
„ 21.	Tioumentsovskaïa.	54 14,0	105 19,0	69 55,43	1,6476	
„ 21.	Botoïevskaïa.	55 20,4	105 21,0	71 13,03	1,7205	1 46 9
„ 22.	Boïarskaïa.	56 16,9	105 47,0	71 53,37	1,6891	
	Oustkoutskaïa.	57 0,0	107 18,0			2 8 55
„ 24.	Potapovskaïa.	57 24,0	107 33,75	72 28,70	1,7106	
„ 25.	Kirensk.	57 47,0	108 2,5	73 6,93	1,6931	0 54 50
„ 27.	Itchora.	58 31,3	109 36,0	73 16,85	1,7140	

Dates 1829.	Noms des endroits.	Latitudes.	Longitudes orientales du méridien de Greenwich.	Inclinaisons. de la force magnétique. + = incl. du pôle N. — = incl. du pôle S.	Intensités de la force magnétique. de l'aiguille	Déclinaisons. + = déclinaison occid. — = déclinaison orient.
	Ivanoutkovskaïa.	58° 30',0 N.	110° 36',0			— 0°47'42"
Mars. 28.	Parchinskaïa.	59 20,5	111 30,0	+73°53',43	1,7411	1 7 0
„ 29.	Kentinskeïa.	59 53,4	114 4,0	74 32,28	1,7328	
„ 30.	Jerbinskaïa.	60 18,0	116 3,0	74 16,81	1,7019	+ 1 59 45
„ 31.	Béresovskaïa.	59 44,6	117 55,5	73 59,74	1,7472	
	Nelenskaïa.	60 0,0	118 30,0			1 49 32
Avril 2.	Olekminsk.	60 21,90	119 30,0	74 8,65	1,7066	2 18 12
„ 4.	Sanïakhtatskaïa.	60 52,8	123 45,5	73 41,72	1,7319	
	Issit.	61 0,0	124 55,0			3 4 48
„ 6.	Toën-Arin.	61 42,50	128 31,5	73 58,94	1,6892	
„ 13.	Iakoutsk.	62 1,80	129 43,5	74 17,13	1,6972	5 54 57
„ 24.	Porotovskaïa.	61 59,70	132 6,5	73 59,73	1,7208	3 58 45
„ 25.	Lebeguinskaïa.	61 12,30	133 32,0	73 56,13	1,6970	2 22 52
„ 26.	Nokhinskaïa.	61 57,25	135 5,25	73 39,06	1,7131	2 14 43
	Aldanskaïa.	61 45,0	135 41,25			3 7 43
„ 28.	A 4 verstes de Bélskoï Pérévos.	61 41,00		73 20,65	1,6790	
„ 29.	Tschernoliésnaïa.	61 29,2	136 14,75	73 7,99	1,7000	3 50 92
Mai 1.	Kyrnastykhskaïa.	61 28,9	137 5,50	73 5,00	1,6899	3 49 30
„ 6.	Allakhïounskaïa.	60 58,8	138 18,0	72 47,30	1.6777	
„ 8.	Antchi.	60 56,0	138 51,5			2 32 58
„ 12.	IoudomskaïaStanzia.	60 41,0	140 57,5	72 9,71	1,6796	
„ 14.	Ketanda.	60 49,75	141 32,5			2 36 28
„ 15.	Arki.	60 12,0	142 18,0	71 18,03	1,6437	
Juin. 16.	Okhotsk.	59 20,2	143 12,25	70 40,81	1,6149	2 17 30
	Sur la mer de Penjinsk.	58 45,75	145 49,50	69 22,50	1,6768	
	——	58 14,34	150 34,00	69 7,00		— 0 47 30
	——	58 14,16	151 58,75	69 3,75	1,6007	
	——	58 14,00	151 48,75			1 55 12
	——	58 13,20	156 58,00	68 12,50	1,5958	
Août. 13.	Tigil. Embouchure de la rivière.	57 56,80	158 2,0	68 28,21	1,5769	3 41 3
„ 28.	Ielovka.	56 55,80	160 41,75	68 5,97	1,5130	5 18 42
Septb. 8.	Khartchinsk.			68 23,31	1,5125	
„ 12.	Klioutchi.	55 57,40	160 22,75			6 26 35
„ 16.	Kosyrevsk.	55 28,80	159 18,50	66 53,76	1,5485	4 35 40
„ 19.	Machova.	54 33,80		66 24,95	1,5510	4 26 54
„ 28.	Natchinskaïa.			64 5,50	1,4942	[illegible]
Octb. 14.	Port de St. Pierre et Paul.			63 50,46	1,4888	4 15 54
	Sur le Grand Océan Boréal.	47 58	186 49			13 10
	——	50 21	199 10			21 7
	——	50 59	203 21			23 40
„ 29.	——	51 2,80	203 31,70	67 9,50	1,5220	
„ 31.	——	53 0	210 17,00			23 36

Dates. 1829.	Noms des endroits.	Latitudes.	Longitudes orientales du méridien de Greenwich.	Inclinaisons. (+ = incl. du pôle N. — = incl. du pôle S.)	Intensités de l'aiguille.	Déclinaisons. (+ = déclinaison occid. — = déclinaison orient.)
				de la force magnétique.		
Novbr. 1.	Sur le Grand Océan Boréal.	53°34'60 N.	213°38',20	+71° 5',50	1,5840	
„ 3.	——	55 33,20	221 1,50	75 33,1	1,6395	
„ 4.	——	56 54,20	223 53,20	77 11,1	1,6470	
„ 12.	A l'île de Sitkha.	57 3,12		75 43,23	1,7260	—28°19'22"
„ 20.	Sur le Grand Océan Boréal.	54 26,70	221 22,80	73 40,00	1,6735	
„ 26.	——	48 27	226 15			21 56
„ 29.	——	43 18,45	230 24,45	66 40,50	1,5805	
„ 30.	——	40 17	233 27			17 8
„ 30.	——	40 3,41	233 39,5	64 0,73	1,5512	
Decbr. 1.	——	39 12,31	235 28,34	63 40,0	1,5280	
„ 2.	——	38 0,22	235 54,00	63 41,5	1,5557	
„ 3.	——	38 16,00	236 6			13 10
„ 11.	Au port de St. François en Californie.	37 48,63	237 52,50	62 38,21	1,5851	15 6,29
„ 27.	Sur le Grand Océan Boréal.	35 71	233 35			11 56
„ 29.	——	31 50,6	234 17,5	56 31,95	1,4350	
„ 29.	——	31 26	234 37			11 41
„ 30.	——	30 31,33	233 41,0	55 4,99	1,3943	
1830.						
Janv. 1.	——	29 3.90	238 23,50	53 20,80	1,3800	
„ 2.	——	28 35,00	238 48			10 27
„ 2.	——	28 40,90	238 59,0	53 5,50	1,4022	
„ 4.	——	28 4,15	239 8,1	52 9,50	1,3638	11 57
„ 5.	——	26 36,41	239 28,1	50 22,62	1,3766	
„ 5.	——	26 56	239 3,5			11 26
„ 6.	——	25 59,7	238 54,0	49 26,13	1,3207	
„ 7.	——	25 21,4	238 37,5	48 6,46	1,3559	
„ 8.	——	23 43	238 42			8 8
„ 9.	——	23 12,44	238 15,5	45 20,52	1,3407	
„ 9.	——	22 59,94	238 11,7	44 14,40	1,2891	
„ 9.	——	21 10	237 56,5			7 34
„ 9.	——	21 3,60	237 56,5	42 16,95	1,2709	
„ 10.	——	19 39,50	237 45,0	40 7,80	1,2412	
„ 10.	——	18 36.40	237 34,2	39 3,11	1,2191	
„ 11.	——	16 55,80	237 13,5	35 34,75	1,1853	
„ 12.	——	15 15,15	236 55,2	32 28,37	1,1828	5 36
„ 12.	——	13 37,45	236 36,2	29 45,66	1,1376	
„ 13.	——	12 17,52	236 28,0	27 9,32	1,1429	
„ 13.	——	11 28	236 33			5 3
„ 13.	——	11 17,93	236 22,5	25 44,42	1,1360	
„ 14.	——	9 42,63	235 57,7	23 6,37	1,1070	
„ 15.	——	8 55,43	235 57,5	20 57,7	1,0823	
„ 16.	——	8 10,43	236 3,7	19 21,11		
„ 16.	——	7 52,00	236 44,0			5 12

Dates 1830.	Noms des endroits.	Latitudes.	Longitudes orientales du méridien de Greenwich.	Inclinaisons. de la force magnétique. + = incl. du pôle N. — = incl. du pôle S.	Intensités. de la force magnétique. de l'aiguille.	Déclinaisons. de la force magnétique. + = déclinaison occid. — = déclinaison orientale.
Janv. 18.	Sur le Grand Océan Boréal.	7°15',45 N.	236° 26'5	+17°51',87	1,0534	
„ 19.	——	6 27,20	236 42,5	17 8,81	1,0550	
„ 19.	——	6 26,00	236 40,5			— 4°51'
„ 19.	——	5 49,02	236 38,1	15 24,78	1,0557	
„ 20.	——	5 10,00	236 11,4			4 29
„ 20.	——	4 35,00	235 47,5	13 2,62	1,0488	
„ 21.	——	2 47	234 2,4			3 41
„ 21.	——	2 41,8	234 16,8	9 18,31	1,0282	
„ 22.	——	1 33,1	233 28,8	7 21,21	1,0180	
„ 22.	——	0 45,9	232 54,2	5 15,36	0,9923	
„ 22.	——	0 27	232 38,4			4 9
„ 22.	——	0 8,9	232 27,0	3 30,39	0,9856	
„ 23.	Sur le Grand Océan Austral.	0 12,0 S.	232 8,7	3 8,49	0,9974	
„ 23.	——	0 6,5	231 43,8		0,9953	
„ 23.	Sur le Grand Océan Boréal.	0 6,9 N.	230 40,3	3 45,32	1,0136	
„ 24.	——	0 10,2	229 57,0	3 46,00		
„ 24.	——	0 8,2	229 43,9	4 19,34	1,0219	
„ 24.	——	0 0,4	229 21,6	3 49,52	1,0292	
„ 24.	Sur le Grand Océan Austral.	0 29,3 S.	228 40,7	2 38,31	0,9768	
„ 25.	——	0 40,5	228 29,6	2 16,81	0,9798	
„ 25.	——	0 52,9	228 15,9	2 10,92	0,9999	4 29
„ 25.	——	1 6,7	228 0,3	1 32,81	1,0285	
„ 25.	——	1 47,5	227 18,0	— 0 14,56	1,0152	
„ 26.	——	1 52,0	226 27,6	+ 0 16,25	0,9964	
„ 26.	——	1 52,6	225 52,3	— 0 42,62	0,9418	
„ 26.	——	1 51,8	225 2,7	+ 0 0,90	1,0080	
„ 27.	——	1 40	224 17,4			4 31
„ 27.	——	1 29,6	223 45,8	0 46,71	1,0146	
„ 27.	——	1 27,8	223 58,5	1 5,37	0,9378	
„ 28.	——	1 37,2	222 12,0	0 57,42	1,0040	
„ 28.	——	1 48,3	221 48,6	— 0 3,72	1,0089	
„ 28.	——	2 11,2	221 12,7	0 21,81	1,0221	
„ 28.	——	2 14	221 19,4			4 12
„ 28.	——	1 56,6	221 0,0		1,0008	
„ 29.	——	1 53,3	220 36,5	+ 0 14,91		
„ 29.	——	2 19,45	220 15,9	— 0 59,42	0,9808	
„ 29.	——	3 12,20	219 27,6	1 45,56		
„ 30.	——	3 31,40	219 15,2	2 50,22		
„ 30.	——	4 29,80	218 42,3	5 3,90	1,0159	4 8
„ 30.	——	5 33,50	218 03,2	7 29,81	1,0321	
„ 31.	——	5 51,10	218 15,00	8 5,94		
„ 31.	——	7 2,61	217 3,90	10 7,32	1,0315	
„ 31.	——	7 35	216 51,40			4 42

Dates 1830.		Noms des endroits.	Latitudes.	Longitudes orientales du méridien de Creenwich.	Inclinaisons. de la force magnétique. + = incl. du pôle N. — = incl. du pôle S.	Intensités de la force magnétique de l'aiguille.	Déclinaisons. + = déclinaison occid. — = déclinaison orientale.
Janv.	31.	Sur le Grand Océan Austral.	7° 15',05 S	216° 53',20	— 11° 27'09	1,0086	
Fevr.	1.	——	8 5,60	216 41,0	12 46,80	1,0326	
„	1.	——	9 21,90	215 58,1	15 18,54	1,0656	
„	2.	——	10 22,40	215 20,9	17 16,74	1,1049	
„	2.	——	11 13,10	214 59,1	18 18,00	1,0810	
„	2.	——	11 32,00	214 57,4			— 5° 4'
„	2.	——	11 54,20	214 52,5	19 10,80	1,0698	
„	3.	——	12 2,20	214 51,4	19 32,93	1,1137	
„	3.	——	12 56,40	214 37,6	21 19,06	1,1185	
„	4.	——	13 6,65	214 36,9	21 16,87	1,1237	
„	4.	——	13 43,95	214 31,1	22 23,58	1,0946	
„	5.	——	14 1,23	214 30,6	22 28,62	1,0751	
„	6.	——	14 54,70	213 58,7	24 54,22	1,1208	
„	8.	——	14 42,80	212 25,7	24 23,18	1,0912	
„	9.	——	14 42,00	212 20,4			6 10
„	13.	——	16 27,40	210 45,2	27 ,86	1,1775	
„	18.	Ile Otaheiti ou Cap de Venus.	17 29,17	210 24,15	30 29,54	1,1716	
„	23.	GrandOcéan Austral.	17 23,25	210 10,5	29 15,90		
„	24.	——	19 6,3	209 49,34	31 56,46	1,2489	
„	25.	——	22 17,1	209 28,70	35 51,84	1,1796	
„	26.	——	24 50,9	209 59,60	40 19,43	1,2450	
Mars	1.	——	26 56,0	209 54,00	43 5,50	1,3403	
„	2.	——	27 42,5	209 56,77	44 2,93	1,3147	
„	3.	——	28 47,8	213 8,10	45 27,90	1,2473	
„	4.	——	29 3,8	213 24,60	45 26,52	1,3283	
„	5.	——	30 32,9	212 57,70	47 20,60	1,3395	
„	8.	——	32 19,6	214 6,3	50 5,73		
„	9.	——	32 22,3	214 34,93	49 7,10	1,3162	
„	10.	——	34 22,7	216 26,63	51 12.75	1,3542	
„	12.	——	34 55,3	218 29,20	52 29,31	1,3741	
„	15.	——	34 28,4	220 18,80	50 32,88		
„	17.	——	36 16,6	219 50,50	52 17,62	1,3858	
„	18.	——	37 38,9	218 5,77	53 52,37	1,4647	
„	20.	——	42 4,3	218 43,60	58 48,40	1,1834	
„	21.	——	44 24,4	221 58,70	61 4,25	1,5155	
„	23.	——	45 6,2	225 11,20	61 56,75	1,5167	
„	24.	——	45 4,9	228 22,80	61 43,88	1,5802	
„	27.	——	47 13,4	237 33,70	63 15,80	1,5193	
„	29.	——	48 10,9	242 22,60	63 39,60	1,5729	
„	30.	——	48 50,33	245 28,55	64 25,50	1.6282	
Avril	1.	——	51 2,60	252 22,11	65 48,65	1,5759	
„	4.	——	55 3,00	266 24,10	66 16,12	1,5892	
„	7.	——	56 28,50	276 38,44	65 5,64	1,5339	
„	10.	——	56 5,10	284 35,90	62 51,30	1,4940	
„	14.	——	58 31.20	289 34.80	61 5.58	1,4757	

Dates 1830.	Noms des endroits.	Latitudes.	Longitudes orientales du méridien de Greenwich.	Inclinaisons. de la force magnétique. + = incl. du pôle N. − = incl. du pôle S.	Intensités. de l'aiguille.	Déclinaisons. + = déclinaison occid. − = déclinaison orientale.
Avril 17.	Grand Océan Austral.	57° 26′,4 S.	295° 55′,90	−60° 6′,48	1,4432	
„ 19	——	56 2,5	299 33,60	58 26,61	1,3146	
„ 20.	——	55 35,7	302 1,60	57 28,36	1,3647	
„ 23.	——	52 44,4	304 25,55	54 29,00	1,2544	
„ 24.	——	50 12,3	304 17,2	51 9,18	1,2359	
„ 25.	——	47 10,7	306 20,1	48 44,50	1,1883	
„ 27.	——	43 5,53	307 31,4	43 53,40	1,0170	
„ 28.	——	39 47,80	308 44,7	40 27,04	0,9836	
„ 29.	——	38 17,40	309 27,33	37 19,00	0,9863	
„ 30.	——	37 08,78	309 41,35	36 41,88	0,9763	
„ 30.	——	35 44,40	310 22,8	34 9,88	0,9013	
Mai 1.	——	33 4,5	312 1,7	30 3,40	0,9450	
„ 3.	——			25 52,49	0,8847	
„ 4.	——			22 1,20	0,8618	
„ 5.	——			19 44,70	0,8433	
„ 13.	Sur la Rade de Rio-Janéiro, à bord de la corvette.			13 38,91	0,8791	

L'occasion d'un prompt envoi de ces papiers s'étant offerte d'une manière inespérée, je n'ai pas même pu finir les calculs pour la détermination des trois dernières places du vaisseau.

Observations de M. HANSTEEN, avec une carte.

(Lu le 6 Octobre 1830.)

Les lecteurs de notre Bulletin scientifique seront sans doute bien aise de trouver à côté des observations intéressantes de M. Erman, celles de M. Hansteen exécutées également en Sibérie, et à la même époque. La réputation méritée de l'observateur, et l'importance reconnue de ses recherches laborieuses me dispensent de tout préambule; et je les donne ici de suite, telles qu'il me les a communiquées dans deux lettres consécutives, datées d'Irkoutsk et d'Orenbourg.

NB. L'intensité de Paris a été posée égale à 1,348.

Noms des lieux.	Inclinaison.	Intensité.	Déclinaison.
Christiania	72° 16,'2		19° 45' O.
Stockholm	71 39,6	1,3861	14 57 —
St.-Pétersbourg	71 16,8	1,4105	6 41 —
Moscou	69 1,4	1,4013	3 3,1 —
Nijni-Novgorod	68 33	1,4085	0 35,5 E.
Kazan	68 26,5	1,4250	2 22,0 —
Méteski	68 54,9	1,4473	
Méletskaïa	68 50,1	1,4613	5 8,7 —
Kogilskaïa	69 21,8	1,4777	
Zurinskaïa	70 36,1	1,4767	
Doubrova	69 56,0	1,4877	
Okhansk	70 13,4	1,4965	
Perme	70 8,8	1,4940	6 3,8 —
Krylasovo	70 2,7	1,5015	6 6,8 —
Bykova	69 51,1	1,5045	7 2,6 —
Kirguichansk	69 51,3	1,5246	6 13,6 —
Catherinebourg	69 42,1	1,5245	6 26,8 —
Néviansk	69 35,8	1,5161	
Nijni-Taguil	69 46,8	1,5062	5 58,1 —
Kouchva	70 50,8	1,5005	7 57,1 —
Nijni-Tourinsk	71 2,0	1,5347	
Verkhotourié	71 12,1	1,5361	8 46,0 —
Bogoslovsk	71 36,0	1,5095	9 9,0 —
Béleïka	69 24,8	1,5081	

Noms des lieux.	Inclinaison.	Intensité.	Declinaison.
Sougatskaïa	69° 54′,1	1,5351	8° 19′,6 E.
Tioumen	70 15,5	1,5500	9 11,3 —
Yougeakova	70 30,5	1,5585	9 17,0 —
Koutarbitskaïa	70 38,7	1,5658	9 21,9 —
Tobolsk	70 56,6	1,5601	10 8,7 —
Istiatskaïa	70 24,0	1,5561	
Gotopoupova	70 11,7	1,5774	
Orlova	69 28,3		
Tioukalinsk	69 31,7	1,5722	
Bagenova	69 28,4	1,5828	
Moghilnaïa	69 46,1	1,5817	
Mouracheva	69 40,7	1,5858	
Spaskoïé	69 42,8	1,5895	
Antochkina	69 32,8	1,5846	
Kaïnsk	69 35,5	1,6012	
Osipovïé-Kolki	69 36,6	1,6035	
Oubinskaïa	69 40,3	1,6086	
Kargatskaïa Doubrova	69 45,8	1,5979	
Ovtchinnikova	69 41,4	1,6037	8 58,4 —
Kolyvan	70 2,1	1,6114	
Bolotna	70 22,0	1,6248	
Tomsk	70 48,6	1,6198	
Mikhaïloche-Volost	71 39,4	1,6371	
Anbarskaïa Yourta	71 53,4	1,6435	
Tougourskaïa	72 23,8	1,6437	
Narym	72 51,0	1,6378	9 56,2 —
Potchitanska	70 56,6	1,6373	
Atchinsk	71 6,0	1,6538	7 26,0 —
Malokemtchougskaïa	71 22,1	1,6666	
Krasnoïarsk	70 56,7	1,6626	5 29,7 —
Kansk	71 38,1	1,6781	
Kamichetskaïa	70 50,9	1,6710	
Nijni-Oudinsk	70 35,5	1,6719	4 38,2 —
Kouitounskaïa	70 23,4	1,6865	
Salarinskaïa	69 18,0	1,6523	
Telminskoï-Zavod	68 36,3	1,6474	
Irkoutsk	68 12,9	1,6466	1 37,2 —

Noms des lieux.	Inclinaison	Intensité.	Déclinaison
Kadilnaïa	67° 40',1	1,6489	
Sur le bord méridional du lac Baïkal	67 58,2	1,7194	
Verkhné-Oudinsk	67 52,5	1,6252	
Arsentchevskoïé	67 33,9	1,6498	
Selenghinsk	66 51,0	1,6422	0° 16',5 E.
Monakhonova	66 49,2	1,6245	
Troitskosavsk (à une lieue de Kiakhta)	66 20,7	1,6422	0 4,6 O.
Bord de l'Angara (latit. 53°, 21' longit. 100° 58' de Paris) . .	69 25,1	1,6723	
Balagansk	69 34,9	1,6627	
Yandinsk	70 19,5	1,6635	2 43,7 E.
Bratskoïé.	71 32,7	1,6823	3 11,5 —
Padounskoïé.	71 46,5	1,6809	3 35,4 —
Chamanskoïé	72 33,6	1,6649	3 28,2 —
Youdorma	73 45,1	1,6580	4 52,6 —
Kegenskoïé	73 55,8	1,6927	3 57,4 —
Tchadobetz	73 35,5	1,6957	5 30,8 —
Potaskoïskaïa	73 18,9	1,6770	
Ribinskoï	73 0,7	1,6630	
Yenisséïsk	73 24,2	1,6681	6 56,1 —
Anziferova	73 26,8	1,6727	3 30,9 —
Narimovskoïé	73 48,9	1,6813	4 54,5 —
Sérébrennikova	74 19,1	1,6603	9 39,8 —
Mikoulina	74 27,8	1,6663	
Doubtcherskoïé.	74 39,0	1,6632	9 50,8 —
Ocinovi	75 15,5	1,6728	
Somorokova	75 19,5	1,6838	10 15,8 —
Komcino.	75 18,9	1,6620	
Lébédévo	75 28,8	1,6815	10 58,8 —
Tchoulkova	75 42,4	1,6793	12 36,2 —
Kangatovo	76 14,9	1,6476	13 13,9 —
Fatianskoïé	76 38,2	1,6575	13 46,9 —
Tchernoostrova	76 55,9	1,6590	14 38,2 —
Baïkhinskoïé	77 20,3	1,6728	14 38,2 —
Kostino	77 33,6	1,6781	
Troizkoï-Monast.	77 45,6	1,6661	

Noms des lieux.	Inclinaison.	Intensite.	Declinaison.
Touroukhansk	77° 45′,7	1,6673	15° 0′,9 E.
Kasatchinskoïé	72 53,9	1,6700	
Maloï Kontak	— —	— —	6 5,7 —
Krasnoïarsk	— —	— —	6 43,2 —
Bogotolskaïa	71 5,7	1,6551	
Podiélnichnaïa	71 11,3	1,6467	
Biroukoulskaïa	— —	— —	7 31,3 —
Tomsk (Voyez plus haut) . . .			
Ocinovka.	70 22,1	1,6282	8 48,6 —
Legostaïeva	69 32,5	1,6170	
Barnaoul.	68 15,4	1,6050	7 20,5 —
Bergolosovskaïa	67 20,9	1,5859	
Zmeïnogorsk.	66 2,3	1,5726	7 19,1 —
Choulbinskoi-Forpost	65 13,8	1,5525	6 33,1 —
Semipalatinsk	65 15,5	1,5561	6 43,2 —
Semiyarskoï-Forpost	65 47,9	1,5584	5 56,1 —
Yamichevskaïa Krepost	66 31,0	1,5629	7 15,6 —
Preskoï-Redoute	67 15,2	1,5597	
Gélésinskaïa Krépost	67 47,4	1,5536	8 15,7 —
Isilbageskaïa Krepost	68 29,7	1,5746	8 31,7 —
Omsk.	68 48,1	1,5561	8 49,3 —
Lébaïa-Krépost.	68 46,9	1,5537	
Pétropavlovski	68 26,2	1,5389	8 16,1 —
Novoribinskoï	68 8,4	1,5393	7 47,2 —
Presnogorskaïa	67 48,1	1,5101	6 59,0 —
Kotcherdinski	67 40,8	1,5041	7 6,9 —
Troïtsk	67 20,9	1,4935	6 41,0 —
Koïelskaïa	67 47,0	1,4923	
Zlatooust.	67 43,5	1,4948	5 25,2 —
Satka	67 43,4	1,4929	
Maragoutova	68 18,0	1,4833	
Apreieva.	68 31,0	1,4830	
Asamatova	68 16,2	1,4686	
Oufa	67 37,4	1,4661	
Tolbasi	67 12,8	1,4592	
Méléous	66 14,1	1,4479	3 11,1 —
Orenbourg	64 49,1	1,4316	3 30 —

Noms des lieux.	Inclinaison.	Intensité.	Declinaison.
Iletsk	64° 42′,2	1,4181	
Khogotskaïa	68 48,5	1,6454	
Verkholensk	70 5,8		2° 10′.2 E.
Ponomarevskaïa	70 23	1,6790	
Osmolevskaïa	71 48,9	1,6838	2 1,5 —
Soukhovskaïa	72 20,3	1,6838	
Kirensk	73 10,4	1,7002	
Ondragennaïa derevka	73 21,3	1,7051	
Moutinskaïa	— —	— —	[illegible] 4,9 —
Ivanouchkova	73 31,4	1,7099	0 23,7 —
Vitimskaïa	74 10,9	1,7336	0 35,6 O.
Krestova	74 17,8	1,7125	2 12,9 —
Kentinskaïa	74 37,0	1,7148	
Singhikoulskaïa	74 48,8	1,7222	
Nokhtouiskaïa	73 59,0	1,6987	1 54,3 —
Olekminsk	74 21,0	1,7252	2 34,1 —
Khouvanakh	73 49,6	1,6989	
Daban	73 14,7	1,7320	
Khrestiakh	72 52,8	1,7393	1 43,9 —
Morkhinskaïa	73 57,9	1,6894	2 20,2 —
Jourinskaïa	74 4,4	1,7093	3 21,9 —
Titanskaïa	74 9,6	1,7069	
Yakoutsk	74 30,6	1,7114	6 8,4 —
Katingari	75 5,5	1,6991	4 5,0 —
Khamaïé	75 48,7	1,7264	
Youka	75 57,5	1,7167	
Negodiakh	76 0,5	1,7055	
Tchémetchaïskoï	76 15 5	1,7097	2 17,8 —
Bogadiakh	76 37,5	1,7461	1 38,0 —
Wilouïsk	76 44,4	1,7663	1 42,4 —

La plupart des positions géographiques se trouvent déjà consignées dans la lettre précédente de M. Erman; plusieurs en ont été déterminées pour la première fois par nos voyageurs; les déterminations de M. Hansteen ont été insérées dans notre bulletin scientifique livr. 1re pages II, III et IX.

La carte ci-jointe, tracée par M. Hansteen, donnera au lecteur une idée générale et précise des résultats auxquels notre illustre voyageur est parvenu re-

lativement au cours des lignes isodynamiques. Cette carte réunit dans un seul cadre toutes les observations qui ont été faites jusqu'à nos jours, dans l'hémisphère boréal, relativement à l'intensité magnétique; là où les observations manquaient, on a indiqué par des points le cours probable de ces mêmes lignes.

A. T. Kupffer.


SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01453 6031